

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ НА ЭЛЕКТРОДАХ В ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЕ С РАЗНЫМИ ТЕМПЕРАТУРАМИ КОМПОНЕНТ

В. В. ГОГОСОВ, В. М. КОРОВИН

(Москва)

Задаче о пограничных слоях в магнитной гидродинамике в настоящее время посвящено довольно большое число работ. Одной из первых была, по-видимому, работа [1], в которой проводящая среда предполагалась несжимаемой, а электромагнитные силы — заданными. Постановка задачи о пограничном слое в магнитной гидродинамике рассматривалась в работе [2]. В работе [3] проводился расчет пограничного слоя на плоских электродах ускорителя с учетом конвективного переноса тепла током. Однако в этой работе исследовался лишь класс автомодельных решений, которые возможны при специальном задании определяющих параметров. Решение задачи о пограничных слоях в частично ионизованной однотемпературной плазме без предположения локальной автомодельности дано в работах [4—6]. Оценка продольной составляющей электрического поля в пограничном слое проводилась в работе [7]. Во всех перечисленных выше работах предполагалось, что температуры компонент одинаковы.

Следует заметить, что температуры компонент плазмы, в которой либо протекает электрический ток, либо работают механизмы вязкости или теплопроводности, вообще говоря, различны. В последние годы возник особый интерес к изучению такой плазмы с разными температурами компонент. Описание явлений, протекающих в разнотемпературной плазме, существенно сложнее, чем в однотемпературной плазме: добавляются новые уравнения для каждой из температур компонент и, следовательно, требуются граничные условия для температур; коэффициенты переноса зависят от температур компонент и т. д. Кроме того, возникают явления, которые обусловлены разностью температур компонент и в однотемпературной плазме отсутствуют: обмен энергией между компонентами и связанная с ним диссипация, новые типы неустойчивости и т. д. Одним из наиболее сложных и интересных вопросов при изучении такой плазмы является исследование теплообмена при течении ее в канале.

В работах [8, 9] исследовалась постановка задачи о течении в пограничных слоях в разнотемпературной полностью ионизованной плазме. Показано, что при изучении поведения температур компонент вблизи стенок, вообще говоря, необходимо рассматривать два температурных пограничных слоя: электронный (слой, в котором резко изменяется температура электронов) и ионный (слой, в котором резко изменяется температура ионов в полностью ионизованной плазме или температура ионов и нейтралов в частично ионизованной плазме). Кроме пограничных слоев, в которых резко изменяются температуры электронов и ионов, в двутемпературной плазме может существовать специфический пограничный пристеночный слой, в котором созданная граничными условиями на стенке разность температур электронов и ионов выходит на значение, определяемое совместным действием джоулева тепла и вязкого нагрева. Толщина этого слоя в широком диапазоне изменения определяющих параметров меньше толщины динамического (вязкого) пограничного слоя, которая, вообще говоря, меньше толщины температурных пограничных слоев.

Уравнения для пограничных слоев в полностью ионизованной разнотемпературной замагниченной плазме выписывались также в работе [10]. В этой же работе приводятся графики для распределения скорости и температуры электронов в особой точке  $\xi = 0$ , в начале канала.

Однако решение задачи о распределении температур электронов и ионов в этой точке не отражает основных магнитогидродинамических процессов и процессов, связанных с разными температурами компонент. В самом деле, члены, описывающие джоулев нагрев, обмен энергии между компонентами, конвективный перенос тепла электронами и т. д., при  $\xi = 0$  выпадают из уравнений<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Приближенный способ расчета пограничных слоев в полностью ионизованной плазме предложен в работе [17].

Задача о пограничных слоях в разнотемпературной частично ионизованной плазме решалась в локально-автомодельной постановке в работах [11, 12]. В работе [11] для электронной температуры использовалось уравнение, предложенное Керреброком, которое, как это показано в работах [8, 9] и в данной работе, вообще говоря, не годится для описания процессов в пограничных слоях. В работе [12] пограничный слой рассматривался на диэлектрической стенке канала.

### Обозначения

$e$ — заряд иона,	$\lambda$ — кулоновский логарифм,
$L$ — характерный размер,	$K$ — коэффициент нагрузки,
$v_0$ — скорость в начале канала,	$c_f$ — коэффициент трения,
$c$ — скорость света,	$\tau_e$ — электронное время между столкновениями,
$m_k$ — масса частицы $k$ -го сорта,	$\tau_i$ — ионное время между столкновениями,
$n_k$ — число частиц $k$ -го сорта в единице объема,	$\mu_i$ — коэффициент вязкости ионов,
$\rho$ — плотность смеси,	$\kappa_k$ — коэффициент теплопроводности $k$ -й компоненты,
$v_e$ — средняя скорость электронов,	$\sigma$ — проводимость,
$v$ — скорость смеси (предполагается совпадающей со средней скоростью ионов),	$\delta_v$ — толщина вязкого пограничного слоя,
$p$ — давление смеси,	$\delta_k$ — толщина температурного пограничного слоя $k$ -й компоненты,
$\pi$ — тензор вязких напряжений ионов,	$\delta$ — толщина $\delta$ -слоя,
$p_k$ — парциальное давление $k$ -й компоненты,	$q_k^T$ — поток тепла за счет теплопроводности $k$ -й компоненты,
$E$ — электрическое поле,	$q_j$ — диффузионный поток тепла, переносимый электронами,
$H$ — магнитное поле,	$N_k$ — число Нуссельта, построенное по соответствующему тепловому потоку.
$h$ — единичный вектор вдоль магнитного поля,	
$j$ — плотность тока,	
$T_k$ — температура частиц $k$ -го сорта,	
$\omega$ — циклотронная частота,	

$$m = \frac{m_i}{m_p}, \quad K = \frac{cE_y}{v_0 H}, \quad T_{ei} = \frac{T_e^\circ}{T_i^\circ}, \quad R_j = \frac{4\pi j_0 L}{c H_0}, \quad S_0 = \frac{H^2 \sigma_0 L}{c^2 v_0 \rho_0}$$

$$N = \frac{n_{e\delta}}{n_e^\circ}, \quad V = \frac{v_{x\delta}}{v_0}, \quad P = \frac{p\delta}{\rho_0 v_0^2}, \quad P_e = \frac{p_{e\delta}}{\rho_0 v_0^2}, \quad \Theta_e = \frac{T_{e\delta}}{T_e^\circ}, \quad \Theta_i = \frac{T_{i\delta}}{T_i^\circ}$$

$$\Theta = T_{ei} \Theta_e + \Theta_i, \quad a^2 = \frac{5}{3} \frac{p\delta}{\rho\delta}, \quad M^2 = \frac{v_{x^2}}{a^2}, \quad j = \frac{c j_y}{\sigma_0 v_0 H}$$

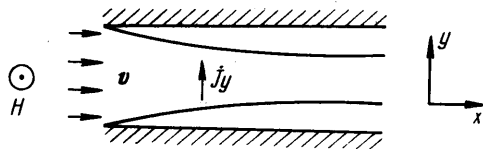
$$R = \frac{\rho v_x L}{\mu_i}, \quad R_m = \frac{4\pi \sigma v_0 L}{c^2}, \quad \Omega = \omega_e \tau_e, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{\sqrt{R_0}}{L \sqrt{\xi}} \int_0^{y/L} \frac{n_e}{n_{e\delta}} dy$$

$$u = \frac{v_x}{v_{x\delta}}, \quad v = \frac{v_y}{v_{x\delta}}, \quad n = \frac{n_e}{n_{e\delta}}, \quad \vartheta_e = \frac{T_e}{T_{e\delta}}, \quad \vartheta_i = \frac{T_i}{T_{i\delta}}$$

$$\vartheta = T_{ei} \Theta_e \vartheta_e + \Theta_i \vartheta_i, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \mu = \frac{\mu_i}{\mu_i^\circ}, \quad \kappa_k^* = \frac{\kappa_k}{\kappa_k^\circ}$$

Индексом  $e$  обозначаются величины, относящиеся к электронам, индексом  $i$  — к ионам, индексом  $p$  — к протонам; буквами  $w$  или  $\delta$  обозначаются значения величин вблизи стенки и в ядре потока соответственно. Индексом нуль обозначаются характерные параметры среды, равные соответствующим параметрам в начале канала. Звездочкой обозначаются безразмерные параметры, отнесенные к значениям тех же самых параметров, взятых на входе в канал. Штрих означает производную по безразмерной координате  $\xi$  величин, описывающих ядро потока.

**1. Описание задачи и исходные уравнения.** Рассмотрим течение сильно ионизованной плазмы с разными температурами компонент в плоском канале (фиг. 1) в магнитном поле. Ось  $x$  направлена вдоль канала, ось  $y$  перпендикулярна стенкам канала; приложенное магнитное поле имеет только одну составляющую  $H$ , направленную вдоль оси  $z$ . При таком течении вблизи стенок могут возникать узкие пограничные слои [8, 9], в которых скорость температуры



Фиг. 1

компонент и некоторые другие определяющие параметры вследствие процессов вязкости и теплопроводности меняются от значений на электродах до значений вдали от стенок во внешнем потоке.

Для определения силы трения и потоков тепла на электроды необходимо знать распределение скорости и температур компонент в пограничных слоях — решить уравнения пограничного слоя, а для решения этих уравнений нужно знать значения всех параметров на внешней границе пограничного слоя. При этом, как и в обычной гидродинамике или магнитной гидродинамике, задачу о течении двухтемпературной плазмы в канале можно разделить на две: вначале решить задачу об одномерном течении в канале без учета вязкости и теплопроводности среды (течение в ядре потока), а затем, используя полученное решение в качестве граничных условий на внешней границе пограничных слоев, решить задачу о пограничных слоях. В дальнейшем рассматривается задача о пограничных слоях на нижнем электроде канала.

Для описания явлений, протекающих в полностью ионизованной плазме, будем пользоваться системой уравнений, полученных в работе [13]. Для определенности будем рассматривать случай, когда  $\omega\tau_i \ll \Omega < 1^1$ , а средняя массовая скорость ионов равна скорости смеси. Кроме того, будем пренебрегать электронной вязкостью в уравнении движения и уравнении энергии для электронов. Оценки, указывающие на возможность таких упрощений, делались в работе [14]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \operatorname{div} \rho v v_\alpha - \frac{\partial \pi^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha \quad (1.2)$$

$$\frac{3}{2} n_e \frac{dT_e}{dt} + p_e \operatorname{div} \mathbf{v}_e = - \operatorname{div} \mathbf{q}_e + Q_e \quad (1.3)$$

$$\frac{3}{2} n_i \frac{dT_i}{dt} + p_i \operatorname{div} \mathbf{v} = - \operatorname{div} \mathbf{q}_i - \pi^{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + Q_i \quad (1.4)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = - \mu_i \left( \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \quad (1.5)$$

<sup>1</sup> Последнее неравенство позволяет упростить закон Ома (1.11) и вид коэффициентов переноса в уравнении энергии для электронов. Следует отметить, что при  $j_x = 0$  упрощенное уравнение энергии для электронов, используемое в данной работе (уравнение (4.6)), годится и для случая  $\Omega \sim 1$ . В коэффициенты переноса могут войти добавки, связанные с  $\Omega$ , которые не изменят качественно характера полученных решений. При  $j_x \neq 0$  и  $\Omega \sim 1$  в этом уравнении добавятся члены, связанные с  $j_x$ .

$$\mathbf{q}_e = -\beta_{\parallel} T_e \frac{\mathbf{j}}{en_e} - \beta_{\perp} T_e \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{j}}{en_e} - \kappa_{\parallel}^e \nabla T_e - \kappa_{\perp}^e \mathbf{h} \times \nabla T_e \quad (1.6)$$

$$\mathbf{q}_i = -\kappa_i \nabla T_i, \quad Q_e = R \frac{\mathbf{j}}{en_e} - \gamma(T_e - T_i), \quad Q_i = \gamma(T_e - T_i) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{R} = -\beta_{\parallel} \nabla T_e - \beta_{\perp} \mathbf{h} \times \nabla T_e + \frac{\alpha_{\parallel}}{en_e} \mathbf{j} - \frac{\alpha_{\perp}}{en_e} \mathbf{h} \times \mathbf{j} \quad (1.8)$$

$$\mu_i = 0,96 n_i T_i \tau_i, \quad \gamma = \frac{3m_e n_e}{m_i \tau_e}, \quad \kappa_{\parallel}^e = 3,1616 \frac{n_e T_e \tau_e}{m_e}$$

$$\kappa_{\perp}^e = 1,8179 \kappa_{\parallel}^e \Omega, \quad \kappa_i = 3,906 \frac{n_i T_i \tau_i}{m_i} \quad (1.9)$$

$$\tau_e = \frac{3\sqrt{m_e T_e^{3/2}}}{4\sqrt{2\pi\lambda e^4 n_i}}, \quad \tau_i = \frac{3\sqrt{m_i T_i^{3/2}}}{4\sqrt{\pi\lambda e^4 n_i}}$$

$$\lambda = \ln \frac{3}{2e^2} (T_e + T_i) \left( \frac{T_e T_i}{4\pi e^2 n_e (T_e + T_i)} \right)^{1/2}$$

$$\beta_{\parallel} = 0,711 n_e, \quad \beta_{\perp} = 0,8097 n_e \Omega$$

$$\alpha_{\parallel} = 0,5129 \frac{m_e n_e}{\tau_e}, \quad \alpha_{\perp} = 0,4031 \alpha_{\parallel} \Omega, \quad \sigma = \frac{e^2 n_e^2}{\alpha_{\parallel}}$$

Плазма предполагается идеальной и однократно ионизованной.

Для замыкания системы нужно выписать также уравнения состояния для электронов и ионов и закон Ома [14]

$$p_e = n_e T_e, \quad p_i = n_i T_i \quad (1.10)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e \right) \quad (1.11)$$

а также уравнения Максвелла (для стационарного случая, с учетом того, что магнитные числа Рейнольдса малы, а  $E \sim v_0 H / c$ ); имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (1.12)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e) \quad (1.13)$$

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (1.14)$$

Легко видеть, что в случае, когда  $E$  не равно по порядку величины  $v_0 H / c$ , первое уравнение (1.12) верно, когда параметр  $R_j = 4\pi j_0 L / cH \ll 1$  ( $j_0$  — характерная плотность тока).

В формулах (1.6) — (1.8) при написании выражений для  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{R}$  использовалось, что  $\beta_{\parallel} = \beta_{\perp}$ ,  $\kappa_{\parallel} = \kappa_{\perp}$ ,  $\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp}$ , так как  $\Omega < 1$ . Величины  $\beta_{\perp}$  и  $\kappa_{\perp}$  пропорциональны  $\Omega$ , однако они могут входить коэффициентами в уравнения перед производными по  $y$ , которые в пограничных слоях велики. Члены такого типа следует, вообще говоря, оставлять в уравнениях. Для пренебрежения ими каждый раз нужно делать специальные оценки.

Далее будем предполагать, что концентрации электронов и ионов равны  $n_e = n_i$ . (Это равенство может нарушаться лишь внутри слоя толщиной дебаевского радиуса вблизи стенок. Легко показать, что для значений параметров, используемых в данной работе, дебаевский радиус меньше длины свободного пробега.)

**2. Упрощение исходных уравнений и постановка задачи о пограничном слое.** В случае малых магнитных чисел Рейнольдса для значений  $E \approx v_0 H / c$ , или когда параметр  $R_j \gg 1$ , магнитное поле в ядре канала и в пограничном слое можно считать заданным. Будем считать  $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = H = \text{const}$ . При этом уравнения (1.12) удовлетворяются. Из первого уравнения (1.13) следует, что  $E_z = \text{const}$ ; положим  $E_z = 0$ . Из уравнения (1.14) следует, что величина  $\Delta j_y$  (изменение  $j_y$  поперек пограничного слоя) порядка толщины этого пограничного слоя. Будем считать, что  $j_y$  поперек пограничного слоя не изменяется, так что  $j_y$  есть функция только  $x$  и может быть найдена из решения задачи о внешнем потоке.

Закон Ома в проекции на ось  $x$  имеет вид

$$j_x = \sigma \left( E_x + \frac{1}{c} v_y H \right) + \frac{\sigma}{en_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (2.1)$$

Составляющая плотности тока  $j_x$  входит кроме уравнения (2.1) в уравнение энергии для электронов (член  $j_x^2 / \sigma$ ) и в проекцию на ось  $y$  уравнения движения (член  $j_x H / c$ ). Будем считать, что  $j_x^2 / \sigma \ll j_y^2 / \sigma$ , а изменение суммарного давления смеси поперек канала и пограничного слоя, вызываемое членом  $j_x H / c$ , мало. Так что, как и в газовой динамике, будем считать  $\partial p / \partial y = 0$ . Таким образом, переменная  $j_x$  будет входить только в уравнение (2.1), а величина  $E_x$  еще и в проекцию на ось  $z$  первого уравнения (1.13). Оба эти уравнения в приближении пограничного слоя можно не рассматривать.

Будем считать, что в ядре потока

$$v_y = j_x = 0, \quad E_y = E = \text{const}$$

Схема решения задачи о пограничном слое состоит в следующем. Решается задача о течении плазмы во внешнем потоке в одномерной постановке — все величины зависят только от  $x$ . При этом используются уравнения неразрывности, проекция на ось  $x$  уравнения движения, уравнения энергии и состояния для электронов и ионов и проекция на ось  $y$  закона Ома. В последнем уравнении безразмерная величина  $E_y$  считается постоянной и задается. Точнее говоря, задается безразмерный параметр — коэффициент нагрузки  $K = Ec / H v_0$ .

Из решения одномерной задачи находятся распределения скорости, концентраций, температур и давлений компонент, а также плотности тока по длине канала. Подробное изложение постановки задачи о течении во внешнем потоке приведено в п. 3. Найденные во внешнем потоке значения скорости и температур компонент служат граничными условиями для значений соответствующих параметров в пограничном слое при  $y \rightarrow \infty$ .

Система уравнений пограничного слоя состоит из четырех дифференциальных уравнений: уравнения неразрывности, проекции уравнения движения на ось  $x$  и двух уравнений энергии (для электронов и ионов). При этом парциальные давления исключаются с помощью уравнений состояния, а концентрация — с помощью соотношения  $dp / dy = 0$ ; величина  $j_y$ , входящая в уравнение движения и в уравнение энергии для электронов, берется из решения задачи о внешнем потоке. Все коэффициенты переноса также могут быть выражены через температуры компонент и параметры внешнего потока. Из проекции закона Ома (1.11) на ось  $y$  после решения перечисленных уравнений можно определить распределение  $E_y$  поперек пограничного слоя. При этом оказывается, что вблизи стенки  $\partial p_0 / \partial y$  может быть очень велико, а потому и вызываемое им поле около стенки может существенно превышать поле в ядре потока.

**3. Уравнения, описывающие одномерное течение в ядре потока.** Будем считать, что во внешнем по отношению к пограничному слою потоке все величины зависят только от координаты  $x$ ,  $v_y = 0$ , а вязкость и теплопроводность отсутствуют. Все величины в ядре потока в соответствии с принятыми обозначениями следует отмечать индексом  $\delta$ . Однако для краткости индекс  $\delta$  опускается и оставляется только там, где это может вызвать недоразумение. Выписывая уравнения (1.1) — (1.4), (1.10), (1.11) при

таких предположениях, получаем

$$\rho v_x = \rho_0 v_0, \quad \rho v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{dp}{dx} - \frac{1}{c} j_v H = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{3}{2} n_e v_x \frac{dT_e}{dx} + p_e \frac{dv_x}{dx} = \frac{j_v^2}{\sigma} - \gamma(T_e - T_i), \quad p_e = n_e T_e \quad (3.2)$$

$$\frac{3}{2} n_i v_x \frac{dT_i}{dx} + p_i \frac{dv_x}{dx} = \gamma(T_e - T_i), \quad p_i = n_i T_i \quad (3.3)$$

$$j_v = \sigma \left( E_v - \frac{1}{c} v_x H \right), \quad E_v = \text{const}, \quad H = \text{const} \quad (3.4)$$

Первое из уравнений (3.1) можно записать в безразмерном виде

$$NV = 1, \quad N = \frac{n_{e0}}{n_e^0}, \quad V = \frac{v_x c}{v_0} \quad (3.5)$$

Складывая первые уравнения (3.2) и (3.3) и используя первое уравнение (3.1), получаем соотношение, связывающее производные  $dp/dx$  и  $dv_x/dx$ . Подставляя в это уравнение производную  $dp/dx$  из второго уравнения (3.1) и вводя безразмерные величины, получаем

$$(M^2 - 1) \frac{dV}{d\xi} = - \frac{S_0 \sigma^*}{P} (V - K)(V - 0.4K) \quad (3.6)$$

Давление  $P$  и число Маха  $M$  при помощи второй формулы (3.2) и второй формулы (3.3), а величины  $\sigma$ ,  $\gamma$  и  $\lambda$  (их выражения приведены в формулах (1.9)) могут быть выражены через скорость и температуры компонент формулы (1) и (2) приложения.

Записывая первые уравнения (3.2) и (3.3) в безразмерном виде, заменяя производную  $dV/d\xi$  из уравнения (3.6) и используя также уравнения состояния (вторые уравнения (3.2) и (3.3)), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_e}{d\xi} = \frac{M_0^2 (T_{ei} + 1) S_0}{0.9 T_{ei}} \sigma^* (V - K) \left( \frac{T_{ei} \Theta_e}{\Theta} \frac{V - 0.4K}{M^2 - 1} + V - K \right) - \\ - 1.0258 \frac{S_0}{\Omega_0^2} \gamma^* (T_{ei} \Theta_e - \Theta_i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_i}{d\xi} = \frac{M_0^2 (T_{ei} + 1) S_0}{0.9} \sigma^* (V - K) \frac{V - 0.4K}{M^2 - 1} \frac{\Theta_i}{\Theta} + \\ + 1.0258 \frac{S_0}{\Omega_0^2} \gamma^* (T_{ei} \Theta_e - \Theta_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Запишем в безразмерной форме закон Ома

$$j = \sigma^* (K - V), \quad j = \frac{j_v c}{\sigma_0 v_0 H_0} \quad (3.9)$$

Легко видеть, что для решения задачи о внешнем потоке нужно решать совместно три дифференциальных уравнения (3.6), (3.7) и (3.8) с привлечением соотношений (1) и (2) приложения. При этом для решения задачи нужно задать четыре безразмерные константы: параметр нагрузки  $K$ , параметр взаимодействия  $S_0$ , кулоновский логарифм на входе в канал  $\lambda_0$  и  $\Omega_0$ . Начальные условия на входе в канал при  $\xi = 0$  записывается в виде

$$V = \Theta_e = \Theta_i = 1 \quad (3.10)$$

После решения этой задачи выражение для тока  $j$  находится из формулы (3.9). Кроме скорости, температур компонент и плотности тока будем вычислять при реше-

нии задачи в ядре потока распределение по длине канала следующих безразмерных параметров: полного давления смеси  $P$ , числа Маха  $M$ , парциальных давлений компонент и разности температур компонент. Формулы, выражающие связь перечисленных величин с температурами компонент и другими параметрами, приведены в приложении (формулы (1)).

4. Преобразование уравнения движения и уравнений энергии в пограничных слоях. Проекция уравнения движения (1.2) на ось  $x$  с учетом упрощений, обычно используемых при изучении пограничного слоя, может быть записана в виде

$$\frac{\partial \rho v_x^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_i \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{c} j_y H \quad (4.1)$$

Выше указывалось, что давление смеси не меняется поперек пограничного слоя. Выразим член  $\partial p / \partial x$  из второго уравнения (3.1) и подставим его в (4.1). Введем, как это обычно делается, новые переменные  $n, u, v, \psi$

$$n = \frac{n_e}{n_{e0}}, \quad u = \frac{v_x}{v_{x0}}, \quad v = \frac{v_y}{v_{x0}}, \quad nu = L \left( \frac{\xi}{R_0} \right)^{1/2} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (4.2)$$

$$nv = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi}{R_0} \right)^{1/2} \psi, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{1}{L} \left( \frac{R_0}{\xi} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{n_e}{n_{e0}} dy$$

Значения переменных приведены в начале статьи в обозначениях. Прделаказанные операции, уравнение (4.1) можно записать в виде

$$\xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \mu n \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\xi V'}{V} \left( \frac{1}{n} - u^2 \right) \quad (4.3)$$

Выражение безразмерной плотности  $n$  через температуры компонент в пограничном слое легко получить из уравнения  $p = p_0 (\partial p / \partial y = 0)$ . Эта формула, а также формула для безразмерной вязкости  $\mu$  приведены в приложении.

Уравнение энергии для электронов также может быть упрощено в рамках теории пограничного слоя. Подставляя в уравнение (1.3) выражения (1.6) — (1.8), после упрощений получаем

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} \frac{5}{\partial x} n_e T_e v_x + \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial y} n_e T_e v_y - \frac{5}{2e} \frac{\partial}{\partial x} T_e j_x - \frac{5}{2e} \frac{\partial}{\partial y} T_e j_y - \\ & - v_x \frac{\partial p_e}{\partial x} - v_y \frac{\partial p_e}{\partial y} + \frac{j_x}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} + \frac{j_y}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial y} = \\ & = \left( -\frac{\partial}{\partial x} \Omega j_y T_e + \frac{\partial}{\partial y} \Omega j_x T_e + \Omega j_x \frac{\partial T_e}{\partial y} - \Omega j_y \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) \frac{0.8097}{e} - \quad (4.4) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left( -\kappa_{\parallel}^e \frac{\partial T_e}{\partial x} + \kappa_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\kappa_{\parallel}^e \frac{\partial T_e}{\partial y} - \kappa_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial x} \right) + \\ & + \frac{j_y^2}{\sigma} - \gamma (T_e - T_i) \end{aligned}$$

Предположим, что существует узкий пограничный слой толщиной  $\delta_e$ , в котором температура электронов изменяется от значения на стенке до значения во внешнем потоке. В работе [8] показано, что для существования такого слоя необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $R\kappa_i / \kappa_e \gg 1$ .

Предположим, что порядок членов  $\partial T_e / \partial x$  и  $\partial T_e / \partial y$  будет  $T_e / L$  и  $T_e / \delta_e$  соответственно. Для удобства сравнения порядков величин членов в уравнении (4.4) перенумеруем их цифрами слева направо (например, первый член в правой части  $-\partial(\Omega j_y T_e) / \partial y$  имеет номер (9)). Легко показать, что по порядку величины сравнимы

следующие члены: (3) ~ (7), (4) ~ (8), (9) ~ (12), (10) ~ (11), (14) ~ (16). Далее легко видеть, что отношения различных слагаемых по порядку величины равны

$$\begin{aligned} \frac{(10)}{(4)} &\sim \Omega \frac{j_x}{j_y}, & \frac{(9)}{(4)} &\sim \Omega \frac{\delta_e}{L}, & \frac{(3)}{(4)} &\sim \frac{j_x \delta_e}{j_y L} \\ \frac{(13)}{(15)} &\sim \frac{\delta_e^2}{L^2}, & \frac{(14)}{(15)} &\sim \Omega \frac{\delta_e}{L} \end{aligned} \quad (4.5)$$

В случае, когда отношение  $\delta_e/L \ll 1$ ,  $j_x < j_y$ , членами (3), (7), (9)–(12), (13), (14), (16) в уравнении (4.4) можно пренебречь. После этого уравнение энергии для электронов принимает вид<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_e v_x \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{5}{2} n_e v_y \frac{\partial T_e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \frac{5}{2e} j_y \frac{\partial T_e}{\partial y} + \\ + v_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + v_y \frac{\partial p_e}{\partial y} - \frac{j_y \partial p_e}{en_e \partial y} + \frac{j_y^2}{\sigma} - \gamma(T_e - T_i) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Как указывалось в п. 1, в двухтемпературной плазме, как и в обычной газовой динамике, полное давление смеси не изменяется поперек пограничного слоя  $\partial p / \partial y = 0$ . В полностью ионизованной плазме  $p = p_e + p_i$ , поэтому  $\partial p_e / \partial y = -\partial p_i / \partial y$ . Однако ниоткуда не следует, что парциальные давления не изменяются в пограничном слое. Более того, это просто неверно. Именно поэтому члены с  $\partial p_e / \partial y$  оставлены в уравнении (4.6); точно так же члены с  $\partial p_i / \partial y$  будут оставлены в уравнении энергии для ионов.

Покажем, почему в разнотемпературной плазме производные  $\partial p_e / \partial y$  и  $\partial p_i / \partial y$  отличны от нуля. Запишем производную

$$\frac{\partial p_e}{\partial y} = \frac{\partial n_e T_e}{\partial y} = \frac{p_{e0}}{(T_e + T_i)^2} \left( T_i \frac{\partial T_e}{\partial y} - T_e \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

Легко видеть, что  $\partial p_e / \partial y = 0$ , когда  $T_e / T_i = T_{e0} / T_{i0}$ , т. е. когда отношение температур электронов и ионов в пограничном слое равно отношению температур в ядре потока. Ясно, что это дополнительное соотношение — результат предположения  $\partial p_e / \partial y = 0$ , которое противоречит уравнениям энергии для электронов и ионов.

Из формулы (4.7) видно, что величина  $\partial p_e / \partial y$  может быть очень большой:  $\max(\delta^{-1}, \delta_e^{-1}, \delta_i^{-1})$  в пограничных слоях. Из равенства  $\partial p_e / \partial y = -\partial p_i / \partial y$  следует, что градиенты давления действуют на электроны и ионы в пограничных слоях в разные стороны. Однако это совсем не означает, что электроны и ионы будут двигаться в пограничном слое с большой скоростью. Легко видеть, что скорость ионов  $v_y$  будет порядка  $\delta_v$ , как и в обычной гидродинамике. Это связано с тем, что градиенты парциальных давлений поперек пограничного слоя будут уравниваться электрическим полем (которое, разумеется, также расталкивает электроны и ионы в разных направлениях). Напомним, что при решении уравнений пограничного слоя величина  $j_y(x)$  считается заданной, равной  $j_{y0}$  — величине тока, найденной при решении задачи о внешнем потоке. При этом уравнение проекции закона Ома на ось  $y$  можно не рассматривать при решении задачи о пограничном слое. Это уравнение служит для определения  $y$ -й составляющей электрического поля в пограничном слое после того, как задача о пограничном слое решена.

Введем безразмерные температуры  $\vartheta_e = T_e / T_{e0}$  и  $\vartheta_i = T_i / T_{i0}$ . Переходя к переменным  $\xi, \eta, u, v, n$  и  $\psi$  по формулам (4.2) и заменяя давление электронов с помощью уравнения состояния (формула (3) приложения), получаем уравнение, содержащее производные от  $\psi$  и температур  $\vartheta_e$  и  $\vartheta_i$

$$a_1 \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} c_1 \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta} + d_1 + e_1 \vartheta_e, \quad a_1 = \xi u \left( 1 - \frac{0.4 \vartheta_i \vartheta_i}{\vartheta} \right) \quad (4.8)$$

<sup>1</sup> Уравнением (4.6) можно пользоваться и в случае, когда по каким-либо причинам температура  $T_e$  слабо меняется поперек пограничного слоя. При этом некоторые из оценок, которые использовались выше при получении этого уравнения, изменятся.



$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 0.5\psi + 1.9496 \Omega_0 \sqrt{R_0 \xi} j\right) \left(1 - \frac{0.4\Theta_i \vartheta_i}{\vartheta}\right) \\
 c_1 &= 39.932 \left(\frac{m_i}{m_p}\right)^{1/2} \frac{(T_{ei} \Theta_e \vartheta_e^{1/2})}{\lambda^*} n \\
 e_1 &= \frac{0.4\xi u \Theta_i \vartheta_i}{\vartheta} \left(\frac{\Theta_e'}{\Theta_e} - \frac{\Theta_i'}{\Theta_i}\right) + 0.4\xi u \left(\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{V'}{V}\right) - \frac{\xi u \Theta_e'}{\Theta_e} - \frac{0.4\Theta_i}{\vartheta} \times \\
 &\times \left[\xi u \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 0.5\psi + 1.9496 \Omega_0 \sqrt{R_0 \xi} j\right) \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta}\right] - \frac{0.6155 S_0}{\Omega_0^2} \frac{\xi}{n} \gamma^* \\
 d_1 &= \frac{2}{3} \frac{M_0^2 (T_{ei} + 1) S_0 \xi j^2}{T_{ei} \Theta_e} + \frac{0.6155 S_0}{\Omega_0^2} \frac{\xi \Theta_i \vartheta_i}{T_{ei} \Theta_e n} \gamma^* \\
 \Theta &= T_{ei} \Theta_e + \Theta_i, \quad \vartheta = T_{ei} \Theta_e \vartheta_e + \Theta_i \vartheta_i, \quad n = \Theta / \vartheta
 \end{aligned}$$

Выражения для  $\sigma^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\kappa_e^*$  через температуры и другие параметры, а также связь отношений  $m_i v_0^2 / T_e^0$  и  $m_i v_0^2 / T_i^0$  с числом Маха и температурами на входе в канал даны в приложении (формулы (4)).

Выпишем уравнение энергии для ионов в приближении пограничного слоя. Предположим, что число Рейнольдса велико. В работе [8] показано, что при этом может существовать пограничный слой толщиной  $\delta_i \sim 1/\sqrt{R}$ , в котором температура ионов изменяется от значения на стенке до значения в ядре потока. Подставляя в уравнение (1.4) выражения (1.5), (1.7), опуская вторую производную от температуры ионов по  $x$  и упрощая обычным способом члены, описывающие вязкую диссипацию, получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{2} n_i v_x \frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{5}{2} n_i v_y \frac{\partial T_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial y} + \mu_i \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \\
 &+ v_x \frac{\partial p_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial p_i}{\partial y} + \gamma(T_e - T_i)
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Производная от давления ионов по  $y$ , как указывалось выше, может быть велика в пограничных слоях, поэтому соответствующий член необходимо учитывать в уравнении. Вводя безразмерные переменные  $\vartheta_e$ ,  $\vartheta_i$ ,  $u$ ,  $n$ ,  $v$ ,  $\psi$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и заменяя давление ионов из уравнения состояния (формула (3) приложения), получаем уравнение, содержащее производные от  $\vartheta_e$ ,  $\vartheta_i$  и  $\psi$

$$\begin{aligned}
 a_2 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} c_2 \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta} + d_2 + e_2 \vartheta_i \\
 a_2 &= \xi u \left(1 - \frac{0.4 T_{ei} \Theta_e \vartheta_e}{\vartheta}\right), \quad b_2 = -\left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 0.5\psi\right) \left(1 - \frac{0.4 T_{ei} \Theta_e \vartheta_e}{\vartheta}\right) \\
 c_2 &= 1.6275 \frac{(\Theta_i \vartheta_i)^{1/2}}{\lambda^*} n
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \frac{2}{3} \frac{M_0^2 (T_{ei} + 1) V^2}{\Theta_i} \mu n \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{0.6155 S_0}{\Omega_0^2} \frac{\xi T_{ei} \Theta_e \vartheta_e}{n \Theta_i} \gamma^* \\
 e_2 &= -\frac{0.4 \xi u T_{ei} \Theta_e \vartheta_e}{\vartheta} \left(\frac{\Theta_e'}{\Theta_e} - \frac{\Theta_i'}{\Theta_i}\right) + 0.4 \xi u \left(\frac{\Theta'}{\Theta} - \frac{V'}{V}\right) - \frac{\xi u \Theta_i'}{\Theta_i} - \\
 &- \frac{0.4 T_{ei} \Theta_e}{\vartheta} \left[\xi u \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + 0.5\psi\right) \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta}\right] - \frac{0.6155 S_0}{\Omega_0^2} \frac{\xi}{n} \nu^* \\
 \Theta &= T_{ei} \Theta_e + \Theta_i, \quad \vartheta = T_{ei} \Theta_e \vartheta_e + \Theta_i \vartheta_i
 \end{aligned}$$

Выражение для  $\kappa_i^*$  приведено в приложении (формула (4)).

Система уравнений (4.3), (4.8), (4.10) и четвертое уравнение (4.2) описывает поведение  $\psi$ ,  $u$ ,  $\vartheta_e$  и  $\vartheta_i$  в пограничных слоях. Будем вычислять кроме этих параметров еще скорость  $u$ , плотность  $n$ , температуры  $T_e/T_i^\circ$  и  $T_i/T_i^\circ$ , а также парциальные давления  $p_e/\rho_0 v_0^2$  и  $p_i/\rho_0 v_0^2$  и отношение проводимостей на стенке и во внешнем потоке  $\sigma_w/\sigma_0$  (формулы (3), (4) приложения). Кроме того, будут вычисляться безразмерные параметры, характеризующие силу трения и теплообмен на электроде.

Введем, как и в газовой динамике,

$$c_f = \frac{\mu_{iw}(\partial v_x/\partial y)_w}{\rho_0 v_0^2/2} \quad (4.11)$$

Переходя к дифференцированию по  $\eta$ , можно записать

$$c_f \sqrt{R_x} = \frac{2n_w \mu_w}{\sqrt{\mu_0}} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w, \quad R_x = \frac{\rho_0 v_0^2 x}{\mu_0} \quad (4.12)$$

При изучении теплопередачи в пограничном слое будем учитывать потоки, связанные с электронной и ионной теплопроводностями, и конвективный перенос тепла током. Эти потоки тепла равны соответственно

$$q_e^T = -\kappa_e \partial T_e / \partial y, \quad q_i^T = -\kappa_i \partial T_i / \partial y, \quad q_j = -3.211 j_y T_e / e$$

Для сравнения этих потоков будем вводить соответствующие им числа Нуссельта, по формулам ( $k = e, i, j$ )

$$N_k = \frac{-2.5 q_{kw} x}{m_i \kappa_{ew} (h_w - h_0)}$$

Здесь  $h$  — сумма энтальпии и кинетической энергии, рассчитанная на единицу массы смеси.

Заменяя дифференцирование по  $y$  дифференцированием по  $\eta$  и вводя безразмерные величины, можно записать

$$\begin{aligned} \frac{N_e}{\sqrt{R_x}} &= 24.528 \sqrt{m T_{ei}}^{1/2} \Theta_e \sqrt{\mu_0 n_w} (\kappa_e^*)_w \left( \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta} \right)_w B \\ \frac{N_i}{\sqrt{R_x}} &= \Theta_i \sqrt{\mu_0 n_w} (\kappa_i^*)_w \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta} \right)_w B \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{N_j}{\sqrt{R_x}} = 1.5386 \Omega_0 \sqrt{R_0 \xi} \sqrt{\mu_0} j T_{ei} \Theta_e \vartheta_{ew} B$$

$$B^{-1} = 24.528 \sqrt{m T_{ei}}^{5/2} \kappa_{ew}^* \left( 0.2 \frac{m_i v_0^2}{T_i^\circ} V^2 + \Theta - \vartheta_w \right)$$

Выражая размерные тепловые потоки через безразмерные параметры, получаем

$$q_{ew}^T = -99.78 \sqrt{m T_{ei}}^{7/2} \Theta_e \kappa_{ew}^* n_w \left( \frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta} \right)_w \frac{n_e^\circ v_0 T_i^\circ}{\sqrt{R_0 \xi}}$$

$$q_{iw}^T = -4.068 \kappa_{iw}^* n_w \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta} \right)_w \Theta_i \frac{n_e^\circ v_0 T_i^\circ}{\sqrt{R_0 \xi}}$$

$$q_{jw} = -6.2604 \vartheta_{ew} j T_{ei} \Theta_e \Omega_0 n_e^\circ v_0 T_i^\circ$$

5. Результаты расчета. Уравнения (4.3), (4.8) и (4.2), (4.10) решались методом конечных разностей [16] на машине БЭСМ-6. Выбирались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_i &= T_{iw}, \quad \partial T_e / \partial \eta = 0, \quad u = \psi = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \\ \vartheta_e &= \vartheta_i = u = 1 \quad \text{при } \eta = \infty \\ \vartheta_i &= f_1(\eta), \quad \vartheta_e = f_2(\eta), \quad u = f_3(\eta) \quad \text{при } \xi = 0 \end{aligned}$$

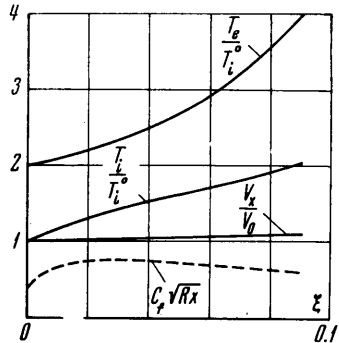
В начале канала, в особой точке, решались уравнения, в которых координата  $\xi$  полагалась равной нулю. При этом в качестве функций  $f_1, f_2, f_3$  брались линейные функции. Полученные в результате решения использовались затем в качестве начальных условий при решении неавтономной задачи.

Ниже приводятся результаты расчета, выполненного для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} H^2 &= 10^2 \text{ эв}, \quad n_e^0 = n_i^0 = 10^{14} \text{ см}^{-3}, \quad T_e^0 = 1 \text{ эв}, \\ T_i^0 &= 0.5 \text{ эв}, \quad T_{iw} = 0.125 \text{ эв}, \quad v_0 = 10^5 \text{ см/сек}, \\ m_i &= 39.096 \end{aligned}$$

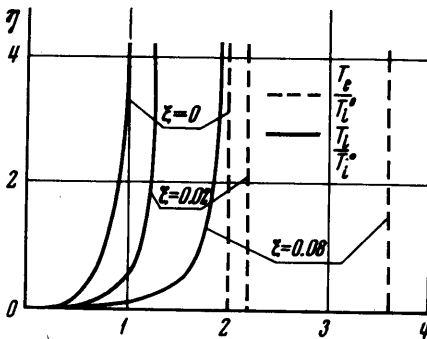
Величина  $m_i = 39.096$  соответствует ионам паров калия или приблизительно ионам аргона. Длина, по которой производилось обезразмеривание, выбиралась равной 30 см. Характерные безразмерные параметры, подсчитанные по перечисленным размерным, будут равны

$$\begin{aligned} S_0 &= 11.69, \quad M_0 = 0.408, \quad R_0 = 4.065 \cdot 10^3, \quad T_{ei} = 2, \\ \lambda_0 &= 7.8, \quad T_{iw}^* = 0.25, \quad \Omega_0 = 0.8263, \quad R_m = 0.963 \end{aligned}$$

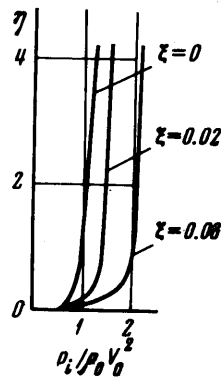


Фиг. 2

Приведенные графики построены для величины параметра нагрузки  $K = 3$ . Канал при этом работает в ускорительном режиме, нижний электрод является анодом. Расчет проводился до сечения, в котором температура электронов в два раза превышает начальную, что соответствует значению  $\xi = 0.09$ . На фиг. 2 приведены графики для температур и скорости во внешнем потоке. Видно, что температуры электронов и



Фиг. 3



Фиг. 4

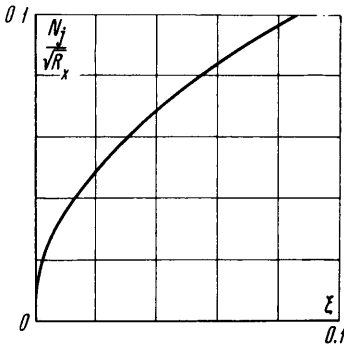
ионов сильно растут по длине канала, скорость возрастает медленно. Разность температур сначала падает, когда ионная температура в слое толщиной  $\Omega_0^2 / S_0$  ( $\gamma$ -слой) догоняет электронную температуру, а затем опять растет. При рассматриваемых условиях  $\gamma$ -слой выражен слабо, потому что разность температур, заданная на входе в канал, и разность температур, обусловленная джоулевым нагревом в канале, сравнимы.

Графики для распределения параметров в пограничном слое фиг. 3-6 построены для трех значений параметра  $\xi$ :  $\xi = 0, \xi = 0.02$  и  $\xi = 0.08$ .

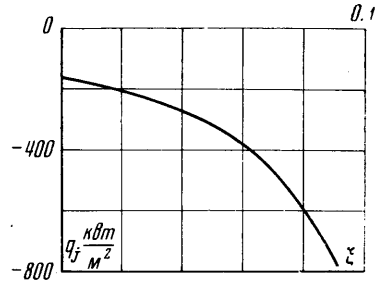
На фиг. 3 представлены распределения температур компонент  $T_e / T_i^0$  и  $T_i / T_i^0$  поперек пограничного слоя в различных сечениях канала. Видно, что температура электронов не изменяется поперек пограничного слоя и равна температуре электронов во внешнем потоке. Полученный результат

является следствием большой теплопроводности электронов (приближенно уравнение энергии для электронов в пограничном слое в рассматриваемом диапазоне изменения определяющих параметров можно записать в виде  $d^2 T_e / dy^2 = 0$ ) и граничного условия  $(dT_e / dy)_w = 0$ .

Температура ионов увеличивается от значения на стенке до значения во внешнем потоке; причем с ростом  $\xi$  производная  $(dT_i / dy)_w$  на стенке увеличивается. При  $\xi = 0$  температуры электронов и ионов заданы. С ростом  $\xi$  увеличивается обмен энергией между электронами и ионами. Следствием этого является возникновение узкого  $\delta$ -слоя, в котором температура ионов резко изменяется [8, 9]. С увеличением  $\xi$  толщина



Фиг. 5



Фиг. 6

$\delta$ -слоя уменьшается. Отметим, что для рассматриваемых параметров толщина развитого ионного температурного пограничного слоя одного порядка с толщиной развитого  $\delta$ -слоя.

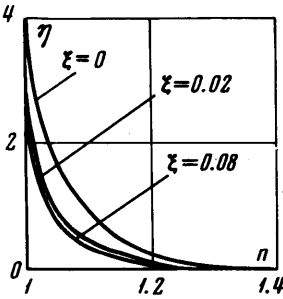
$\eta$	$(T_e - T_i) / T_i^\circ$	$T_i / T_i^\circ$	$p_i / \rho_0 u_0^2$	$u$	$n$
0	1.9675	0.2439	0.4035	0	1.4152
0.1	1.5747	0.6366	0.9078	0.4110	1.2201
0.2	1.4392	0.7719	1.0509	0.5583	1.1649
0.3	1.3506	0.8602	1.1376	0.6537	1.1315
0.4	1.2848	0.9257	1.1987	0.7228	1.1080
0.5	1.2331	0.9770	1.2449	0.7754	1.0903

Значения разности температур электронов и ионов вблизи стенки даны при  $\xi = 0.02$  и  $K = 3$  в таблице. Видно, что в  $\delta$ -слое происходит экранировка влияния граничных условий для температур компонент на стенке канала. В этом слое разность температур электронов и ионов на стенке выходит на разность температур в ядре потока.

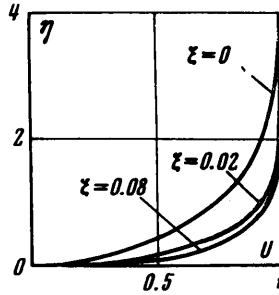
График для распределения парциального давления ионов в пограничных слоях при различных значениях  $\xi$  приведен на фиг. 4. Из графика ясно видно наличие большого градиента давления вблизи электрода в  $\delta$ -слое, причем  $\partial p_e / \partial y = -\partial p_i / \partial y$ . С ростом  $\xi$  по мере развития  $\delta$ -слоя градиенты давлений увеличиваются, однако суммарный градиент давления остается равным нулю в соответствии с теорией, изложенной в п. 4. Значения  $p_i$  вблизи стенки приведены в таблице.

Для выяснения влияния членов  $2.5 j_y e^{-1} \partial T_e / \partial y$  и  $j_y e^{-1} n_e^{-1} \partial p_e / \partial y$  в уравнении энергии для электронов на течение проводились расчеты, когда эти члены выбрасывались из уравнения. Отличие полученных решений от ранее приведенных оказалось менее одного процента. Полученный результат связан с тем, что, как указывалось выше, при выбранном граничном условии температуру электронов в пограничном слое можно считать постоянной поперек пограничного слоя и равной температуре внешнего потока. В остальные уравнения эти два члена не входят.

Однако тепловой поток  $q_j$  на электрод за счет члена  $2.5e^{-1} j_y T_e$  является основным. На фиг. 5 построен график для выражения  $N_j / \sqrt{R_x}$ . Величина  $q_{ew}^T = N_e / \sqrt{R_x} = 0$  в силу принятого граничного условия; величина  $N_i \ll N_j$  (на два порядка) и на графике не приведена. Это связано с тем, что тепловой поток за счет ионной теплопроводности на электрод много меньше теплового потока  $q_j$  и им можно пренебречь. Распределение  $q_j$  по длине канала представлено на фиг. 6. Величина  $q_j$  отрицательна. Это означает, что тепловой поток, связанный с потоком электронов, направлен из плазмы в электрод (в анод).



Фиг. 7



Фиг. 8

Расчет тепловых потоков на противоположный электрод (катод), вообще говоря, следовало бы произвести заново. Можно показать, что для этого необходимо решать те же самые уравнения с  $\Omega_0 = -0.8263$  (поменять знак у магнитного поля). Однако из проведенного анализа ясно, что тепловой поток на катод можно принять равным  $-q_j$ . В самом деле, в пограничном слое на катоде температуру электронов можно считать по-прежнему равной температуре в ядре потока, так что изменение знака  $\Omega_0$  никак не скажется в остальных уравнениях. Тепловой поток за счет ионной теплопроводности будет тем же самым и им по-прежнему можно пренебречь по сравнению с потоком  $-q_j$ .

Профили плотности, формула (3) приложения, и скорости в пограничном слое приведены на фиг. 7, 8, а численные значения их вблизи стенки даны в таблице. С ростом  $\xi$  профиль становится более наполненным, что связано с развитием пограничных слоев. Параметр  $c_j \sqrt{R_x}$ , характеризующий трение на стенке, приведен на фиг. 2.

Температура электронов не меняется поперек пограничного слоя, поэтому проводимость меняется слабо (за счет изменения плотности в кулоновском логарифме).

Расчет показывает, что величина поля  $E_y$ , вычисляемая из проекции закона Ома (1.11) на ось  $y$  с учетом члена  $\partial p_e / \partial y$ , может превышать поле  $E_y$  во внешнем потоке в  $10^3$  раз. При этом падение потенциала в пограничном слое может быть сравнимо по величине с разницей потенциалов между электродами. В этом случае при расчете внешнего потока нужно учитывать падение потенциала в пограничных слоях.

Авторы благодарят А. Е. Якубенко, оказавшего большую помощь при составлении программы и проведении численных расчетов.

**Приложение.** Связь давления компонент, полного давления и числа Маха во внешнем потоке, а также коэффициентов  $\sigma$ ,  $\gamma$  и кулоновского логарифма  $\lambda$  с температурами компонент имеет вид

$$P_e = \frac{PT_{ei}\Theta_e}{\Theta}, \quad P_i = \frac{P\Theta_i}{\Theta}, \quad P = \frac{0.6\Theta}{(T_{ei} + 1)VM_0^2} \quad (1)$$

$$M^2 = \frac{M_0^2(T_{ei} + 1)V^2}{\Theta}, \quad \Theta = T_{ei}\Theta_e + \Theta_i$$

Формулы для  $\sigma$  и  $\gamma$  во внешнем потоке имеют вид

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_0} = \frac{\Theta_e^{3/2}}{\lambda_0/\lambda_0}, \quad \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\lambda_0/\lambda_0}{V^2\Theta_e^{3/2}}, \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1 + \frac{0.5}{\lambda_0} \ln \frac{\Theta_e\Theta_i\Theta V}{T_{ei} + 1} \quad (2)$$

Давление электронов и ионов в пограничных слоях и плотность  $n$  связаны с температурами  $\theta_e$  и  $\theta_i$  формулами

$$\frac{p_e}{\rho_0 v_0^2} = \frac{PT_{ei}\theta_e\theta_e}{\theta}, \quad \frac{p_i}{\rho_0 v_0^2} = \frac{P\theta_i\theta_i}{\theta} \quad (3)$$

$$n = \frac{\theta}{\theta}, \quad \theta = T_{ei}\theta_e\theta_e + \theta_e\theta_i$$

Выражения для безразмерных коэффициентов переноса в пограничных слоях имеют вид

$$\frac{\mu_i}{\mu_0} = \frac{(\theta_i\theta_i)^{1/2}}{\lambda/\lambda_0}, \quad \frac{\kappa_e}{\kappa_e^0} = \frac{(\theta_e\theta_e)^{1/2}}{\lambda/\lambda_0}, \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{(\theta_e\theta_e)^{1/2}}{\lambda/\lambda_0}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{N^2 n^2 \lambda / \lambda_0}{(\theta_e\theta_e)^{3/2}}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{0.5}{\lambda_0} \ln \frac{\theta_e\theta_e\theta_e\theta_i\theta_i\theta^2 V}{(T_{ei} + 1)I\theta}$$

$$\frac{m_i v_0^2}{T_e^0} = \frac{(T_{ei} + 1)M_0^2}{0.6T_{ei}}, \quad \frac{m_i v_0^2}{T_i^0} = \frac{(T_{ei} + 1)M_0^2}{0.6} \quad (4)$$

Получено 13 V 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

- Rossow V. J. On flow of electrically conducting fluids over a flat plate in the presence of a transverse magnetic field. NASA T No. 3971, 1957.
- Любимов Г. А. К постановке задачи о магнитогидродинамическом пограничном слое. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
- Kerrebrock J. K. Electrode boundary layers in direct current plasma accelerators. J. Aeronaut. Sci., 1964, vol. 28, No. 8.
- Пасконов В. М., Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
- Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электропроводящей стенке плоского канала. Electricity from MHD, Vienna, 1967.
- Якубенко А. Е. Расчет пограничного слоя на электроде МГД-генератора переменного сечения. Electricity from MHD, Vienna, 1968.
- Юферев В. С. О падении потенциала в ламинарном пограничном слое на холодном электроде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
- Гогосов В. В. Пограничные слои в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
- Гогосов В. В. О пограничных слоях в двухтемпературной плазме. Electricity from MHD, Vienna, 1967.
- Калихман Л. Е. Пограничный слой двухтемпературной плазмы на электродах магнитогидродинамического канала со скрещенными электрическими и магнитными полями при больших значениях параметра Холла. ПМТФ, 1969, № 3.
- Oates G. C., Richmond J. K., Aoki Y., Grohs G. Loss mechanisms of a low temperature plasma accelerator. JARS. 1962, No. 4.
- Sherman A., Reshotko E. The nonequilibrium boundary layer along a channel wall. AIAA paper No. 68-134. AIAA 6-th aerospace sciences meeting. N. Y., January 22-24, 1968.
- Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, М., Атомиздат, 1963.
- Гогосов В. В. О возможных упрощениях уравнений полностью ионизованной двухтемпературной плазмы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
- Брагинский С. И. К МГД слабо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 5 (11).
- Браиловская И. Ю., Чудов Л. Е. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование». Изд-во МГУ, 1962.
- Калихман Л. Е. Приближенный способ расчета пограничного слоя двухтемпературной плазмы на электродах при больших значениях параметра Холла. ПМТФ, 1970, № 1.