

СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ДВУМЯ НЕПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ И ДВУМЯ СТЕНКАМИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ВНЕШНЕМУ МАГНИТНОМУ ПОЛЮ

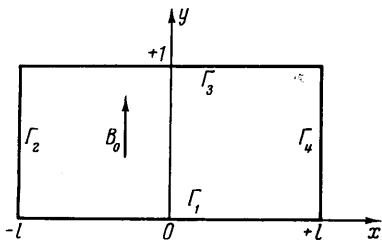
Ю. И. МАЛОВ, Л. К. МАРТИНСОН, К. Б. ПАВЛОВ

(Москва)

Рассмотрено течение проводящей жидкости в канале прямоугольного сечения, две стенки которого, параллельные внешнему магнитному полю, обладают произвольной проводимостью, а две другие — изоляторы. Решение задачи построено в форме бесконечных рядов. На основании полученных соотношений проведены численные расчеты распределений скорости и индуцированного магнитного поля по сечению канала для нескольких режимов течения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ламинарное течение проводящей вязкой несжимаемой жидкости в канале прямоугольного сечения (фиг. 1) под действием постоянного градиента давления $P = dp/dz = \text{const}$. Внешнее однородное магнитное поле \mathbf{B}_0 направлено вдоль оси y .

Для каналов прямоугольного сечения известны решения задач с однородными и некоторыми вариантами смешанных граничных условий (см. обзорные работы [1, 2]). Между тем в литературе отсутствует решение практически важной задачи, когда стенки прямоугольного канала, перпендикулярные внешнему магнитному полю, выполнены из изолятора, а стенки, параллельные полю, обладают произвольной проводимостью σ_w . Решение этой задачи проводится ниже.



Фиг. 1

Уравнения магнитной гидродинамики позволяют свести решение задачи к нахождению двух функций $u(x, y)$ и

$B_z(x, y) = \mu_0(\sigma\eta)^{1/2}b(x, y)$, соответствующих распределению в канале осевой скорости и индуцированного магнитного поля [3]. Проведя обезразмеривание координат на ширину канала L в направлении оси y , будем считать в дальнейшем, что в области течения жидкости $-l \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq 1$. При этом для $u(x, y)$ и $b(x, y)$ может быть записана следующая система уравнений:

$$\Delta u + D_y b = -\Omega, \quad \Delta b + D_y u = 0 \quad (1.1)$$

$$D_y = M \frac{\partial}{\partial y}, \quad M = B_0 L \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2}, \quad \Omega = -\frac{PL^2}{\eta} = \text{const} > 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Здесь M — число Гартмана, σ — электропроводность жидкости, η — коэффициент динамической вязкости.

Система (1.1) должна быть решена с учетом соответствующих граничных условий (фиг. 1) для u и b на контуре $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. Граничные условия для u на контуре Γ определяются условием прилипания жидкости к стенкам канала

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия для b зависят от характера проводимости стенок канала [3]. На непроводящих стенках канала граничные условия для b имеют вид

$$b|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0 \quad (1.3)$$

Точные граничные условия для b на стенках канала, обладающих произвольной проводимостью σ_w , должны соответствовать сшиванию электрических и магнитных полей внутри канала и в области стенок с учетом известных граничных условий электродинамики [4]. В этом случае необходимо ввести в рассмотрение индуцированное магнитное поле внутри стенок. Однако, как было показано в работе [5], на стенке, обладающей конечной проводимостью, можно использовать приближенное граничное условие для b

$$\frac{\partial b}{\partial n} + \theta b = 0, \quad \theta = \frac{\sigma}{\sigma_w} \frac{L}{d} \quad (1.4)$$

Здесь n — направление внутренней нормали к стенке, а θ — безразмерный коэффициент, зависящий от отношения проводимостей жидкости и материала стенки и их толщин. При этом отличие приближенных условий (1.4) от точных тем меньше, чем меньше толщина проводящей стенки d . Поэтому в случае конечных значений проводимости стенок будем считать выполненным условие $d \ll L$. Заметим, что в двух предельных случаях $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \infty$ приближенное условие (1.4) переходит в точные, представляющие собой соответственно условие на идеально проводящей стенке $\partial b / \partial n = 0$ или на непроводящей стенке $b = 0$.

Для рассматриваемого канала условие (1.4) имеет форму

$$(D_x b \pm \theta b)_{x=\pm l} = 0 \quad (D_x = \partial / \partial x) \quad (1.5)$$

2. Построение решения задачи. С помощью подстановки

$$u(x, y) = v(x, y) + \Phi_1(y) \equiv v(x, y) + \frac{\Omega \operatorname{ch}^{1/2} M - \operatorname{ch} M (y - 1/2)}{M 2 \operatorname{sh}^{1/2} M} \quad (2.1)$$

$$b(x, y) = h(x, y) + \Phi_2(y) \equiv h(x, y) + \frac{\Omega}{M} \left[\frac{\operatorname{sh} M (y - 1/2)}{2 \operatorname{sh}^{1/2} M} - (y - 1/2) \right]$$

система (1.1) может быть приведена к однородной. Отметим, что функции $\Phi_1(y)$ и $\mu_0 (\sigma \eta)^{1/2} \Phi_2(y)$ представляют собой распределение скорости и индуцированного магнитного поля известного течения Гартмана [3], причем

$$\Phi_1|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = \Phi_2|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0 \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) система (1.1) преобразуется к виду

$$\Delta v + D_y h = 0, \quad \Delta h + D_y v = 0 \quad (2.3)$$

Из (1.2), (1.3) и (2.2) следует, что для v и h на участках контура Γ_1 и Γ_3 имеют место условия

$$v|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = h|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0 \quad (2.4)$$

Определим интегральный оператор D_y^{-1} , действующий на функцию $f(x, y)$ по правилу

$$D_y^{-1} f = \int_0^y f(x, \xi) d\xi$$

Так как $D_y^{-1} D_y = 1$, если $f(x, 0) = 0$, то из первого уравнения системы (2.3) с учетом (2.4) имеем

$$h = -D_y^{-1} \Delta v \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) во второе уравнение системы (2.3), имеем уравнение для функции $v(x, y)$, содержащее бигармонический оператор

$$Lv \equiv (\Delta \Delta - D_y D_y) v = 0 \quad (2.6)$$

которое с учетом (2.4) и (1.5) должно быть решено с граничными условиями

$$v|_{y=0} = v|_{y=l} = 0 \quad (2.7)$$

$$D_y^{-1} \Delta v|_{y=0} = D_y^{-1} \Delta v|_{y=l} = 0 \quad (2.8)$$

$$v|_{x=-l} = v|_{x+l} = -\Phi_1(y) \quad (2.9)$$

$$(D_x D_y^{-1} \Delta v + \theta D_y^{-1} \Delta v)_{x+l} = \theta \Phi_2(y) \quad (2.10)$$

$$(D_x D_y^{-1} \Delta v - \theta D_y^{-1} \Delta v)_{x-l} = \theta \Phi_2(y) \quad (2.11)$$

Очевидно, что функции $v(x, y)$ и $h(x, y)$ четны по x , а по y представляют собой соответственно четную и нечетную функции относительно $y = 1/2$. Заметим, что уравнению (2.6) удовлетворяют решения вида $v = e^{\alpha x + \beta y}$ с константами α и β , связанными уравнением $\beta^4 + \beta^2(2\alpha^2 - M^2) + \alpha^4 = 0$.

Это позволяет построить линейно-независимые решения уравнения (2.6), четные по x и удовлетворяющие условиям (2.7) и (2.8)

$$v_k = e^{\pm 1/2 M y} \sin k \pi y \operatorname{ch} \omega_k x, \quad \omega_k = (1/4 M^2 + \pi^2 k^2)^{1/2} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.12)$$

Общее решение уравнения (2.6), удовлетворяющее граничным условиям (2.7) и (2.8), запишем в виде суперпозиции решений (2.12)

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{1/2 M y} + b_k e^{-1/2 M y}) \frac{\operatorname{ch} \omega_k x}{\operatorname{ch} \omega_k l} \sin k \pi y \quad (2.13)$$

Последовательности коэффициентов a_k и b_k при этом должны быть определены из граничных условий (2.9) и (2.10). В силу четности $v(x, y)$ по x , условие (2.11) в этом случае удовлетворяется автоматически. Условия (2.9) и (2.10) с учетом (2.13) приводят к двум соотношениям

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{1/2 M y} + b_k e^{-1/2 M y}) \sin k \pi y = -\Phi_1(y) \quad (2.14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k \operatorname{th} \omega_k l + \theta) (a_k e^{1/2 M y} - b_k e^{-1/2 M y}) \sin k \pi y = \theta \Phi_2(y)$$

Заметим, что так как ряд в выражении (2.13) определяет четную относительно точки $y = 1/2$ функцию, то между коэффициентами a_k и b_k , очевидно, имеет место соотношение

$$b_k = (-1)^{k+1} e^{1/2M} a_k \tag{2.15}$$

Умножая соотношения (2.14) на $e^{-1/2My} \sin j\pi y$ и интегрируя их по y в пределах от 0 до 1, получаем

$$1/2 a_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k K_{jk} = f_j \tag{2.16}$$

$$1/2 a_j (\lambda_j + \theta) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\lambda_k + \theta) K_{jk} = \theta (s_j - f_j)$$

где

$$K_{jk} = \frac{2\pi^2 M [1 - (-1)^{k+j} e^{-M}] k j}{[M^2 + \pi^2 (k-j)^2] [M^2 + \pi^2 (k+j)^2]}, \quad s_j = \frac{\pi \Omega j [(-1)^j e^{-1/2M} - 1]}{\omega_j^4}$$

$$f_j = \frac{\pi \Omega M [(-1)^j e^{-M} - e^{1/2M}] j}{2\omega_j^2 (2M^2 + \omega_j^2) \operatorname{sh} 1/2M}, \quad \lambda_j = \omega_j \operatorname{th} \omega_j l$$

Из (2.16) следует бесконечная система:

$$a_j + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\theta + \lambda_j} K_{jk} = \frac{\lambda_j}{\theta + \lambda_j} f_j + \frac{\theta}{\theta + \lambda_j} s_j$$

которая с учетом (2.15) может быть приведена к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов a_j

$$a_j + \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk} a_k = R_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad \sum_{j=1}^{\infty} |R_j|^2 < \infty \tag{2.17}$$

Здесь

$$C_{jk} = 2\pi^2 M \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\theta + \lambda_j} \frac{[(-1)^k e^{1/2M} - (-1)^j e^{-1/2M}] k j}{[M^2 + \pi^2 (k-j)^2] [M^2 + \pi^2 (k+j)^2]}$$

$$R_j = \frac{\lambda_j}{\theta + \lambda_j} f_j + \frac{\theta}{\theta + \lambda_j} s_j$$

Отметим, что имеет место следующая оценка для матричных элементов C_{jk} :

$$\sum_{k, j} |C_{jk}|^2 \leq \operatorname{const} \sum_{k, j \neq k} \left| \frac{k}{(k-j)(k+j)^2} \right|^2 \leq \operatorname{const} \sum_{k, j \neq k} \frac{1}{(j-k)^2 k^2} =$$

$$= \operatorname{const} \sum_k \left(\frac{1}{k^2} \sum_{j \neq k} \frac{1}{(j-k)^2} \right) < \infty$$

Поэтому для приближенного определения коэффициентов a_j бесконечной системы (2.17), удовлетворяющих условию $|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots < \infty$, обосновано применение метода редукции [6], состоящего в том, что вместо системы (2.17) решается система

$$a_j^* + \sum_{k=1}^N C_{jk} a_k^* = R_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \tag{2.18}$$

представляющая собой алгебраическую систему уравнений N -го порядка, причем $\lim a_j^* = a_j$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, значения a_j^* могут быть взяты в качестве приближенных значений решения бесконечной системы (2.17).

С учетом (2.1), (2.5), (2.13) и (2.15) окончательно решение задачи можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \frac{\Omega \operatorname{ch}^{1/2} M - \operatorname{ch} M (y - 1/2)}{M \cdot 2 \operatorname{sh}^{1/2} M} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} a_j [e^{1/2 M y} - (-1)^j e^{1/2 M (y-1)}] \frac{\operatorname{ch} \omega_j x}{\operatorname{ch} \omega_j l} \sin j \pi y \\
 b(x, y) &= \frac{\Omega}{M} \left[\frac{\operatorname{sh} M (y - 1/2)}{2 \operatorname{sh}^{1/2} M} - \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] - \\
 &- \sum_{j=1}^{\infty} a_j [e^{1/2 M y} + (-1)^j e^{1/2 M (y-1)}] \frac{\operatorname{ch} \omega_j x}{\operatorname{ch} \omega_j l} \sin j \pi y
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

где коэффициенты a_j удовлетворяют бесконечной системе (2.17), а для их приближенного вычисления достаточно ограничиться решением редуцированной системы (2.18).

Как уже указывалось, из найденного решения можно получить решения двух предельных задач: задача А — течение в канале со всеми непроводящими стенками — и задача Б — течение в канале с непроводящими стенками, перпендикулярными внешнему магнитному полю, и идеально проводящими стенками, параллельными полю. Для этих задач структура решений (2.19) сохраняется, а для нахождения коэффициентов a_j в этом случае в системе (2.17) необходимо совершить предельные переходы $\theta \rightarrow \infty$ (задача А) или $\theta \rightarrow 0$ (задача Б).

В задаче А предельный переход дает $C_{jk}^\infty \rightarrow 0$, $R_j^\infty \rightarrow s_j$, так что в этом случае бесконечная система (2.17) расщепляется и могут быть выписаны точные значения коэффициентов a_j^∞ в следующем виде:

$$a_j^\infty = \frac{16\pi\Omega [(-1)^j e^{-1/2 M} - 1] j}{(M^2 + 4\pi^2 j^2)^2}$$

Решение задачи А впервые было выполнено Шерклифом [7] в форме, соответствующей разложениям по другой системе собственных функций.

Предельный переход $\theta \rightarrow 0$ в (2.17) (задача Б) приводит к следующей бесконечной системе относительно коэффициентов a_j° :

$$a_j^\circ + \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}^\circ a_k^\circ = R_j^\circ \tag{2.20}$$

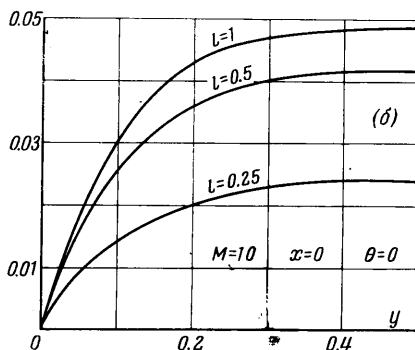
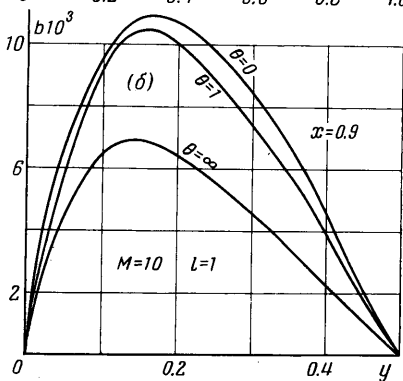
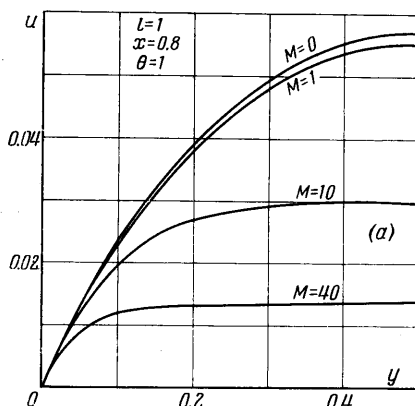
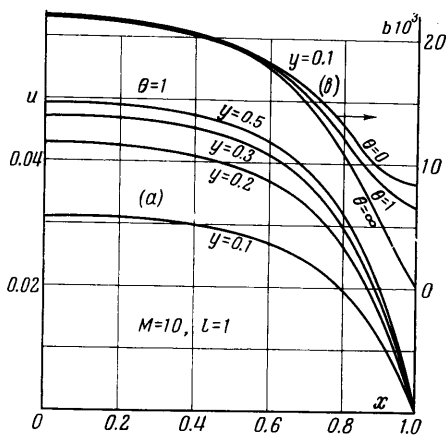
Здесь

$$\begin{aligned}
 C_{jk}^\circ &= 2\pi^2 M \frac{\lambda_j - \lambda_k}{\lambda_j} \frac{[(-1)^k e^{1/2 M} - (-1)^j e^{-1/2 M}] k j}{[M^2 + \pi^2 (k - j)^2] [M^2 + \pi^2 (k + j)^2]} \\
 R_j^\circ &= \frac{\pi \Omega M [(-1)^j e^{-M} - e^{1/2 M}] j}{2 \operatorname{sh}^{1/2} M \omega_j^2 (2M^2 + \omega_j^2)}
 \end{aligned}$$

Решение системы (2.20) может быть эффективно проведено методом редукции. В этой связи отметим, что известные решения задачи Б [8-10] позволяют провести вычисления лишь при очень больших значениях числа Гартмана M или очень большом отношении поперечных размеров канала l .

3. Результаты численных расчетов. Полученные выше формулы (2.19) были использованы для построения распределений скорости и индуцированного магнитного поля по сечению канала. Значения коэффициентов a_j находились из решения редуцированной системы (2.18), представляющей собой систему алгебраических уравнений N -го порядка. Решение этой системы и суммирование рядов (2.19) проводилось на ЭВМ «Минск-2» при $N = 30$ для различных значений параметров M , θ и l . Все расчеты выполнены для $\Omega = 1$, однако в силу того, что выражения (2.15) линейно зависят от Ω , эти результаты легко могут быть пересчитаны на любые значения Ω . Некоторые результаты численных расчетов представлены на фигурах.

На фиг. 2, а приведены профили скорости в различных сечениях канала ($y = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$) при $M = 10$ и $l = 1$. Отметим, что, как показывают расчеты, изменение параметра θ , характеризующего проводимость стенок, параллельных внешнему магнитному полю, от $\theta = 0$ (идеально проводящие стенки) до $\theta = \infty$ (непроводящие



Фиг. 2

Фиг. 3

стенки) слабо влияет на распределение скорости в канале. В большинстве исследованных случаев эти отличия лежали в пределах точности численного счета.

На фиг. 2, б и в представлены графики распределения индуцированного магнитного поля ($M = 10, l = 1$) в канале для различных значений параметра θ . Как видно из фигур, проводимость стенок, параллельных магнитному полю, существенно изменяет величину и характер распределения индуцированного магнитного поля вблизи этих стенок ($x = \pm l$).

На фиг. 3, а представлены профили скорости проводящей жидкости в канале (сечение $x = 0.8 l$) для различных значений числа Гартмана M . С увеличением M имеет место характерное уплощение профиля скорости по сечению канала.

На фиг. 3, б построены профили скорости жидкости в центральном сечении канала ($x = 0$) для трех каналов, имеющих различное отношение сторон прямоугольного сечения.

МВТУ им. Н. Э. Баумана

Поступило 16 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г. Турбулентные магнитогидродинамические течения в трубах. Рига, «Зинатне», 1967.
2. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Расчет магнитогидродинамических течений в каналах МГД-устройств. В сб. «Магнитогидродинамический метод получения электроэнергии», М., «Энергия», 1968.
3. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
5. Shercliff J. A. The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields. *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, No 6, p. 644.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
7. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 1953, vol. 49, No 1, p. 136.
8. Березин О. А. Об установившемся движении электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля. ПМТФ, 1963, № 3, стр. 155.
9. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю. ПММ, 1961, т. 25, № 6, стр. 1024.
10. Гринберг Г. А. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, стр. 80.