

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

С. А. РЕГИРЕР

(Москва)

Построено приближенное аналитическое решение задачи о развитом стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости с конечной изотропной проводимостью в канале прямоугольного сечения при наличии внешнего магнитного поля, перпендикулярного непроводящим стенкам. Установлен порядок близости потоков в каналах с двумя электродами, параллельными полю, и с четырьмя непроводящими стенками. Дан обзор теоретических и экспериментальных работ, посвященных рассматриваемой задаче.

Задача о стационарном развитом течении вязкой несжимаемой жидкости с изотропной проводимостью в канале прямоугольного сечения неоднократно рассматривалась в литературе (см., например, обзоры [1, 2]). При постоянном внешнем поперечном магнитном поле точное решение задачи удается получить в виде рядов для двух типов устройства стенок: а) когда стенки, параллельные внешнему полю, идеальные изоляторы, а две другие — проводники с любой проводимостью; б) когда стенки, перпендикулярные внешнему полю, идеальные проводники, а две другие имеют произвольную проводимость. Для каналов с четырьмя непроводящими и с четырьмя идеально проводящими стенками можно получить также решения при любой ориентации внешнего поля.

Наибольшую трудность представляет общая задача с учетом конечной проводимости всех четырех стенок; ее наиболее важный для практики частный случай, когда стенки, параллельные внешнему полю — идеальные проводники (электроды), соединенные внешней электрической цепью.

Каналы с параллельными полю электродами изучались первоначально в связи с разработкой кондукционных расходомеров (см. [3]).

Было установлено, что путем интегрирования закона Ома для жидкости, используя уравнения внешней электрической цепи, можно получить конечные соотношения, связывающие разность потенциалов на электродах и ток во внешней цепи с расходом жидкости (см. [3-5]; частный случай этих соотношений приведен также в [6]). Вид соотношений не зависит ни от деформации профиля скорости потока лоренцовыми силами, ни от индуцированного магнитного поля.

Если можно указанной деформацией профиля пренебречь или считать профиль известным, то распределения электрического поля и тока в сечении канала нетрудно получить из решения краевой задачи для уравнения Пуассона [6].

Одновременный расчет гидродинамических и электромагнитных величин в рассматриваемой задаче удавалось выполнить только в двух предельных случаях, когда сечение канала представляло собой бесконечную щель между плоскими стенками, перпендикулярными или параллельными внешнему полю. Первый предельный случай соответствует обобщенному гартмановскому течению с ненулевым полным током (см. [1, 2]), второй — пуазейлевскому течению с измененным градиентом давления [6].

Первые приближенные результаты для канала конечного сечения с электродами были получены в мало известной, к сожалению, статье [7], где использовался метод наименьших квадратов. Впоследствии и другие авторы применяли для этой задачи прямые методы — вариационный метод [4] и метод Л. В. Канторовича [8].

Попытки построить решение в виде тригонометрического ряда свелись к тому, что для коэффициентов ряда получалась бесконечная алгебраическая система. Ее решение сводилось, в свою очередь, к интегральному уравнению первого рода [9]. В конечном итоге коэффициенты ряда удавалось найти только при больших числах Гартмана. Сравнительно недавно в обзоре [2] было указано, что процедуру разложения в ряды с последующим численным определением коэффициентов осуществил Карли<sup>1</sup>. Результаты этой работы так и не были опубликованы, за исключением одного графика для средней скорости, приведенного в [2]. Более обстоятельные вычисления при помощи ЭВМ содержатся в статье [10], помещенной в этом выпуске журнала.

<sup>1</sup> Curlee N. J. Magnetohydrodynamic channel flow. Doct. diss., Univ. of Pittsburgh, USA, 1961.

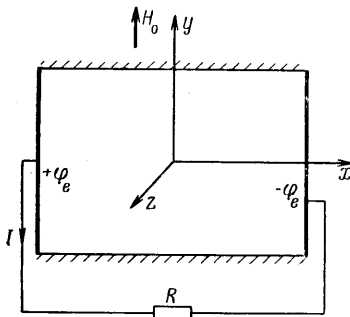
В статьях [14–18] задача в общем случае была приведена к интегральному уравнению первого рода (с ядром типа функции Грина) относительно нормальной производной скорости на непроводящей стенке. Это уравнение удавалось упростить и решить для больших чисел Гартмана. Аналогичные интегральные уравнения непосредственно для случая больших чисел Гартмана были получены также в работах [14, 15, 23] из рассмотрения вторичных пограничных слоев на стенках, параллельных внешнему магнитному полю. Указанные интегральные уравнения были также предметом специального математического исследования [16, 17].

Особое место занимает статья [18], где было получено приближенное решение в виде ряда, исходя из упрощенных уравнений, в которых электрическое поле в канале принималось постоянным. Однако обоснование этого приближения не было дано.

Наиболее простое и совершенное решение задачи построено в статье [19] конечно-разностным методом с использованием ЭВМ.

Течение в канале с электродами исследовалось многими авторами экспериментально, причем измерялись не только интегральные характеристики канала, но и распределение скорости по сечению (см., например, [20–21]).

Исследование асимптотического поведения решений при больших числах Гартмана, численные расчеты и эксперименты указывают на малое различие между течениями в канале с четырьмя непроводящими стенками и в канале с двумя электродами и двумя непроводящими стенками (при разомкнутой внешней электрической цепи).



Фиг. 1

**1. О постановке задачи и основных уравнениях.** Повторим кратко постановку задачи, уже изложенную в предшествующих статьях этого выпуска журнала [10, 19] <sup>1</sup>.

Рассматривается полностью развитое ( $\partial v / \partial x = 0$ ,  $\partial H / \partial x = 0$ ,  $v = e_z u_z(x, y)$ ), стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с изотропной проводимостью в канале с сечением  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq h$  при наличии внешнего магнитного поля  $\mathbf{H} = e_y H_0 = \text{const}$  (фиг. 1). Стенки  $x = \pm a$

идеально проводящие и соединены электрической цепью, содержащей сопротивление  $R$ ; две другие стенки — идеальные изоляторы.

Воспользуемся уравнением импульсов, обобщенным законом Ома и уравнением сохранения заряда, которые для данной задачи принимают вид

$$\mu \Delta u_z - \frac{\sigma H_0^2}{c^2} u_z - \frac{\sigma H_0}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x} = -P \quad \left( P \equiv -\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} \right) \quad (1.1)$$

$$\Delta \phi = -\frac{H_0}{c} \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$j_x = -\sigma \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{u_z H_0}{c} \right), \quad j_y = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.3)$$

Граничные условия для  $u_z$  и  $\phi$

$$u_z = 0, \quad \partial \phi / \partial y = 0 \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.4)$$

$$u_z = 0, \quad \phi = \mp \phi_e \quad \text{при } x = \pm a \quad (1.5)$$

<sup>1</sup> Здесь и далее сохранены обозначения статьи [19] с той разницей, что при размерных величинах опущен нижний индекс (звездочка).

Значения потенциала на электродах определяются из соотношения

$$2\varphi_e = RI = -R \int_{-h}^h j_x dy \quad (1.6)$$

Если проинтегрировать по сечению первое равенство (1.3), получив таким образом еще одно соотношение между  $\varphi_e$  и  $I$ , то будем иметь для  $\varphi_e$ ,  $I$  следующие конечные формулы:

$$2\varphi_e = \frac{UH_0 a}{c} \frac{2\sigma R\lambda}{1 + \sigma R\lambda}, \quad I = \frac{UH_0 a}{c} \frac{2\sigma\lambda}{1 + \sigma R\lambda} \quad \left(\lambda = \frac{h}{a}\right) \quad (1.7)$$

Здесь  $U$  — средняя по сечению скорость жидкости.

Пусть  $R_1, R_2$  — два различных значения сопротивления внешней цепи, а  $u_{(1)}, u_{(2)}, \varphi_{(1)}, \varphi_{(2)}, \dots$  — соответствующие им параметры потока при одном и том же градиенте давления  $P$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что справедливы следующие соотношения:

$$\varphi_{(2)} = \left(1 - \frac{\sigma H_0 \theta}{cP}\right) \varphi_{(1)} + \theta x, \quad u_{(2)} = \left(1 - \frac{\sigma H_0 \theta}{cP}\right) u_{(1)} \quad (1.8)$$

$$\theta = \frac{U_{(1)} H_0}{c} \frac{K_2 - K_1}{(K_2 - K_1) M^2 Q_{(1)} - 1} \quad (1.9)$$

$$\left(K_i = \frac{\sigma R_i \lambda}{1 + \sigma R_i \lambda}, \quad i = 1, 2; \quad M^2 = \frac{\sigma H_0^2 h^2}{c^2 \mu}, \quad Q_{(1)} = \frac{U_{(1)} \mu}{Ph^2}\right)$$

Таким образом, зная параметры потока при  $R = R_1$ , можно по этим пересчетным формулам найти все параметры при  $R = R_2$ . Отсюда следует, что поставленную краевую задачу достаточно решить для случая разомкнутой цепи ( $R \rightarrow \infty, I \rightarrow 0$ ). Формулы (1.8), (1.9) тогда служат для пересчета на случай любых  $R$ , причем

$$\theta(R) = \frac{U_{(1)} H_0}{c} \frac{1}{1 + \sigma R\lambda + M^2 Q_{(1)}} \quad (1.10)$$

Легко убедиться, что записанные выше уравнения, граничные условия и формулы для пересчета полностью эквивалентны соответствующим соотношениям статьи [19].

Заметим, наконец, что постановка задачи о течении в канале с четырьмя непроводящими стенками отличается от изложенной тем, что вместо граничного условия (1.5) полагается

$$u_z = 0, \quad \partial\varphi/\partial x = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (1.11)$$

Ниже рассмотрение задач с условиями (1.5) и (1.11) будет вестись параллельно.

**2. Приближенное аналитическое решение.** Известные точные решения задач о МГД-течении в канале прямоугольного сечения при постоянном поперечном поле обладают легко проверяемым свойством: при  $a \rightarrow \infty, h = \text{const}, x = \text{const}, y = \text{const}$  они переходят в решения задачи Гартмана с соответствующими условиями замыкания токов. Это наводит на мысль строить приближенные решения задач для каналов с малым  $\lambda = h/a$  в виде некоторых разложений по этому параметру или, по крайней мере, искать упрощения задачи, возможные при малых  $\lambda$ .

Заметим, что в силу симметрии электрического потенциала и условия (1.4) можно представить  $\varphi$  в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \frac{\pi ky}{h} \quad (2.1)$$

Подставив это разложение в уравнение (1.2) и дважды интегрируя, найдем

$$\varphi_0(x) = -\frac{H_0}{c} \int_0^x \langle u_z \rangle dx + Cx \quad \left( \langle u_z \rangle = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_z dy \right)$$

Функции  $\varphi_k$ , в свою очередь, представим разложениями

$$\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} \psi_n \left( \frac{x}{a} \right) \quad (2.2)$$

$$\psi_n = \sin \frac{r_n x}{a}, \quad r_n = \begin{cases} \pi n & \text{— для электродов } x = \pm a \\ \pi(n - 1/2) & \text{— для изоляторов } x = \pm a \end{cases}$$

Требую выполнения граничных условий (1.5) и (1.11) в (2.1), получаем

$$C = \frac{\Phi_s}{a} + \frac{UH_0}{c} \quad \text{для электродов } x = \pm a; \quad (2.3)$$

$$C = 0 \quad \text{для изоляторов } x = \pm a$$

Физический смысл постоянной  $C$  очевиден

$$C = -\frac{1}{4ah\sigma} \int_{-h}^h \int_{-a}^a j_x dx dy = \frac{I}{2h\sigma}$$

Принимая во внимание соображения п. 1, положим далее, не теряя общности,  $C = 0$ .

Коэффициенты  $\varphi_{kn}$  получаются из уравнения (1.2) при умножении на  $\sin(r_n x/a) \cos(\pi ky/h)$  и интегрировании по сечению

$$\varphi_{kn} = \frac{H_0}{ahc\mu_{kn}^2} \int_{-h}^h \int_{-a}^a \frac{\partial u_z}{\partial x} \sin \frac{r_n x}{a} \cos \frac{\pi ky}{h} dx dy, \quad \left( \mu_{kn}^2 = \frac{r_n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 k^2}{h^2} \right) \quad (2.4)$$

Выполняя здесь одно интегрирование по частям и подставляя затем результат в (2.1), (2.2), получаем явное представление  $\varphi$  через некоторый функционал от  $u_z$ ; после этого уже легко записать  $x$ -компоненту электрического поля

$$E_x = \frac{H_0}{c} \langle u_z \rangle + E_\lambda \quad (2.5)$$

$$E_\lambda = \frac{H_0}{a^3 hc} \times$$

$$\times \int_{-h}^h \int_{-a}^a u_z(x', y') \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{\mu_{kn}^2} \cos \frac{r_n x'}{a} \cos \frac{r_n x}{a} \cos \frac{\pi ky'}{h} \cos \frac{\pi ky}{h} dx' dy'$$

Из теории рядов Фурье следует, что для непрерывной функции  $u_z(x, y)$ , обращаемой в нуль на границах прямоугольника  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq h$ ,

имеющей вплоть до границ ограниченные производные и четной по обоим аргументам, имеют место оценки

$$\frac{1}{ah} \int_{-h}^h \int_{-a}^a u_z(x, y) \cos \frac{r_n x}{a} \cos \frac{\pi k y}{h} dx dy \sim \frac{u^*}{\pi^2 k^2 r_n^2} \quad \text{при } r_n = \pi n$$

где  $u^*$  — максимальное изменение  $u_z$  внутри прямоугольника. Поэтому ряд в подынтегральном выражении в (2.5) сходится, причем

$$|E_\lambda| < \frac{H_0 u^*}{\pi^3 c} \lambda \quad (2.6)$$

Когда  $r_n = \pi(n - 1/2)$ , вместо этой оценки можно получить более тонкую, имеющую вид  $|E_\lambda| < H_0 u^* \lambda^2 \zeta / c$ ,  $\zeta \ll 1$ , как и в работе [22].

Теперь уравнение движения (1.1) принимает вид

$$\mu \Delta u_z - \frac{\sigma H_0^2}{c^2} [u_z - \langle u_z \rangle - \lambda UL(u_z)] = -P \quad (2.7)$$

$$L(u_z) = \frac{1}{U a^3 h} \int_{-h}^h \int_{-a}^a u_z(x', y') \times \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^2}{\mu h n^2} \cos \frac{r_n x'}{a} \cos \frac{r_n x}{a} \cos \frac{\pi k y'}{h} \cos \frac{\pi k y}{h} dx' dy'$$

причем  $|L(u_z)| \ll \pi^{-3}$  согласно (2.6). Будем далее пренебрегать третьим слагаемым в квадратных скобках в (2.7) по сравнению со вторым, имея в виду рассмотрение каналов с  $\lambda \ll 1$ .

Перейдем к безразмерным переменным, полагая, как и в [19]

$$u^\circ = \frac{u_z \mu}{P h^2}, \quad \varphi^\circ = \frac{\sigma H_0 \varphi}{P c a}, \quad x^\circ = \frac{x}{a}, \quad y^\circ = \frac{y}{h}, \quad M^2 = \frac{\sigma H_0^2 h^2}{c^2 \mu}$$

Краевая задача для функции  $u^\circ$  с учетом сделанного упрощения имеет тогда вид (градус опущен) (2.8)

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - M^2 (u - \langle u \rangle) = -1, \quad u(\pm 1, y) = u(x, \pm 1) = 0$$

Решение ищем в форме разложения

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(y) \cos s_m x, \quad s_m = \frac{\pi(2m-1)}{2} \quad (2.9)$$

где  $u_m$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 u_m}{dy^2} - \lambda_m^2 u_m + M^2 \langle u_m \rangle = \frac{2}{s_m} (-1)^m \quad (\lambda_m^2 = M^2 + \lambda^2 s_m^2) \quad (2.10)$$

и условиям  $u_m(\pm 1) = 0$ . После несложных вычислений получим

$$u = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \lambda_m}{s_m \operatorname{ch} \lambda_m} \frac{\operatorname{ch} \lambda_m - \operatorname{ch} \lambda_m y}{[\lambda_m^3 - M^2(\lambda_m - \operatorname{th} \lambda_m)]} \cos s_m x \quad (2.11)$$

Определим, как и в работе [19], безразмерный коэффициент расхода как интеграл от  $u$  по четверти сечения канала; тогда

$$Q(\lambda, M) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m - \text{th } \lambda_m}{s_m^2 [\lambda_m^3 - M^2 (\lambda_m - \text{th } \lambda_m)]} \quad (2.12)$$

При  $M \geq 1$  имеем (2.13)

$$Q(\lambda, M) \approx 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_m^{-1}}{s_m^2 (s_m^2 \lambda^2 + M^2 \lambda_m^{-1})} \approx \frac{1}{M} \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{M}}{\lambda} \right)^{-1} \text{th } \frac{\sqrt{M}}{\lambda} \right]$$

Эта оценка нестрогая, но дает правильный порядок величин. В предельном случае плоской щели ( $\lambda \rightarrow 0$ ) для всех  $M$

$$Q(0, M) = \frac{M - \text{th } M}{M^2 \text{th } M} \quad (2.14)$$

Формула (2.14) совпадает с выражением для коэффициента расхода в гартмановском течении с нулевым полным током.

**3. Обсуждение результатов.** Приближенное решение задачи, близкое к только что изложенному, было получено в работе [18]. Однако уравнение для скорости, использованное в ней, содержало в отличие от (2.8) среднюю скорость  $U$  вместо  $\langle u \rangle$ . Такое упрощение было бы допустимо, если

$$\left| \frac{\langle u \rangle - U}{U} \right| \ll 1$$

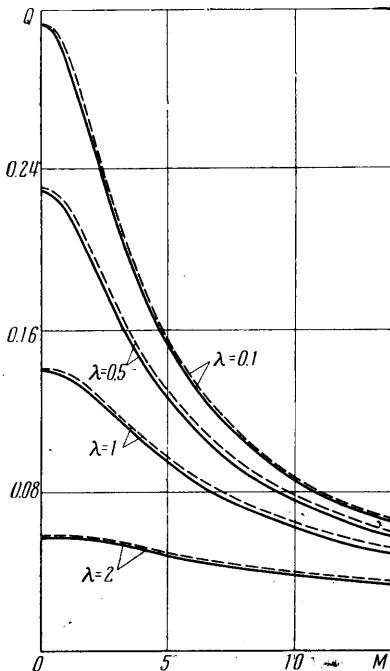
Однако это неравенство несправедливо при  $x$ , близких к  $\pm 1$ . Можно ожидать поэтому, что решение [18] даст погрешность, связанную с неправильным учетом пограничных слоев на стенках  $x = \pm 1$ . Нетрудно установить, что теория работы [18] предсказывает появление гартмановских (толщиной  $\sim 1/M$ ) пограничных слоев на всех четырех стенках, что неверно.

Решение (2.11) описывает одновременно течение в канале с электродами и в канале с четырьмя непроводящими стенками. Погрешность этого решения (в первом случае) определяется величиной порядка  $\lambda/\pi^3$ , которая была отброшена в точном уравнении (2.7).

Приближение, построенное выше, не является равномерным и, в случае  $\lambda \ll 1$ , не может рассматриваться как регулярное разложение по степеням  $\lambda$ . Однако его можно использовать как начальное

приближение в методе итераций. Преимуществом полученного решения является быстрая сходимость рядов (2.11), (2.12) для всех  $\lambda \lesssim 1$ ,  $M \geq 0$ .

Заметим, что неразличимость, в указанном выше смысле, течений в канале с электродами (при разомкнутой цепи) и в канале с непроводящими стенками соответствует данным экспериментальных исследований [20, 21] и обнаруживается также при численных расчетах.



Фиг. 2

Для сравнения на фиг. 2 приведены зависимости  $Q(\lambda, M)$ , полученные по формуле (2.12) и из расчета конечно-разностным методом на ЭВМ (по [19]); они изображены сплошными и штриховыми линиями соответственно. Очевидно, что расхождения между результатами весьма невелики и даже при  $\lambda \geq 1$  в рассмотренном диапазоне чисел Гартмана не превышают нескольких процентов. Причина такого удачного совпадения состоит в том, что согласно (2.5), (2.6)

$$E_x = \frac{H_0 \langle u_z \rangle}{c} \left[ 1 + O\left(\frac{\lambda}{\pi^2}\right) \right]$$

и малость второго слагаемого обеспечивается здесь при не малых  $\lambda$ .

Полученное приближенное решение можно сопоставить также с асимптотическими формулами при  $M \gg 1$ . Известно, что для каналов с двумя электродами и с четырьмя непроводящими стенками эти формулы имеют вид (см., например, [14])

$$Q(\lambda, M) \sim \frac{1}{M} \left( 1 - \frac{0.956\lambda}{\sqrt{M}} \right) \quad (\text{электроды } x = \pm a)$$

$$Q(\lambda, M) \sim \frac{1}{M} \left( 1 - \frac{0.851\lambda}{\sqrt{M}} \right) \quad (\text{изоляторы } x = \pm a)$$

Ранее полученная оценка (2.13) совпадает с этими формулами по структуре и по порядку величины коэффициента при  $\lambda/\sqrt{M}$ . Для  $M \geq 15$  нет существенных различий между ними и результатами вычислений по формуле (2.12).

Институт механики МГУ

Поступило 6 IV 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. М., ВИНТИ, 1966.
2. Gold R. R. Magneto-hydrodynamic channel flow. Progr. Aeronaut. Sci., Oxford a. o., Perg. Press, 1967, vol. 8, pp. 353—431.
3. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
4. Tani I. Steady flow of conducting fluids in channels under transverse magnetic fields, with consideration of Hall effect. J. Aero/Space Sci., 1962, vol. 29, No. 3, pp. 297—305.
5. Регирер С. А. О влиянии пограничного слоя на распределение тока при течении проводящей жидкости по каналу. В кн. «Вопросы магнитной гидродинамики», т. 3. Рига, Изд-во АН ЛатвССР, 1963, стр. 81—88.
6. Resler E. L., Sears W. R. The prospects for magneto-aerodynamics. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 4, pp. 235—245. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 6, стр. 3—22.)
7. Бирзвалк Ю., Везе А. Распределение скорости в каналах электромагнитных насосов с прямоугольным сечением. Изв. АН ЛатвССР, 1959, № 10, стр. 85—89.
8. Сыч В. М. МГД-течение вязкой проводящей жидкости в каналах с учетом конечной проводимости стенок. Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, стр. 85—92.
9. Березин О. А. Об установившемся движении электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля. ПМТФ, 1963, № 3, стр. 155—159.
10. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Стационарное течение проводящей жидкости в канале прямоугольного сечения с двумя непроводящими стенками и двумя стенками с произвольной проводимостью, параллельными внешнему магнитному полю. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
11. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости по находящейся во внешнем магнитном поле прямоугольной трубе с двумя проводящими и двумя непроводящими стенками. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 2, стр. 330—333.

12. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости в прямоугольной трубе с двумя непроводящими стенками и двумя проводящими, параллельными внешнему магнитному полю, ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, стр. 1024—1034.
13. Гринберг Г. А. О некоторых случаях течения проводящей жидкости по трубам прямоугольного сечения, находящимся в магнитном поле. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1, стр. 80—87.
14. Hunt J. C. R., Stewartson K. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, II. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 3, pp. 563—581.
15. Chiang D., Lundgren T. Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct with perfectly conducting electrodes. Z. angew. Math. Phys., 1967, Bd. 18, Fasc. 1, S. 92—106.
16. Lundgren T., Chiang D. Solution of a class of singular integral equations. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 24, No. 3, pp. 303—313.
17. Головач Г. П. Розв'язок одного інтегрального рівняння магнітної гідродинаміки. Доп. АН УРСР, 1968, Сер. А, № 7, стр. 583—586.
18. Рябинин А. Г., Хожайнов А. И. Установившееся ламинарное течение электропроводящей жидкости в прямоугольной трубе под действием пондеромоторных сил. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 1, стр. 15—21.
19. Якубенко А. Е. Расчет течения электропроводящей жидкости в канале прямоугольного сечения с электродами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
20. Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. М. Экспериментальное исследование распределения скоростей при течении проводящей жидкости в трубах прямоугольного сечения, находящихся в поперечном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, стр. 79—83.
21. Jaumotte A. L., Hirsch C., Strul S. Ecoulement magnétohydrodynamique en conduite de section carrée en presence d'un champ magnétique transversal. Gas où les parois parallèles au champ magnétique sont conductrices. Note No. 2. Bull. cl. sci. Acad. Roy. Belg., 1969, vol. 55, No. 7, pp. 643—655.
22. Регирер С. А. О двумерном приближении в теории магнитогидродинамических течений. В кн. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969, стр. 417—426.
23. Fahidy T. Z. On magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts: an extension of the Hunt — Stewartson approach. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, No. 2, pp. 245—248.