

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ СТЕНКАМИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Ф. Г. ЧЕРЕМИСИН

(Москва)

Задача об одномерной стационарной теплопередаче в разреженном газе, состоящем из жестких сферических молекул, решается в строгой постановке на основе кинетического уравнения Больцмана. Метод численного решения основан на вычислении интегралов столкновений по небольшому числу случайных испытаний в сочетании с интегральными итерациями кинетического уравнения. Кроме профилей температуры и плотности при различных числах Кнудсена удается исследовать вид функции распределения молекул по скоростям. Полученные результаты сравниваются с известными приближенными решениями задачи.

Исследование теплопередачи в разреженном газе составляет одну из классических задач кинетической теории. Интерес к ней вызван, с одной стороны, стремлением понять физические особенности явления передачи тепла в газе в условиях, далеких от локального термодинамического равновесия, с другой стороны, задача об однородном стационарном потоке тепла является одной из простейших и может служить для сравнения и проверки различных методов расчета движений разреженного газа.

Основной целью данной работы было испытание и отработка метода точного численного интегрирования уравнения Больцмана. Рассматриваемый пример движения разреженного газа удобен также наличием имеющего ясный физический смысл инварианта задачи — постоянного вдоль направления x значения теплового потока. Из-за отсутствия к настоящему времени точных решений уравнения Больцмана это обстоятельство является важным, так как может служить для проверки точности предлагаемого метода решения.

Газ предполагался одноатомным и однокомпонентным, состоящим из упругих жестких сферических молекул. В качестве граничных условий на стенках было принято условие полной аккомодации и функция распределения отраженных от каждой стенки частиц предполагалась максвелловской с температурой стенки и плотностью, определяемой из условия непротекания

$$\int_{\xi < 0} \xi f(\xi, \rho, 0) d\xi = \frac{n_1 \sqrt{T_1}}{2\pi}, \quad \int_{\xi > 0} \xi f(\xi, \rho, L) d\xi = \frac{n_2 \sqrt{T_2}}{2\pi} \quad (\rho^2 = \eta^2 + \xi^2) \quad (1)$$

Здесь n_1, T_1 и n_2, T_2 — плотность отраженного потока и температура холодной и горячей стенок соответственно. Задача решалась для отношения температур стенок $T_2/T_1 = 4$. За единицы температуры и плотности принимались температура холодной стенки и средняя плотность газа. Таким образом, параметр разреженности — число Кнудсена K — определялся по средней плотности.

В строгой постановке задача состоит в решении кинетического уравнения Больцмана (2) с граничными условиями (1) и (3).

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} = -v f + N$$

$$v = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1 g \sin \theta \cos \theta d\theta d\epsilon d\xi_1 \quad (2)$$

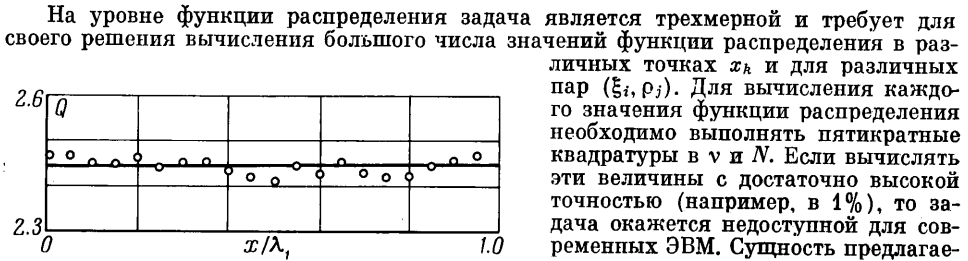
$$N = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f' f_1' g \sin \theta \cos \theta d\theta d\epsilon d\xi_1$$

$$g = |\xi - \xi_1|$$

$$f(\xi, \rho, 0) = \frac{n_1}{(2\pi T_1)^{3/2}} \exp - \frac{\xi^2 + \rho^2}{2T_1}, \quad f(\xi, \rho, L) = \frac{n_2}{(2\pi T_2)^{3/2}} \exp - \frac{\xi^2 + \rho^2}{2T_2} \quad (3)$$

$$\xi > 0 \qquad \qquad \qquad \xi < 0$$

В уравнении (2) аргументами функций f_1, f' и f_1' являются соответственно векторы скорости ξ_1, ξ' и ξ_1' . Компоненты векторов ξ' и ξ_1' сложным образом выражаются через компоненты векторов ξ и ξ_1 и параметры столкновения θ и ϵ [1].



Фиг. 1

Карло по небольшому числу розыгрышей в сочетании с интегральными итерациями уравнения (2). Интегральный характер итераций должен обеспечить устойчивость счета. После того как в каждой точке x_k будет найден массив значений функции распределения $f(\xi_i, \rho_j)$, интегрируя эти значения, можно надеяться получить достаточно гладкие и надежные профили макроскопических величин.

В рассматриваемом примере вычисление пятикратных интегралов v_k и N_k в заданной точке x_k проводилось всего по 32 розыгрышам, каждый из которых определяет пятимерный случайный вектор $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta, \epsilon)$.

Для проверки независимости результата от числа испытаний проводились также расчеты по 96 случайным точкам.

Интегральная формула итераций связывает значение функции распределения f_k в точке x_k с ее значением в точке x_{k-1} для $\xi > 0$ и в точке x_{k+1} для $\xi < 0$

$$f_k^{(n)} = \left[f_{k-1}^{(n)} \exp - \frac{\Delta x}{2\xi} v_{k-1}^{(n-1)} + \frac{N_{k-1}^{(n-1)}}{v_{k-1}^{(n-1)}} \left(1 - \exp - \frac{\Delta x}{2\xi} v_{k-1}^{(n-1)} \right) \right] \exp - \frac{\Delta x}{2\xi} v_k^{(n-1)} + \frac{N_k^{(n-1)}}{v_k^{(n-1)}} \left(1 - \exp - \frac{\Delta x}{2\xi} v_k^{(n-1)} \right) \quad (4)$$

Аналогичное выражение для случая $\xi < 0$. Формуле (4) соответствует ступенчатая аппроксимация функции распределения по переменной x .

Итерации в граничных условиях проводятся так, что плотность отраженных частиц в n -м приближении определяется по потоку на стенку в предыдущей итерации.

Итерации начинались со свободномолекулярного решения $K = \infty$. Сходимость устанавливалась по поведению физических величин: плотности, температуры, средней скорости и теплового потока. При достижении сходимости профили плотности и температуры не меняются от итерации к итерации, тепловой поток становится не зависящим от координаты, а средняя скорость в пределах ошибки счета — равной нулю. Для получения решения с меньшим числом Кнудсена в качестве нулевого приближения использовалось ранее полученное решение с большим числом K .

На фиг. 1 для числа $K = 1.05$ приведены значения теплового потока, вычисленные в различных точках x . Как видно, постоянство теплового потока выполняется с большой точностью. Средняя квадратичная ошибка не превышает 1.5%.

На фиг. 2, а приводятся профили температуры для различных значений K . Для сравнения пунктиром нанесен профиль температуры, полученный из решения релаксационного кинетического уравнения с частотой, определенной по теплопроводности (λ — модель).

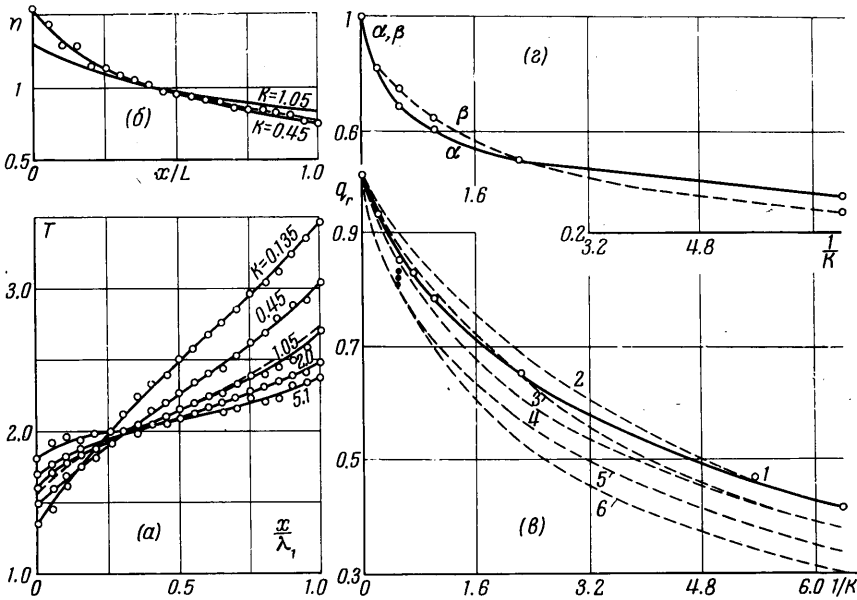
На фиг. 2, б даны профили плотности для двух значений числа K . Следует отметить значительную асимметричность профилей плотности, которая возрастает с уменьшением параметра K . Плотность газа у холодной стенки для $K = 0.45$ примерно в 1.5 раза превышает среднюю плотность.

Пунктиром для $K = 1.05$ приведено распределение плотности согласно λ -модели.

Как видно из фиг. 2, а и 2, б, наибольшую ошибку модель Крукса обнаруживает в профиле плотности вблизи горячей стенки. Здесь максимальное отклонение от решения уравнения Больцмана составляет около 8% по отношению к абсолютной величине плотности и около 30% по отношению к отклонению плотности от ее среднего значения. Профиль температуры описывается релаксационной моделью значительно лучше и ошибка здесь составляет не больше 3%. Следует также отметить, что как по профилю плотности, так и по профилю температуры релаксационная модель занижает число K : решение по модели для данного числа Кнудсена ближе соответствует решению уравнения Больцмана с меньшим K . Если вместо λ -модели

взять релаксационную модель с частотой, определяемой из условия совпадения коэффициента вязкости (μ -модель), то расхождение будет значительно больше.

На фиг. 2, *в* зависимость теплового потока, отнесенного к его свободномолекулярному значению, от $1/K$ сравнивается с расчетами по различным приближенным



Фиг. 2

теориями (данные взяты из работы [2]) и с расчетами по λ -модели, предоставленными автору Е. М. Шаховым. Точность приводимых значений теплового потока для уравнения Больцмана несколько выше для больших чисел K и ниже для малых; для $K = 1.05$ она не хуже 3%, для $K = 0.135$ точность около 5%. Оценка точности проводилась по разбросу значений теплового потока, вычисленных в различных точках x_k около значения $Q = \text{const}$ с учетом ошибки в интегрировании функции распределения, величина которой была установлена сравнением рассчитанного свободномолекулярного значения Q_0 с его теоретическим значением.

Решение уравнения Больцмана дано сплошной кривой 1. Штриховые кривые изображают: 2 — четырехмоментное нелинейное решение, 3 — линейризованное четырехмоментное решение Гросса и Зиринга, 4 — решение λ -модели, 5 — линейризованное восьмимомментное решение Гросса и Зиринга, 6 — решение μ -модели; черными точками нанесены результаты расчетов Хевиленда для $K = 2$.

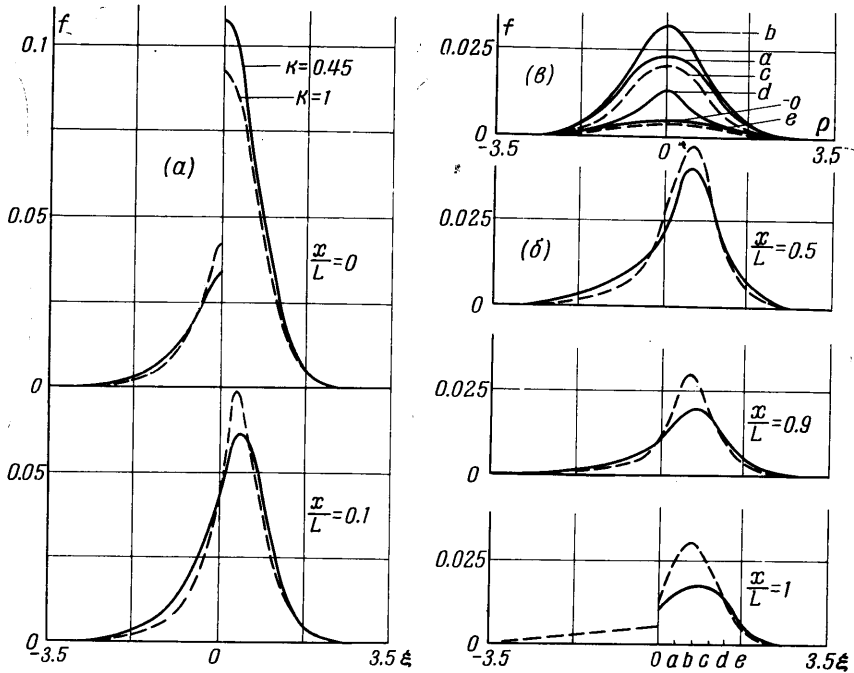
На фиг. 2, *г* даны зависимости относительных скачков температуры на холодной α и горячей β стенках от $1/K$; при этом

$$\alpha = (T(0) - T_1) / (T_1 - T_0), \quad \beta = (T(L) - T_2) / (T_2 - T_0)$$

Здесь T_1 и T_2 — температуры холодной и горячей стенок, T_0 — температура газа в свободномолекулярном режиме.

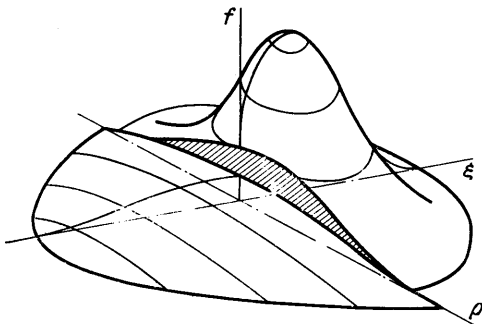
Хотя предложенный метод решения уравнения Больцмана в первую очередь предназначен для расчета макроскопических величин, его точность в рассмотренном примере оказалась достаточной и для изучения поведения функции распределения.

На фиг. 3, *а* и *б* для двух значений числа K даются профили функции распределения $f(\xi, 0, x)$ в точках на холодной стенке ($x = 0$), вблизи нее ($x = 0.1L$), в точках $x = 0.5L$ и $x = 0.9L$, на горячей стенке ($x = L$). Интересно отметить, что вид функции распределения вблизи горячей и холодной стенок различен. На холодной стенке как для отлетающих частиц ($\xi > 0$), так и для падающих ($\xi < 0$) максимум функции распределения находится в нуле. На горячей стенке функция распределения отлетающих молекул также максвелловская, но с температурой в четыре раза большей, однако максимум функции распределения падающих молекул уже не при $\xi = 0$, а при некотором положительном значении скорости.



Фиг. 3

На фиг. 3, а приведены профили функции распределения по переменной ρ , вычисленные в различных сечениях ξ , указанных на фиг. 3, б. На фиг. 4 на основе



Фиг. 4

на основе фиг. 3, б и в дана реконструкция функции распределения как функции двух переменных ξ и ρ на горячей стенке.

В работе [3] приводятся некоторые результаты решения уравнения Больцмана методом Нордсика в задаче о теплопередаче для отношения температур стенок $T_1/T_2 = 0.7$ (линейный случай). К сожалению, авторы не приводят профилей физических величин в зависимости от координаты, что затрудняет сравнение. Сравнение расположения кривой $q(K)$ по отношению к графикам теплового потока для четырехмоментного приближения и решения релаксационного уравнения

показывает хорошее согласие наших результатов с результатами работы [3]. Расчеты выполнялись на машине БЭСМ-6 ВЦ АН СССР.

Автор благодарит Е. М. Шахова за предоставление результатов численного решения релаксационного уравнения.

Поступило 20 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Navil and J. K. The solution of two molecular flow problems by the Monte-Carlo method. Methods in Computational Physics, Advances in Research and Applications, Applications in Hydrodynamics. N.—Y., 1965, vol. 4, p. 109—209. (Рус. перев.: В сб. «Вычислительные методы в динамике разреженных газов», М., «Мир», 1969.)
3. Yen S. M., Schmidt H. J. Monte-Carle solutions of the Boltzmann equation for heat transfer problems. Rarefied Gas Dynamics, New York — London, Acad. Press. 1969, vol. 1, p. 205—213.