ДВИЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПО ГАЗУ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В. В. МОЗЖИЛКИН

(*Саратов*)

Применяется метод последовательных приближений для решения автомодельной задачи о течении газа с ударной волной, распространяющейся по политропическому газу с переменной плотностью. Метод основан на специальном выборе независимых переменных и на использовании в качестве исходного приближения для закона движения скачка известного приближения Уитема [1]. Для этой задачи вычислено первое приближение для показателя автомодельности. Оно хорошо согласуется с точными значениями.

Метод Уитема состоит в следующем: предполагается, что на скачке выполняется соотношение вдоль характеристики определенного семейства, проинтегрировав которое можно найти закон движения скачка. В ряде задач, например о движении сходящихся ударных волн [2, 3], выходе ударной волны на поверхность звезды [4], этот метод обладает большой точностью. Однако с помощью метода Уитема невозможно построить течение за скачком и неясно, как находить следующее приближение.

1. Предположим, что плоская ударная волна движется по идеальному политропическому газу с переменными плотностью и давлением. Систему координат x, t выберем таким образом, чтобы ударная волна двигалась в направлении уменьшения $x, t \leqslant 0$.

Заменим переменные x, t на новые независимые переменные, за которые примем x — компоненты R_1 и R_2 координаты точек пересечения траектории скачка с траекторией частиц газа и характеристикой семейства C_+, проходящих через точку (x, t).

Тогда основную систему уравнений газовой динамики можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial(u-kc)}{\partial R_2}=\frac{\partial u}{\partial R_1}\frac{\partial t}{\partial R_2}\left(\frac{\partial t}{\partial R_1}\right)^{-1}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial R_2}=0$$
$$\frac{\partial(u+kc)}{\partial R_1}=\frac{c}{\gamma}\frac{d\Phi}{dR_1} \qquad \left(k=\frac{2}{\gamma-1}, \ \Phi=\ln\frac{c^{k\gamma}}{p}\right) \tag{1.1}$$

Здесь u — скорость частиц газа, c — скорость звука, p — давление, γ — показатель адиабаты.

Эту систему необходимо дополнить двумя уравнениями, которые определяют связь между переменными x, t и R_1, R_2

$$\frac{\partial x}{\partial R_1}=(u+c)\frac{\partial t}{\partial R_1}, \qquad \frac{\partial x}{\partial R_2}=u\frac{\partial t}{\partial R_2} \tag{1.2}$$

Исключим отсюда x

$$c\frac{\partial}{\partial R_2}\ln\frac{\partial t}{\partial R_1}+\frac{\partial}{\partial R_2}(u+c)=\frac{\partial u}{\partial R_1}\frac{\partial t}{\partial R_2}\left(\frac{\partial t}{\partial R_1}\right)^{-1} \tag{1.3}$$

К системе (1.1) и (1.3) необходимо добавить условия Ренкина — Гюгонио и граничное условие вдоль некоторой кривой

$$G[u, c, \Phi, R_1]=0, \qquad R_1=R_1(R_2) \tag{1.4}$$

Это условие связано с причиной и характером движения скачка, например может быть условием на поршне и т. д.

Как легко показать [5], на скачке выполняется соотношение

$$\frac{d}{dR_2}(u_* - kc_*) + \frac{c_*}{\gamma}\frac{d\Phi_*}{dR_2} = \frac{\partial u}{dR_1}\frac{U - u_* + c_*}{U - u_*} \qquad (R_1 = R_2) \quad (1.5)$$

Здесь U — скорость скачка, звездочкой обозначены значения параметров течения на скачке.

Отсюда видно, что метод Уитема справедлив, если

$$\partial u \,/\, \partial R_1 \equiv 0 \qquad \text{при } R_1 = R_2$$

Можно предположить, что $|\partial u \,/\, \partial R_1| \ll 1$ в некоторой области течения за ударной волной. Тогда по методу Уитема можно определить закон движения скачка; решение системы уравнений (1.1), (1.3) будет иметь простой вид

$$u_0 = u_*(R_2), \qquad c_0 = c_*(R_1) + k^{-1}[u_0 - u_*(R_1)], \qquad \Phi = \Phi_*(R_1) \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.2) находим x и t. Это решение не удовлетворяет граничному условию (1.4). Чтобы учесть его, применим метод последовательных приближений. Подставим (1.6) в условия Ренкина — Гюгонио и (1.4). Из полученных соотношений можно найти закон движения скачка. Построенное таким образом нулевое приближение аналогично решению Мейера [6] об обтекании профиля сверхзвуковым потоком. Найденное решение не удовлетворяет последнему уравнению системы (1.1), поэтому в качестве следующего приближения для u можно взять u_1, определенное как

$$\frac{\partial u_1}{\partial R_1} = \frac{c_0}{\gamma}\frac{d\Phi_0}{dR_1} - k\frac{\partial c_0}{\partial R_1}$$

Из остальных уравнений системы (1.1) и (1.2) найдем Φ_1, c_1, x и t, а соотношения Ренкина — Гюгонио и (1.4) позволяют найти закон движения скачка в первом приближении. Затем из последнего уравнения системы (1.1) найдем u_2 и т. д.

Чтобы упростить определение $t_n(R_1, R_2)$, удобно в правой части (1.3) произвести замену

$$\frac{\partial t_n}{\partial R_2}\left(\frac{\partial t_n}{\partial R_1}\right)^{-1} \quad \text{на} \quad \frac{\partial t_{n-1}}{\partial R_2}\left(\frac{\partial t_{n-1}}{\partial R_1}\right)^{-1}$$

что позволит свести уравнение (1.3) к линейному уравнению с разделяющимися переменными.

2. Указанным в предыдущем пункте методом последовательных приближений решим задачу о распространении сильной ударной волны по газу, плотность которого меняется по закону

$$\rho_0 = bx^\delta \qquad (\delta > 0, \qquad b = \text{const})$$

Так как давлением невозмущенного газа можно пренебречь, то течение является автомодельным. Поэтому введем следующие переменные:

$$\zeta = R_1 \,/\, R_2, \qquad x = R_1 X(\zeta), \qquad t = -\alpha R_1^\beta T(\zeta) \qquad (2.1)$$

$$u = R_1^{1-\beta} V(\zeta), \qquad c = R_1^{1-\beta} S(\zeta), \qquad \Phi = \lambda \ln(R_1)$$

$$(\beta = 1 \,/\, \alpha, \qquad \lambda = k(1 - \beta) - \delta)$$

Тогда уравнения (1.1) и (1.3) преобразуются к виду

$$\frac{d}{d\ln\zeta}V+(1-\beta)V=\frac{X+TV}{X+T(V-S)}\Psi(V,S,\alpha)$$

$$\frac{d}{d\ln\zeta}(V-kS)=\frac{\Psi(V,S,\alpha)}{X+T(V-S)}\qquad(2.2)$$

$$S\frac{d}{d\ln\zeta}\ln\left[\alpha\frac{dT}{d\ln\zeta}+T\right]+\frac{d}{d\ln\zeta}(V+S)=-\alpha\frac{dT}{d\ln\zeta}S\frac{\Psi(V,S,\alpha)}{X+T(V-S)}$$

$$\Psi(V,S,\alpha)=(1-\beta)(V-kS)+\lambda\gamma^{-1}S$$

Функция $X(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\zeta}(X\zeta)=-(V+S)\left[T+\alpha\frac{dT}{d\ln\zeta}\right]\qquad(2.3)$$

На скачке имеем

$$\zeta=1,\qquad V_*=-\frac{2}{\gamma+1},\qquad S_*=\frac{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}}{\gamma+1}\qquad(2.4)$$

$$\frac{dT}{d\ln\zeta}=-\frac{\sqrt{k\gamma}+1}{\alpha\sqrt{k\gamma}},\qquad X=T=1$$

Вместо (1.4) возьмем условие вдоль предельной характеристики

$$\Psi(V,S,\alpha)=(1-\beta)(V-kS)+\lambda\nu^{-1}S=0$$
$$X+T(V-S)=0\qquad\text{при }\zeta=\zeta^0=\text{const}\qquad(2.5)$$

Если положить в (2.2)

$$\Psi(V,S,\alpha)\equiv0\qquad(2.6)$$

это эквивалентно предложению $|\partial u/\partial R_1|\ll1$, то, как показывают расчеты, ошибка в определении производных на ударной волне и на предельной характеристике не превышает 10%. Поэтому в промежутке $1\leqslant\zeta\leqslant\zeta^0$ можно отбросить правые части у системы (2.2). Решение упрощенной системы имеет вид

$$V=-\frac{2}{\gamma+1}\zeta^{\beta-1},\quad S=\frac{1}{\varkappa}[1+\sqrt{k\gamma}-\zeta^{\beta-1}]\quad\left(\varkappa=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)$$

$$T=\frac{1}{\zeta^\beta}\left\{1-\beta(k\gamma)^{k/2}\int\limits_1^\zeta\frac{\zeta^{\beta-1}\,d\zeta}{[1+\sqrt{k\gamma}-\zeta^{\beta-1}]^\varkappa}\right\}\qquad(2.7)$$

$$X=\frac{1}{\zeta}\left\{1+(k\gamma)^{k/2}\int\limits_1^\zeta\frac{\varkappa^{-1}(1+\sqrt{k\gamma})-\zeta^{\beta-1}}{[1+\sqrt{k\gamma}-\zeta^{\beta-1}]^\varkappa}d\zeta\right\}$$

Показатель автомодельности α определяется из уравнений (2.4). Так как система (2.4) достаточно сложна, то было бы желательно получить более простое выражение для α. Из (2.6) следует, что на скачке должно выполняться следующее соотношение:

$$\frac{1}{\alpha}-1=\frac{\delta}{M_*\gamma+2}, \qquad M_*=\frac{2}{\sqrt{2\gamma(\gamma-1)}} \tag{2.8}$$

Формула (2.8) впервые получена Чизнеллом [7]. Примем за нулевое приближение решение (2.7), (2.8). Уравнения метода последовательных приближений можно представить в виде

$$\frac{dV_n}{d\ln\zeta}+(1-\beta_n)V_n=\Psi(V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n)\frac{X_{n-1}+T_{n-1}V_{n-1}}{X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})}$$

$$\frac{d}{d\ln\zeta}(V_n-kS_n)=\frac{\Psi(V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n)}{X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})} \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{d\ln\zeta}\ln\left[\alpha_n\frac{dT_n}{d\ln\zeta}+T_n\right]+\frac{1}{S_n}\frac{d}{d\ln\zeta}(V_n+S_n)=$$

$$=-\alpha_n\frac{dT_{n-1}}{d\ln\zeta}\frac{\Psi(V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n)}{X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})} \qquad (\beta_n=1/\alpha_n)$$

Отсюда после интегрирования можно получить

$$V_n=\zeta^{\beta_n-1}\left\{-\frac{2}{\gamma+1}+\int_1^\zeta\frac{\Psi(V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n)(X_{n-1}+T_{n-1}V_{n-1})d\zeta}{[X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})]\zeta^\beta}\right\}$$

$$V_n-kS_n=-\frac{2}{\gamma+1}(1+\sqrt{k\gamma})+\int_1^\zeta\frac{\Psi(V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n)d\zeta}{[X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})]\zeta}$$

$$T_n=\zeta^{-\beta_n}\left\{1-\frac{1}{\alpha_n\sqrt{k\gamma}}\int_1^\zeta\zeta^{\beta_n-1}\exp\left\langle-\int_1^\zeta\left[\frac{1}{S_n}\frac{d}{d\ln\zeta}(V_n+S_n)+\right.\right.\right. \tag{2.10}$$

$$\left.\left.\left.+\alpha_n\frac{dT_{n-1}}{d\ln\zeta}\frac{\Psi[V_{n-1},S_{n-1},\alpha_n]}{X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\right\rangle d\zeta\right\}$$

Величина α_n определяется из условия (2.4)

$$\frac{1}{\alpha_n}-1=\frac{\delta}{M_{n-1}\gamma+2}, \qquad M_{n-1}=-\frac{V_{n-1}}{S_{n-1}} \tag{2.11}$$

$$X_{n-1}+T_{n-1}(V_{n-1}-S_{n-1})=0$$

Этим методом вычислены значения α_1 для комбинации значений $\gamma=1.2$, 1.4, $^5/_3$ и $\delta=2.0$, 1.0, 0.5. Результаты вычислений приведены в таблице.

δ	2.0		1.0		0.5	
γ	α	α_1	α	α_1	α	α_1
$^5/_3$	0.696	0 6983	0.816	0 8176	0.877	0.8974
$^7/_5$	0.718	0.7191	0.831	0.8311	0.906	0.9059
$^6/_5$	0.752	0.7524	0.855	0.8537	0.920	0.9189

Значение независимой автомодельной переменной на предельной характеристике $\zeta = \zeta^0$ определялось разложением уравнения

$$X_0 + T_0(V_0 - S_0) = 0$$

в ряд по $\varepsilon = 1 - \zeta^0$ [1]. С точностью до малых порядка ε^3 включительно ε удовлетворяет уравнению

$$a\varepsilon^3 + b\varepsilon^2 + c\varepsilon + d = 0 \tag{2.12}$$

Здесь

$$a = \beta_0(V_* - S_*)\tau_2 - \frac{1}{6}\frac{\gamma-3}{\gamma+1}(1-\beta_0)(2-\beta_0)(3-\beta_0) + \theta +$$
$$+ \left[\beta_0(1-\beta_0)(\beta_0-2)\frac{M_*\gamma+1}{2M_*\gamma} - \beta_0(1-\beta_0)\tau_1\right]\frac{\gamma-3}{\gamma+1}$$

$$b = (V_* - S_*)\beta_0\tau_1 + (\beta_0-1)(\beta_0-2)\frac{1}{2}\frac{\gamma-3}{\gamma+1} - \beta_0(\beta_0 -$$
$$-1)\frac{\gamma-3}{\gamma+1}\frac{M_*\gamma+1}{M_*\gamma} + \frac{M_*\gamma - V_* - S_*}{M_*\gamma} + (1-\beta_0)\frac{1}{2\gamma}$$

$$c = (\beta_0 - 1)\frac{\gamma-3}{\gamma+1} - \beta_0(M_*\gamma+1)\frac{V_*-S_*}{M_*\gamma} - \frac{M_*\gamma - V_* - S_*}{M_*\gamma}$$

$$d = 1 - V_* - S_*, \qquad \theta = \frac{1}{6}(1-\beta_0)(\delta-4) - \frac{M_*\gamma - V_* - S_*}{M_*\gamma}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{6}(1-\beta_0)\left\{(\beta_0-1)\left[\frac{M_*\gamma+1}{M_*\gamma} + \frac{1}{S_*}\right] + 5\frac{M_*\gamma+1}{M_*\gamma} +\right.$$
$$\left. + \frac{4}{V_*\gamma}\right\} - \frac{M_*\gamma+1}{M_*\gamma}, \qquad \tau_1 = (\beta_0+1)\frac{M_*\gamma+1}{2M_*\gamma} + \frac{\beta_0-1}{2V_*\gamma}$$

Заметим, что полученные результаты хорошо согласуются со значениями показателей автомодельности α из работы [8].

В заключение автор благодарит С. В. Фальковича за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

Поступило 27 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4.
2. Welsh R. L. Imploding shocks and detonations. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, p. 1.
3. Вахрамеев Ю. С. О кумуляции ударных волн в неоднородной среде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Sakurai A. On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas. Commun. Pure. Appl. Math., 1960, vol. 13, pp. 353—370.
5. Meyer R. E., Ho D. V. Notes on non-uniform shock propagation. J. Acoust. Soc. America, 1963, vol. 35, No. 8.
6. Meyer R. E. On a supersonic flow behind a curved shock. Quart. Appl. Math., 1957, vol. 14.
7. Chisnell R. F. The normal motion of shock wave through a non-uniform one dimensional medium. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1955, vol. 232, No. 1190.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных явлений в газах. М., «Наука», 1966.