

потоков. Вдув производился перпендикулярно к направлению основного потока при числах $M_\infty = 2.9$, $M_a = 1$, $R_\infty = 6 \cdot 10^6$, $n = 15.5$, $\delta / d_a = 0.75$. Температура основного потока $T_{0\infty} = 395^\circ \text{K}$, температура торможения вдуваемой струи $T_{0a} = 295^\circ \text{K}$. Вертикальной чертой отмечено положение линии отрыва.

В результате проведенных исследований, которые подтвердили подобие явлений отрыва перед твердым и струйным препятствиями, можно ожидать существование областей с повышенным давлением и тепловым потоком в передней части области отрыва.

Поступило 28 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеевский В. С., Медведев К. И. Физические особенности течения в области отрыва при трехмерном взаимодействии пограничного слоя с ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
2. Lewis C. H., Carlson D. J. Normal shock location in underexpanded gas and gas-particle jets. AIAA Journal, 1964, No. 4. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика. Ж. Америк. ин-та авиации и космонавтики, 1964, № 4.)

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПЕРЕРАСШИРЕННОЙ СТРУИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

И. М. ВАСЕНИН, А. Д. РЫЧКОВ

(Томск)

Излагается расчет перерасширенных струй, использующий особенность сверхзвуковых течений — отсутствие распространения малых возмущений вверх по потоку. Область течения газа разбивается на части таким образом, чтобы на левой и правой границах этих частей течение всегда оставалось сверхзвуковым. После этого проводится последовательный расчет каждой части, причем первой считается та часть области, которая лежит выше остальных вверх по потоку.

Расчет проводится на принципе установления с использованием конечно-разностного метода, позволяющего вести сквозной счет ударных волн. Форма границы струи заранее неизвестна и определяется в процессе решения, причем для ее устойчивого счета вводится осреднение, аналогичное введению искусственного поверхностного натяжения.

В сверхзвуковой перерасширенной струе при определенном числе Маха на срезе сопла и степени перерасширения возникает система ударных волн, состоящая из прямого центрального скачка (диск Маха) и двух косых скачков уплотнений — падающего и отраженного.

Расчет параметров течения в такой стационарной струе возможен, например, методом характеристик везде, где течение остается сверхзвуковым. Для расчета дозвуковой области, возникающей за прямым скачком уплотнения, можно воспользоваться, как это сделано в работе [1], методом интегральных соотношений. Однако такой подход накладывает ограничения на параметры истекающей струи, а именно течение должно быть таким, чтобы в тройной точке скорость потока газа оставалась сверхзвуковой. Ниже это ограничение снимается.

1. Расчет проводится по принципу установления без выделения ударных волн и поэтому нестационарная система уравнений газодинамики для осесимметрического течения газа записывается в виде законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} y\rho + \nabla y\rho U = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} yM + \nabla yMU + \frac{\partial}{\partial x} yp = 0, \quad p = p(\rho, \varepsilon)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} yN + \nabla yNU + \frac{\partial}{\partial y} yp = p, \quad \frac{\partial}{\partial t} ye + \nabla yeU + p\nabla yU = 0,$$

$$U = ui + vj, \quad M = \rho u, \quad N = \rho v, \quad \nabla = \partial / \partial x + \partial / \partial y$$

Здесь U — вектор скорости газа, ρ — плотность газа, p — давление, ε / ρ — удельная внутренняя энергия, i, j — орты осей x и y .

Область течения газа ограничена сверху границей струи, положение которой заранее неизвестно и определяется в процессе решения, снизу — осью симметрии.

Левая и правая границы предполагаются прямыми, положение которых выбирается так, чтобы на них всегда осуществлялся сверхзвуковой режим течения. В этом случае из теории гиперболических уравнений следует, что они имеют пространственный тип [2], и поэтому слева должны быть заданы все параметры, а справа их задавать не нужно. Эта особенность сверхзвуковых течений позволяет вести счет не сразу всей области струи, а по частям. Сначала выбирается в соответствии с изложенными выше принципами положение левой и правой границ так, чтобы область, в которой отыскивается решение системы (1.1), была не слишком большой. Затем каким-либо образом задаются начальные условия и численно находится установившееся решение.

После этого осуществляется переход к расчету следующей части области: прежняя правая граница вместе с полученными на ней значениями всех параметров становится левой, новая правая граница выбирается снова и вся процедура повторяется. Указанный подход позволяет значительно уменьшить требуемую оперативную память ЭВМ и сократить время счета. Выбор правой границы с учетом всех требований легко осуществляется программным путем.

2. Вводятся новые независимые переменные, удобные при решении системы (1.1) разностным методом

$$x_2 = x, \quad \xi = y / \delta(x, t), \quad \tau = t$$

где $y = \delta(x, t)$ — уравнение границы струи. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_2} - \xi \frac{\delta_x}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi \frac{W}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \delta_x &= \frac{\partial}{\partial x} \delta(x, t), & W &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(x, t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $W(x, t)$ — скорость перемещения границы струи по оси y . Удобно перейти к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} u_1 &= u / a_*, & v_1 &= v / a_*, & \rho_1 &= \rho / \rho_0 \\ x_1 &= x_2 / r_0, & \varepsilon_1 &= \varepsilon / \varepsilon_0, & p_1 &= p / p_0 \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0, \rho_0, p_0$ — параметры торможения, a_* — критическая скорость звука, r_0 — радиус выходного сечения сопла.

После подстановки (2.1) и преобразований, позволяющих записать уравнения в форме законов сохранения, система (1.1) запишется (индекс 1 у величин опускается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta^2 \xi \rho + \nabla \xi \delta \rho \Omega &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \delta^2 \xi M + \nabla \xi \delta M \Omega + \frac{\partial}{\partial x} \xi \delta^2 p - \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \delta \delta_x p &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \delta^2 \xi N + \nabla \xi \delta N \Omega + \frac{\partial}{\partial \xi} \delta \xi p &= \delta p \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \delta^2 \xi \varepsilon + \nabla \xi \delta \varepsilon \Omega + p \left[\frac{\partial}{\partial x} \xi \delta^2 u + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \delta (v - \xi \delta_x u) \right] &= 0 \\ p &= p(\rho, \varepsilon) \\ \Omega &= \delta u i + [v - \xi(W + \delta_x u)] j, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Скорость перемещения границы струи $W(x, \tau)$ может быть определена из геометрических построений, приведенных на фиг. 1. На этой фигуре U_n — проекция U на нормаль n к границе струи, α — угол между вектором U и касательной к границе струи η

$$W = U_n \cos \beta, \quad U_n = |U| \sin \alpha, \quad \alpha = \arctg(v/u) - \arctg \delta_x$$

После простых преобразований получается

$$W(x, \tau) = A \left(\frac{1 + \delta_x^2}{u^2 + v^2} (1 + A^2) \right)^{-1/2}, \quad \left(A = \frac{v - u \delta_x}{u + v \delta_x} \right) \quad (2.3)$$

где

Для решения системы (1.2) должны быть заданы начальные и граничные условия.

В качестве граничных условий на левой границе задаются значения параметров струи на срезе сопла, на границе струи — постоянное давление, равное давлению в окружающей среде, и на оси — условие симметрии течения. Начальные значения всех параметров выбирались постоянными, численно равными значениям тех же параметров на левой границе. Начальная форма струи — прямая, параллельная оси x и отстоящая от нее на расстоянии радиуса r_0 выходного сечения сопла.

3. Для численного решения системы (1.2) применялся совместный эйлерово-лагранжев метод (сокращенно СЭЛ), предложенный в работе [3].

Этот метод использует явную разностную схему и имеет второй порядок точности на гладких решениях. Для сквозного счета ударных волн вводится искусственная вязкость, что приводит к размыванию фронта ударных волн на 4–5 ячеек разностной сетки.

Счет организовывался следующим образом. Сначала по формуле (2.2) рассчитывалась величина $W(x, \tau)$, затем из (1.2) и граничных условий находились значения всех искомых величин в момент времени $\tau + \Delta\tau$.

Далее из равенства

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(x, \tau) = W(x, \tau)$$

определялась новая форма границы струи

$$\delta(x, \tau + \Delta\tau) = \delta(x, \tau) + W(x, \tau)\Delta\tau$$

после чего весь цикл вычислений повторялся до тех пор, пока не получалось установившееся решение.

Однако при практическом проведении расчетов оказалось, что счет границы струи неустойчив, причем эта неустойчивость имеет физическую природу [4]. Для устранения этого явления использовалось осреднение границы струи по переменной x , что аналогично введению искусственного поверхностного натяжения. Осреднение производилось на каждом временном слое следующим образом:

$$\delta_c(x, \omega) = \delta(x, \omega) + \varepsilon[\delta(x + \Delta x, \omega) - 2\delta(x, \omega) + \delta(x - \Delta x, \omega)]$$

$$\omega = \tau + \Delta\tau$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, подбираемая опытным путем.

Осредненное значение $\delta_c(x, \tau + \Delta\tau)$ принималось за границу струи. Расчеты показали, что изменение ε в пределах от 0.05 до 0.25 весьма значительно сказывается на форме границы струи и значениях всех параметров течения. Исходя из этого, в расчетах принималось $\varepsilon = 0.1$.

Значения искомых величин в узлах разностной сетки, лежащих на правой границе, определялись двумя способами: 1) сносом всех значений из соседних узлов, лежащих вверх по потоку; 2) линейной экстраполяцией по двум соседним углам, также лежащих вверх по потоку.

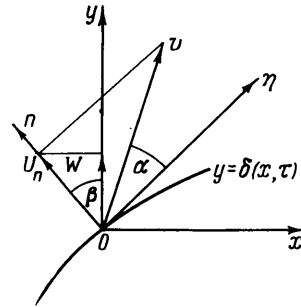
Оба эти способа не выводят точки на правой границе из области зависимости системы (2.1); однако второй способ предпочтительнее, потому что вверх по потоку посылаются гораздо меньшие возмущения. Затухание этих возмущений носит очень быстрый характер и через 3–4 узла составляет $\approx 0.05\%$. В связи с этим при счете по частям переход от одной части к другой проводился с перекрытием частей на 3–4 узла разностной сетки. Сущность перекрытия состоит в следующем. После того как в первой части (фиг. 2, часть 1) получено установившееся решение, граничные условия для левой границы второй части (фиг. 2, часть 2) выбирались не с правой границы первой части, а с прямой, отстоящей от нее на 3–4 узла вверх по потоку. В этом случае влияние погрешностей при счете правой границы практически исключалось.

4. В качестве примера применения изложенного способа рассчитано истечение перерасширенной сверхзвуковой струи из прямого сопла. Поле скоростей на срезе сопла выбрано равномерным, значения параметров взяты из работы [1]

$$M^0 = 2.8, \quad p_\infty / p^0 = 2.5, \quad \gamma = 1.4$$

где M^0 , p^0 — параметры на срезе сопла, p_∞ — давление в окружающей среде, γ — показатель адиабаты.

Область течения, представленная на фиг. 2, разбивалась на три части. Здесь же приведены изобары поля течения, дающие представление о газодинамической картине течения. Самой верхней изобарой является граница струи. Если принять за по-

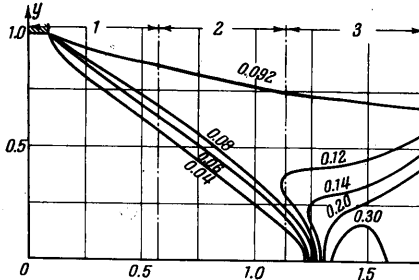


Фиг. 1

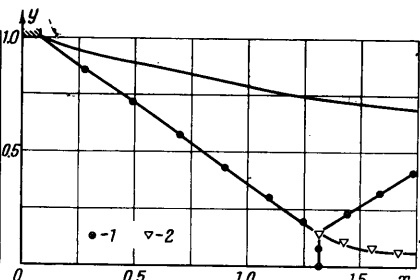
ложение фронтов ударных волн точки перегиба на поверхностях $p(x, \xi, \tau)$, то такие точки достаточно хорошо показывают положение падающего и отраженного косых скачков, а также центрального прямого скачка, изображенных на фиг. 3.

Из тройной точки выходит линия контактного разрыва, положение которой определяется по положению точек перегиба на профиле скорости $u(x, \xi, \tau)$.

Отношение радиуса центрального скачка к радиусу сопла оказалось равным 0.14, в то время как по результатам работы [1] оно составляет 0.18. Экспериментальное



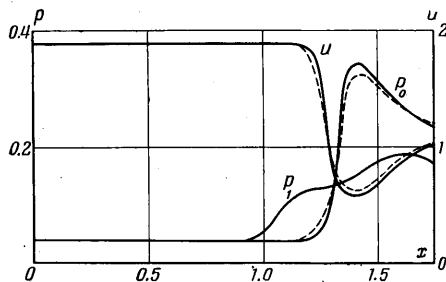
Фиг. 2



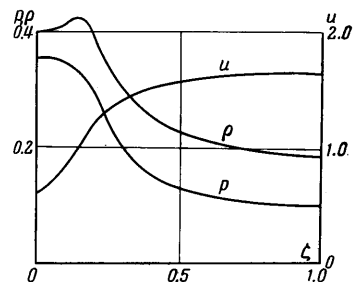
Фиг. 3

значение, приведенное в той же работе, равно 0.12. На фиг. 4 приведены изменения продольной составляющей скорости u и давления p_0 вдоль оси струи ($\xi = 0$) и давление p_1 на средней линии ($\xi = 0.5$), дающие представления о величине размазывания скачков, их положении и интенсивности.

Следует отметить, что величина безразмерной скорости u за прямым скачком равна 0.601, в то время как ее точное значение равно 0.518. Эта разница связана с



Фиг. 4



Фиг. 5

размыванием области прямого скачка и контактного разрыва и может быть уменьшена при использовании более мелкой разностной сетки. Распределение параметров течения поперек струи, соответствующее $x = 1.425$, показано на фиг. 5, причем хорошо виден контактный разрыв на кривой изменения плотности. Значения шагов разностной сетки в переменных (x, ξ) были выбраны $\Delta x = 0.025$ и $\Delta \xi = 0.025$ в каждой из частей области (фиг. 2). Контроль за точностью проводился на основе вычисления интегральных законов сохранения массы и полного импульса. При этом закон сохранения массы выполнялся с относительной точностью $\approx 0.3\%$, полного импульса — с точностью $\approx 0.1\%$. Увеличение шага разностной сетки по оси x вдвое несколько увеличивает ширину размазывания области прямого скачка и практически не влияет на значения параметров в области течения с небольшими градиентами. Результаты расчетов с $\Delta x = 0.05$ и $\Delta \xi = 0.025$ приведены в виде пунктирных кривых на фиг. 4.

Поступило 23 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ашратов Э. А. Расчет осесимметричной струи, вытекающей из сопла, при давлении в струе, меньшем давления в окружающей среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
3. Нох В. Ф. СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды. М., Гостехиздат, 1954.