КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ БЕЗВИХРЕВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

О. В. РЫСЕВ *(Москва)*

Рассматриваются безвихревые осесимметричные движения газа. Соотношения, выполняемые вдоль характеристик, для таких движений оказываются уравнениями Пфаффа от трех переменных. Путем введения двух специальных функций условия совместности для осесимметричного течения преобразуются к каноническому виду, аналогичному и для плоского течения. Эти функции удовлетворяют условиям совместности и являются частными решениями характеристических уравнений.

Пусть ось x совпадает с осью симметрии, ось r — перпендикулярна к ней, v_x и v_r — компоненты скорости в направлении осей координат, a — скорость звука, a_* — критическая скорость звука, γ — показатель адиабаты, $\varkappa = 1/(\gamma-1)$.

Безвихревые движения газа, обладающие осевой симметрией, описываются уравнениями неразрывности, отсутствия вихрей и уравнением Бернулли [1]

$$\frac{\partial}{\partial r} a^{2\varkappa} v_r r + \frac{\partial}{\partial x} a^{2\varkappa} v_x r = 0, \qquad \frac{\partial v_r}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$v_r^2 + v_x^2 + 2\varkappa a^2 = (1+2\varkappa) a_*^2$$

При этом вдоль характеристик первого семейства

$$dv_r + \frac{(v_x^2 - a^2)\, dv_x}{v_x v_r - a\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{a^2 v_r}{v_r^2 - a^2} \frac{dr}{r}, \qquad \left(\frac{dr}{dx}\right)_1 = \frac{v_r v_x + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \tag{2}$$

Вдоль характеристик второго семейства

$$dv_r + \frac{(v_x^2 - a^2)\, dv_x}{v_x v_r + a\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{a^2 v_r}{v_r^2 - a^2} \frac{dr}{r}, \qquad \left(\frac{dr}{dx}\right)_2 = \frac{v_r v_x - a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \tag{3}$$

Если в первых уравнениях (2) и (3) выразить v_x с помощью интеграла Бернулли, то получим уравнения Пфаффа, связывающие переменные a, v_r и r. Непосредственным вычислением можно установить, что условие полной интегрируемости не выполняется и, следовательно, характеристические соотношения (2), (3) могут быть сведены к следующему каноническому виду [2]

$$d\varphi_{1,2} + K_{1\,2} \psi_{1,2}^{-1} d\psi_{1,2} = 0 \tag{4}$$

Здесь φ_i, K_i, ψ_i $(i = 1, 2)$ — некоторые функции от a, v_r, r; индексы 1, 2 приписываются соответственно характеристикам первого и второго семейства.

По аналогии с одномерными неустановившимися течениями, обладающими осевой или центральной симметрией [3], введем в рассмотрение функции

$$2\varphi = v_r^2 + 2\varkappa a^2 = (1+2\varkappa) a_*^2 - v_x^2, \qquad \psi = a^{2\varkappa} v_r r^{\nu-1} \qquad (\nu = 2) \tag{5}$$

Будем считать, что $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, т. е. что характеристические соотношения имеют вид

$$d\varphi + K_{1,2} \psi^{-1} d\psi = 0 \tag{6}$$

и постараемся определить функции K_1 и K_2. Подставляя в (6) вместо φ и ψ их выражения из (5), получаем

$$\frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r v_x (K_{1,2} + a^2)}{K_{1,2}(v_r^2 - a^2)} \frac{dv_x}{dr} = \frac{a^2 v_r}{r(v_r^2 - a^2)}$$

Для того чтобы последние уравнения совпадали с условиями совместности, необходимо положить

$$\frac{v_r v_x (K_{1,2} + a^2)}{K_{1,2}(v_r^2 - a^2)} = \frac{1}{(dr/dx)_{2,1}} \quad \text{или} \quad K_{1,2} = \frac{v_x v_r a^2 (dr/dx)_{2,1}}{v_r^2 - a^2 - v_r v_x (dr/dx)_{2,1}}$$

Заменяя $(dr/dx)_{2,1}$ соответствующими выражениями (2) и (3), будем иметь

$$K_{1,2} = \pm \frac{v_x v_r a}{\sqrt{v^2 - a^2}}$$

При этом условия совместности примут вид

$$d\varphi \pm \frac{v_x v_r a}{\sqrt{v^2 - a^2}} \frac{d\psi}{\psi} = 0 \tag{7}$$

Знак плюс берется при движении по характеристике первого семейства, знак минус — по характеристике второго семейства.

Заметим, что условия (7) имеют место и в случае плоского течения, для которого постоянная ν в (5) равна единице.

Из условий совместности (7) непосредственно следует, что исходной системе уравнений (1) удовлетворяет тривиальное решение

$$\varphi = \mathrm{const}, \qquad \psi = \mathrm{const} \tag{8}$$

Течение, описываемое этим решением, возникает при наложении на течение от цилиндрического источника (стока) некоторого добавочного течения с постоянной скоростью, параллельной оси источника.

Так как решение (8) получено из характеристических соотношений, то соответствующее течение является сверхзвуковым.

Если рассматриваемое течение не является тривиальным, т. е. не описывается решением (8), и вдоль некоторой линии L в плоскости течения функции $\psi(x, r)$, $\varphi(x, r)$ постоянны, то эта линия является характеристикой. Действительно, в противном случае в характеристическом треугольнике, ограниченном частью линии L и двумя характеристиками противоположных семейств, решение задачи Коши для уравнений (1) с данными $\psi(x, r) = \mathrm{const}$, $\varphi(x, r) = \mathrm{const}$ на линии L совпадает с (8), что невозможно по предположению.

Заметим, что если течение гиперзвуковое и с точностью до малых высшего порядка

$$v_x = \sqrt{v^2 - a^2}$$

то условия совместности (7) совпадают с соответствующими условиями совместности в случае нестационарных течений с симметрией [3].

Поступило 20 V 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель А. И., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. изд. 2. М., Физматгиз, 1969.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1953.
3. Рысев О. В. Некоторые особенности разлета в пустоту газового шара. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 3.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНОЙ СТРУЕЙ, ВДУВАЕМОЙ ЧЕРЕЗ КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ В ПЛАСТИНЕ

В. С. АВДУЕВСКИЙ, К. И. МЕДВЕДЕВ, М. Н. ПОЛЯНСКИЙ

(Москва)

Рассматривается течение, образующееся при взаимодействии сверхзвукового потока с поперечной звуковой или сверхзвуковой струей, вдуваемой перпендикулярно к направлению основного потока через круглое отверстие в плоской стенке. Перед струей за счет торможения набегающего потока повышается давление. Вследствие этого происходит отрыв пограничного слоя, наросшего на стенке перед соплом вдува. Схема течения в области взаимодействия струи с внешним потоком представлена на фиг. 1. Образовавшаяся трехмерная зона отрыва отклоняет набегающий поток от стенки, и перед струей возникает сложная система скачков уплотнения. Кроме того, в самой струе также образуется пространственная система скачков.

Целью исследования является выяснение физических особенностей обтекания сверхзвуковым потоком вдуваемой струи и установление основных зависимостей для геометрических характеристик течения от параметров набегающего потока и вдуваемой струи.

1. Экспериментальное исследование области взаимодействия вдуваемой струи с набегающим потоком проводилось при следующих условиях. Число Маха набегающего потока было равно 2.1, 2.9 и 3.7; число Рейнольдса, рассчитанное в плоскости симметрии течения по длине пластины до линии отрыва и параметрам набегающего потока, изменялось в диапазоне $2 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^7$, что соответствовало турбулентному пограничному слою. Степень нерасчетности n вдуваемой струи газа, равная отношению статического давления во вдуваемой струе к статическому давлению набегающего потока, изменялась от 0 до 200. Число Маха вдуваемой струи $M_a = 1.0$, 1.96