РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С ЭЛЕКТРОДАМИ

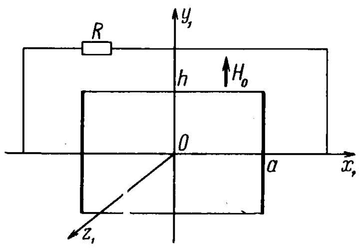
А. Е. ЯКУБЕНКО

(Москва)

Дается численное решение задачи о течении электропроводящей жидкости в канале прямоугольного сечения, стенки которого в направлении, перпендикулярном приложенному магнитному полю, непроводящие, а в направлении, параллельном ему,— идеальные проводники. Предполагается, что все величины, кроме давления, не зависят от координаты вдоль оси канала, приложенное магнитное поле однородно, а индуцированный ток снимается во внешнюю цепь.

Получены зависимости полного тока во внешней цепи и разности потенциалов на проводящих стенках от величины внешней нагрузки, от числа Гартмана и от отношения длин сторон канала. Отметим, что такая задача уже рассматривалась многими авторами с применением всевозможных приближенных способов. Наиболее полную библиографию по этому вопросу можно найти в работе [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение вязкой, несжимаемой, электропроводящей жидкости в канале постоянного прямоугольного сечения. На фиг. 1 приведено сечение этого канала плоскостью, перпендикулярной образующей. Стенки канала, параллельные оси y_*, будем предполагать идеально проводящими, а стенки, параллельные оси x_*,— изоляторами. Пусть H_0 — напряженность приложенного вдоль оси y_* магнитного поля, а u_z — единственная отличная от нуля составляющая скорости. Из условия несжимаемости жидкости получаем, что скорость является функцией только координат x_* и y_*, а из уравнения индукции для магнитного поля — что индуцированное магнитное поле имеет только составляющую вдоль оси z_*, также зависящую только от координат x_* и y_*.



Фиг. 1

При сделанных предположениях для определения величин u_z и H_z будем иметь систему уравнений [2]

$$\mu\Delta u_z + \frac{H_0}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial y_*} = \frac{\partial p}{\partial z_*} = -P \qquad (1.1)$$

$$\frac{c}{4\pi\sigma}\Delta H_z + H_0\frac{\partial u_z}{\partial y_*} = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь σ и μ — электропроводность и вязкость жидкости, которые будем предполагать постоянными, P — заданный постоянный градиент давления вдоль оси канала, звездочкой отмечены размерные переменные.

Систему уравнений (1.1), (1.2) будем решать при следующих краевых условиях:

$$u_z = 0, \quad H_z = \mp H_{zw} \quad \text{при } y_* = \pm h \qquad (1.3)$$

$$u_z = 0, \quad \partial H_z / \partial x_* = 0 \quad \text{при } x_* = \pm a \qquad (1.4)$$

Здесь $2a$ и $2h$ — ширина и высота канала соответственно, а $H_{zw} = \mathrm{const}$ — значение магнитного поля на непроводящей стенке канала, которое должно быть связано с величиной полного тока, протекающего в канале. Условие (1.4) для магнитного поля получено в предположении идеальной проводимости стенок $x_* = \pm a$.

Для определения величины H_{zw} необходимо воспользоваться законом Ома в жидкости и во внешней цепи

$$j_x = \sigma\left(-\frac{\partial\varphi_*}{\partial x_*} - \frac{H_0}{c}u_z\right) = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial y_*} \tag{1.5}$$

$$2\varphi_{*e} = I_* R, \qquad I_* = -\int\limits_{-h}^{h} j_x\, dy_* \tag{1.6}$$

Здесь φ_* — потенциал электрического поля, $\pm\varphi_{*e} = \mathrm{const}$ — потенциалы проводящих стенок, I_* — полный ток во внешней цепи, R — сопротивление внешней цепи.

Из уравнений (1.5) и (1.6) следует, что

$$H_{zw} = \frac{2\pi}{c} I_* \tag{1.7}$$

Перейдем в уравнениях (1.1)—(1.7) к безразмерным переменным по формулам

$$x = \frac{x_*}{a}, \quad y = \frac{y_*}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{a}, \quad M = \frac{H_0}{c}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2} h$$

$$w = \frac{\mu u_z}{Ph^2}, \quad B = \frac{cH_z}{4\pi Ph^2}\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^{1/2}, \quad j = \frac{H_0}{cP} j_x$$

$$\varphi = \frac{\sigma H_0 \varphi_*}{cPa}, \quad r = \lambda\sigma R, \quad I = -\int\limits_{-1}^{1} j\, dy$$

После преобразований получим

$$\lambda^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + M\frac{\partial B}{\partial y} = -1, \quad \lambda^2\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + M\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{1.8}$$

$$j = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - M^2 w = M\frac{\partial B}{\partial y}, \quad 2\varphi_e = Ir, \quad B_w = \frac{I}{2M} \tag{1.9}$$

$$w = 0, \quad B = \mp B_w \quad \text{при } y = \pm 1; \qquad w = 0, \quad \partial B / \partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm 1 \tag{1.10}$$

Задача о течении в канале, описываемая уравнениями (1.8) и граничными условиями (1.10), обладает следующей симметрией:

$$w(x, y) = w(x, -y), \quad w(x, y) = w(-x, y), \quad B(x, y) = -B(x, -y),$$
$$B(x, y) = B(-x, y)$$

Поэтому можно рассматривать течение только в четверти канала, выставив следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = 0, && B = -B_w && \text{при } y = 1,\ x > 0 \\ &\partial w / \partial y = 0, && B = 0 && \text{при } y = 0,\ x > 0 \\ &\partial w / \partial x = 0, && \partial B / \partial x = 0 && \text{при } x = 0,\ y > 0 \\ &w = 0, && \partial B / \partial x = 0 && \text{при } x = 1,\ y > 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Решение системы уравнений (1.8) ищем в виде

$$w = (1 - MB_w)u, \qquad B = (1 - MB_w)H - B_w y \tag{1.12}$$

Система уравнений для определения u и H будет в точности совпадать с системой (1.8), а граничные условия (1.11) перейдут при этом в следующие:

$$\begin{aligned} &u = 0, && H = 0 && \text{при } y = 1,\ x > 0 \\ &\partial u / \partial y = 0, && H = 0, && \text{при } y = 0,\ x > 0 \\ &\partial u / \partial x = 0, && \partial H / \partial x = 0 && \text{при } x = 0,\ y > 0 \\ &u = 0, && \partial H / \partial x = 0 && \text{при } x = 1,\ y > 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

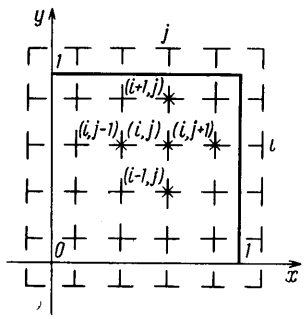
Уравнения для определения функций u и H, а также граничные условия (1.13) не зависят теперь от величины B_w, поэтому решение этих уравнений будет определяться только двумя параметрами: числом Гартмана M и отношением длин сторон канала λ.

Для определения величины напряженности магнитного поля на стенке $y = 1$, полного тока I во внешней цепи и разности потенциалов на проводящих стенках воспользуемся уравнениями (1.9), (1.10). Пусть

$$Q(\lambda, M) = \int_0^1 \int_0^1 u\, dx\, dy \tag{1.14}$$

есть расход жидкости через четверть сечения канала. Тогда из уравнения (1.9) после интегрирования по сечению канала имеем

$$I = -2\varphi_e + 2M^2(1 - MB_w)Q \tag{1.15}$$



Фиг. 2

Уравнения (1.15) и (1.9) можно разрешить относительно I, $2\varphi_e$ и B_w. Решение имеет вид

$$I = \frac{2QM^2}{1 + r + QM^2}, \quad 2\varphi_e = \frac{2QM^2 r}{1 + r + QM^2}, \quad B_w = \frac{QM}{1 + r + QM^2} \tag{1.16}$$

Часто вместо сопротивления r вводят параметр нагрузки k по формуле

$$k = \frac{r}{1 + r + QM^2}$$

При этом если внешняя нагрузка r меняется от нуля при коротком замыкании до бесконечности при разомкнутой цепи, то параметр нагрузки меняется в диапазоне $0 \leqslant k \leqslant 1$.

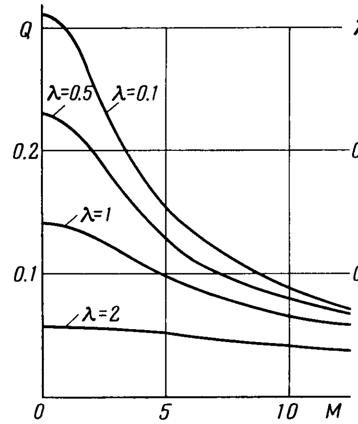
Заменяя r через параметр нагрузки, формулы (1.16) можно переписать в виде

$$I = \frac{2M^2Q(1 - k)}{1 + M^2Q}, \quad 2\varphi_e = 2M^2Qk, \quad B_w = \frac{MQ(1 - k)}{1 + M^2Q} \tag{1.17}$$

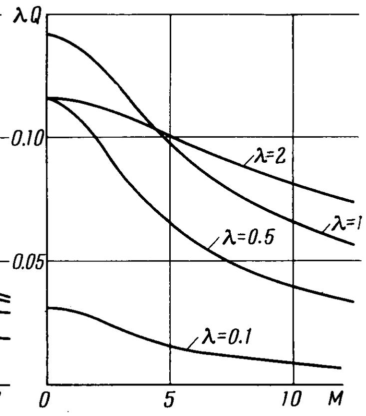
Для определения w и B будем иметь

$$w = \frac{1 + M^2Qk}{1 + M^2Q}u, \qquad B = \frac{1 + M^2Qk}{1 + M^2Q}H - \frac{MQ(1 - k)}{1 + M^2Q}y \tag{1.18}$$

Таким образом, для того чтобы определить распределение скорости и магнитного поля по сечению канала, а также интегральные характеристики I, $2\varphi_e$ и B_w при произвольной нагрузке k, надо решить задачу (1.8) с граничными условиями (1.11), в формулировку которой не входит величина B_w. После решения этой задачи можно вычислить расход Q как функцию величин λ и M. Решение задачи при произвольной нагрузке k получится затем простым пересчетом по формулам (1.17) и (1.18).

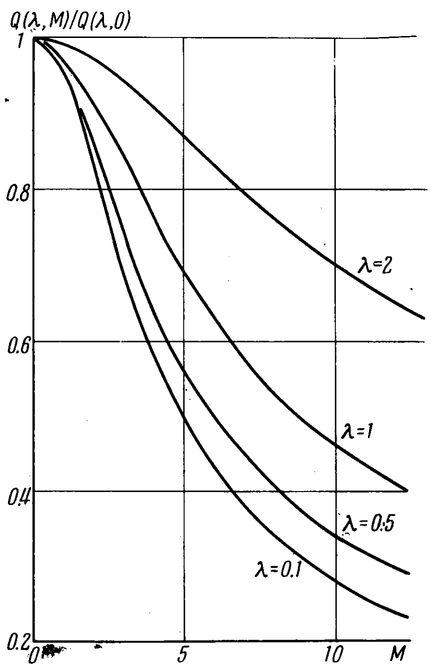


Фиг. 3



Фиг. 4

2. Численный расчет течения в канале. Задача об определении функций u и H с граничными условиями (1.13) решалась численно методом сеток. На область течения накладывается сетка с шагом d, как это показано на фиг. 2. В каждой точке (i, j) этой сетки дифференциальные уравнения в частных производных записываются в конечных разностях



Фиг. 5

$$u_{ij} = \frac{2}{1+\lambda^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + \lambda^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 0.5Md(H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) + d^2]$$

$$H_{ij} = \frac{2}{1+\lambda^2}[H_{i+1,j} + H_{i-1,j} + \lambda^2(H_{i,j+1} + H_{i,j-1}) + 0.5Md(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})] \quad (2.1)$$

$$1 \leqslant i \leqslant n, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad d = 1/n$$

Граничные условия при этом запишутся в виде

$$u_{i0} = u_{i1}, \quad u_{n+1j} = -u_{nj}$$
$$u_{in+1} = -u_{in}, \quad u_{0j} = u_{1j}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n \qquad (2.2)$$
$$H_{i0} = -H_{i1}, \quad H_{n+1j} = -H_{nj}$$
$$H_{in+1} = H_{in}, \quad H_{0j} = -H_{1j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

Полученная алгебраическая система линейных уравнений (2.1), (2.2) решалась методом итераций с использованием ЭВМ. Решение для всех значений λ начиналось со случая $M = 0$. При этом в качестве начального приближения брались следующие функции:

$$u_{ij}=\frac{0.625}{1+\lambda^2}(1-y_i^2)(1-x_j^2), \qquad H_{ij}=0$$

$$y_i=(i-0.5)d, \quad x_j=(j-0.5)d \quad (1\leqslant i\leqslant n, \quad 1\leqslant j\leqslant n) \tag{2.3}$$

В случае отличных от нуля значений M в качестве начального приближения бралось решение, полученное при меньшем M. Так, для первого отличного от нуля значения числа M_1 в качестве нулевого приближения бралось решение, соответствующее $M=0$, для $M_2>M_1$ в качестве начального приближения бралось решение с M_1 и т. д. Расчеты проводились для четырех значений величины λ ($\lambda=0.1$, 0.5, 1, 2). При этом в первом случае шаг сетки равнялся $d=0.05$ ($n=20$); в остальных трех случаях $d=0.1$ ($n=10$). Для каждого λ принимались следующие значения числа Гартмана: $M=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14. По найденным из системы (2.1), (2.2) профилям скорости вычислялся расход жидкости через четверть сечения канала по формуле

$$Q=d^2\sum_{i,\,j=1}^{n}u_{ij}$$

На фиг. 3—5 приведены зависимости Q, λQ и $Q(\lambda, M)\,/\,Q(\lambda, 0)$ от числа Гартмана при различных значениях λ. Из графиков видно, что с ростом числа Гартмана расход жидкости в канале падает. В пределе, когда число Гартмана стремится к бесконечности, расход жидкости стремится к нулю. Используя найденное значение Q, можно по формулам (1.17) рассчитать электрические характеристики I и $2\varphi_e$ при различных внешних нагрузках.

Институт механики МГУ
Поступило 6 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Приближенное решение задачи о течении проводящей жидкости в канале прямоугольного сечения. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.