ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Рассматриваются условия глобальной неустойчивости бесстолкновительной плазмы с заданной функцией распределения.

Как показано в [1], условия устойчивости стационарного состояния или течения, не зависящего от одной из координат x на некотором отрезке оси x длины L и удовлетворяющего на концах этого отрезка некоторым граничным условиям, отличаются даже при $L \to \infty$ от условий устойчивости того же состояния или течения, рассматриваемого как безграничное. При достаточно больших L неустойчивость может быть двух типов: «граничная», порождаемая граничными условиями на одном из концов отрезка, когда возбуждаются только волны, уходящие от этого конца, и «глобальная», когда неустойчивость возникает вследствие усиления волн, проходящих по отрезку и отражающихся от его концов. Собственные частоты, характеризующие граничную неустойчивость, зависят от граничных условий, а собственные частоты, характеризующие глобальную неустойчивость, от граничных условий не зависят и с точностью до величин порядка $1/L$ удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{Im}[k_r(\omega) - k_l(\omega)] = 0 \tag{1}$$

где $k_r(\omega)$ и $k_l(\omega)$ — ветви многозначной функции $k(\omega)$, определяемой дисперсионным уравнением, такие, что при достаточно больших значениях $\operatorname{Im}\omega$ величины $\operatorname{Im} k_r$ и $\operatorname{Im} k_l$ имеют разные знаки (это означает [1, 2], что волны $\exp i[k_r(\omega)x - \omega t]$ и $\exp i[k_l(\omega)x - \omega t]$ распространяются в разные стороны). При выполнении последнего условия номера r и l выбираются так, чтобы решение ω уравнения (1) имело наибольшую мнимую часть $\operatorname{Im}\omega$ при заданной $\operatorname{Re}\omega$.

Если выполнены условия глобальной неустойчивости, т. е. уравнение (1) имеет решение ω, такое что

$$\operatorname{Im}\omega > 0 \tag{2}$$

то условие усиления возмущений

$$\operatorname{Im} k(\omega) = 0, \qquad \operatorname{Im}\omega > 0 \tag{3}$$

которое обычно рассматривается как условие неустойчивости в безграничном случае, должно заведомо выполняться [1]. Наоборот, выполнение соотношений (3) не гарантирует неустойчивости системы, имеющей конечную, хотя и сколь угодно большую протяженность по x.

Поэтому при нахождении условий глобальной неустойчивости можно ограничиться рассмотрением случаев, когда соотношения (3) выполняются. Возможность выполнения условий усиления возмущений (3) для плазмы была обнаружена в работе [3]. Существование нарастающих возмущений вытекает также из результатов работы [4] в случае, когда функция распределения плазмы имеет более одного максимума. Дисперсионное уравнение для плазмы получается из кинетических уравнений с самосогласованным полем и имеет вид [4, 5]

$$1+\frac{\Omega^2}{k}\int\frac{\partial f_0(u)}{\partial u}\frac{du}{\omega-ku}=0 \tag{4}$$

Здесь Ω и f_0 определяются уравнениями

$$\Omega^2 f_0(u)=\sum_j\frac{e_j^2}{m_j}f_j(u),\qquad \int f_0(u)\,du=1 \tag{5}$$

Здесь u — x-я составляющая скорости, e_j и m_j — заряд и масса частиц j-го сорта, $f_j(u)$ — их невозмущенная функция распределения.

Функции распределения $f_0(u)$ с несколькими максимумами могут осуществляться путем пропускания через горячую плазму пучков частиц, имеющих некоторый разброс скоростей.

Рассмотрим простейший случай, когда функция $f_0(u)$ имеет два максимума, причем один из них расположен в области

$$u\gg U\qquad U=\left(\int u^2 f_0(u)\,du\right)^{1/2}$$

Кроме того, производная $f_0'(u)$ в этой области достаточно мала. Будем для простоты предполагать, что

$$\int u f_0(u)\,du=0$$

В рассматриваемом случае волны, фазовая скорость которых ω/k порядка U, испытывают сильное затухание. Для волн с большей фазовой скоростью связь ω и k может быть найдена приближенно в явной форме [4, 5]

$$\omega^2\left[1-\frac{\pi i\Omega^2}{k|k|}f_0'\left(\frac{\omega}{k}\right)\right]=\Omega^2\left[1+\frac{3U^2}{\Omega^2}k^2\right] \tag{6}$$

Считая ω действительным и $|\omega|>\Omega$, это уравнение можно разрешить относительно k

$$\operatorname{Re}k_{1,2}=\pm\left[\frac{1}{3U}(\omega^2-\Omega^2)\right]^{1/2} \tag{7}$$

$$Imk_{1,2}=-\frac{\pi}{6U^2}\frac{\Omega^2\omega^2}{|k|^3}f_0'\left(\frac{\omega}{\operatorname{Re}k_{1,2}}\right)$$

Нетрудно убедиться, используя понятие групповой скорости, что волновым числам k_1 и k_2 соответствуют волны, распространяющиеся в противоположные стороны. Легко показать, что если при $\operatorname{Im}\omega=0$ для волны, идущей вправо, величина $\operatorname{Im}k$ меньше, чем величина $\operatorname{Im}k$ для волны, идущей влево, то у уравнения (1) имеется решение ω с $\operatorname{Im}\omega>0$. Так как согласно (7) $\operatorname{Re}k_1=-\operatorname{Re}k_2$, то глобальная неустойчивость имеет место, если для какого-либо $u>U>0$ выполняется неравенство

$$f_0'(u)>f_0'(-u) \tag{8}$$

или, что то же самое, выполняется неравенство

$$u[f_0'(u) - f_0'(-u)] > 0 \qquad (9)$$

при каком-либо u, $|u| > U$. Это условие отличается от условия существования нарастающих возмущений в неограниченной плазме, которое в рассматриваемом случае сводится [3, 4] к выполнению неравенства

$$uf_0'(u) > 0 \qquad (10)$$

при каком-либо u, $|u| > U$. Неравенство (10) гарантирует наличие второго максимума у функции $f_0(u)$. Выполнение неравенства (10) не приводит к неустойчивости плазмы, занимающей большой, но ограниченный объем; неустойчивость имеет место при выполнении неравенства (9).

Отметим, что при сделанных предположениях абсолютной неустойчивости нет, так как в силу (7) равенство $k_1(\omega) = k_2(\omega)$ не выполняется при $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Колебания плазмы в ограниченной области рассматривались ранее в работе [6], причем при $x = {}^1/_2L$ выставлялись условия отражения для частиц плазмы. Так как невозмущенная функция распределения предполагалась в этой работе симметричной по u, т. е. $f_0(u) = f_0(-u)$ (что существенно для применяемого в этой работе метода, основанного на построении стоячих волн), то условие устойчивости, полученное там, совпало с условием (10).

Поступило 5 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. Rolland P. Instabilities and growing waves. Phys. Rev., 1965, vol. 140, No. 38.
3. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. О взаимодействии пучка заряженных частиц с электронной плазмой. Докл. АН СССР, 1949, т. 69, № 4.
4. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, 1946, т. 16, № 7.
5. Стикс Т. Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1965.
6. Montgomery D., Gorman D. Boltzmann — Vlasov equation in a bounded region. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 8.