

6. Молокович Ю. М., Скворцов Э. В., Чилап А. Я. Некоторые приближенные решения одномерных задач фильтрации упругой вязко-пластичной жидкости. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1969, т. 129, кн. 2.
7. Чилап А. Я., Непримеров Н. Н., Молокович Ю. М. Определение зоны притока к скважине с начальным градиентом сдвига. Тр. Азерб. ин-та нефти и химии, 1967, вып. 26.
8. Непримеров Н. Н., Пудовкин М. А., Марков А. И. Особенности теплового поля нефтяного месторождения. Изд. Казанск. ун-та, 1968.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
10. Лейбензон Л. С. Собр. тр., т. 4, Изд. АН СССР, 1955.
11. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.
13. Градштейн И. М., Рыжик И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ МАЛКУСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ, В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

Показано путем численного расчета, что гипотеза Малкуса о нейтральной устойчивости профиля осредненной скорости турбулентного потока к внешним возмущениям не подтверждается.

1. В 1956 году Малкусом [1] была выдвинута феноменологическая теория для описания установившихся турбулентных потоков в каналах.

Согласно этой теории осредненный турбулентный профиль скорости должен (а) разыскиваться в классе нейтрально устойчивых профилей в смысле гидродинамической теории устойчивости и (б) обладать в этом классе максимальной скоростью диссипации энергии.

Конкретные расчеты были проведены для течения в плоском канале при дополнительном предположении о выпуклости профиля скорости. Используя довольно грубые асимптотические оценки при решении уравнения Орра — Зоммерфельда, Малкус рассчитал профиль скорости. При этом найденная из теоретических соображений константа Кармана оказалась в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Теория Малкуса привлекла внимание гидромехаников. На международном конгрессе по турбулентности в Марселе (1961 г.) она детально обсуждалась Таунсендом [2] и Шпигелем [3], которые признали гипотезы Малкуса правдоподобными. Позднее Нихоль [4] предпринял попытку обосновать подход Малкуса на основе принципа Пригожина для установившихся диссипативных процессов. Савулеску и Настази [5], следуя Малкусу, провели теоретический расчет профиля осредненной скорости в турбулентном пограничном слое и получили известный закон «одной седьмой».

Однако проверка расчетов [1], предпринятая Рейнольдсом и Тидерманом [6], показала, что асимптотические оценки Малкуса были неудовлетворительны и, в частности, экспериментальный турбулентный профиль скорости при $R_0 = 25\,000$ оказался не нейтрально устойчивым, а глубоко устойчивым. Кроме того, оказалось, что среди нейтрально устойчивых профилей с заданным R_* можно найти профили, обеспечивающие сколь угодно большую диссипацию энергии.

Тем не менее Нихоль [7] отнес различие в результатах [1] и [6] за счет более или менее удачно выбранной асимптотической аппроксимации. Нихоль склонялся к малкусовой теории и пытался ее обосновать при помощи результатов Серрина в нелинейной теории устойчивости (хотя и признавал, что прямой связи между результатами Серрина и теорией Малкуса нет).

В работе [8] Нихоль вновь ставит под сомнение результаты, полученные на основе уравнения Орра — Зоммерфельда. Однако, если предположить бесконечную малость возмущений и не учитывать их взаимодействия с турбулентными пульсациями, как это принято во всех цитированных работах по малкусовой теории, то справедливость уравнения Орра — Зоммерфельда для возмущенного движения непосредственно следует из уравнения Навье — Стокса.

2. Здесь, как и в работах [1, 6], рассматривается напорное турбулентное течение несжимаемой жидкости в плоском канале. При рассмотрении гидродинамической устойчивости важна тщательная аппроксимация опытных данных, особенно в вязком подслое и переходной области, которые существенно влияют на величину R_* .

Аппроксимация профиля скорости $U(y)$ проводится на основе уравнения динамики

$$\frac{dU}{dy} + R_0 l^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \frac{dU}{dy} = U_0' (1 - y), \quad (0 \leq y \leq 2), \quad U_0' = \left(\frac{dU}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.1)$$

записанным в безразмерной форме. За масштаб скорости принята средняя по каналу скорость потока, за масштаб длины — полуширина канала, R_0 — число Рейнольдса потока, построенное по этим масштабам и молекулярной вязкости, y — поперечная координата. Длина пути смещения $l(y)$ аппроксимируется зависимостью

$$l = H[1 - \exp\{-y + (2 - y)/A\}]^n \quad (2.2)$$

Здесь $H(y)$ — полином четвертой степени, такой что

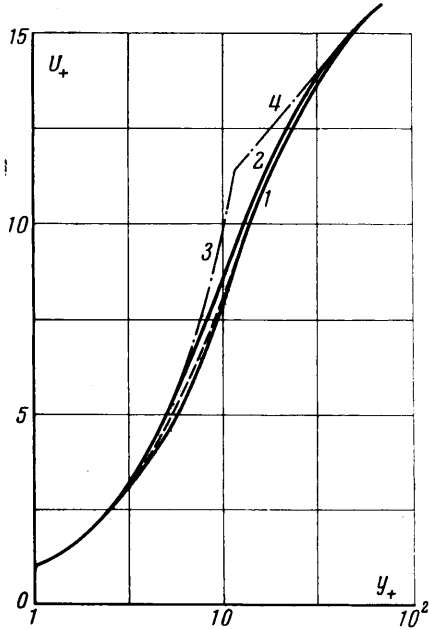
$$H = 0, \quad \frac{dH}{dy} = \kappa \quad (y = 0)$$

$$H = l_0, \quad \frac{dH}{dy} = \frac{d^2H}{dy^2} = 0 \quad (y = 1)$$

т. е. выполнены условия симметрии, а у стенок $H \approx \kappa y$. Полиномиальная зависимость для длины пути смещения хорошо себя зарекомендовала при аппроксимации широкого круга экспериментальных данных [9]. Множитель при H в формуле (2.2) является обобщением поправки Ван Дриста [10] для длины пути смещения в вязком подслое (в [10] $n = 1$), причем $y_+ = y \sqrt{U_0' R_0}$.

При интегрировании (2.1) используются дополнительные условия

$$U(0) = 0, \quad \int_0^1 U dy = 1$$



Фиг. 1

Опытные данные в рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса $R_0 \sim 10^4 \div 10^5$ хорошо аппроксимируются при следующих значениях параметров:

$$\kappa = 0.4, \quad l_0 = 0.14, \quad A = 200, \quad n = 0.5$$

Наиболее ответственной за устойчивость является форма профиля скорости в вязком подслое и переходной зоне, т. е. в области больших градиентов и кривизны профиля, где аппроксимационные ошибки могут быть наиболее значительны. На фиг. 1 представлены профили скорости в вязком подслое и переходной зоне:

- а) профиль, полученный при осреднении большого числа опытных данных [11], — кривая 1;
- б) профиль скорости, устойчивость которого изучена в работе [6], — кривая 2;
- в) профиль, используемый в данной работе, — пунктирная линия. Штрих-пунктирными линиями нанесены зависимости $U_+ = y_+$ (кривая 3) и $U_+ = 5.5 + 5.75 \lg y_+$ (прямая 4). Здесь

$$U_+ = U / v_*, \quad v_* = \sqrt{U_0' / R_0}$$

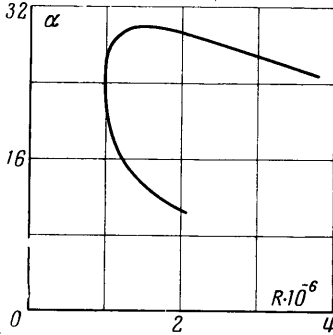
— безразмерная динамическая скорость. Аппроксимация профиля скорости в данной работе ближе соответствует опытным данным, что является существенным для более точного определения величины критического числа Рейнольдса R_* .

3. Задача об устойчивости изучается в той же постановке, что и в [1-7]. Фактически исследуется устойчивость гипотетического ламинарного течения, профиль скорости которого совпадает с профилем осредненной скорости реального турбулентного потока. В рамках линейной теории это исследование сводится к анализу собственных значений уравнения Орра — Зоммерфельда [11]

$$\varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi = i\alpha R [(U - C)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi] \quad (0 \leq y \leq 2) \quad (3.1)$$

$$\varphi = \varphi' = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.2$$

Здесь $\varphi(y)$ — комплексная амплитуда функции тока возмущенного движения; α — волновое число возмущения; $C = X + iY$ — собственное значение, причем X — фазовая скорость возмущения, Y определяет его экспоненциальное развитие во времени ($Y < 0$ соответствует затуханию); R — число Рейнольдса, которое является формальным параметром и априори никак не связано с числом Рейнольдса потока R_0 . Если для исследуемого профиля скорости $U(y)$ критическое число Рейнольдса R_* , определенное на основе (3.1), совпадет с R_0 , то первая часть гипотезы Малкуса подтвердится.



Фиг. 2

В работах [4, 6] при решении (3.1) использовались асимптотические методы. Невозможность контролировать точность асимптотических оценок дала основание Нихоллу [7, 8] поставить под сомнение расхождение результатов [1] и [6], хотя, по мнению авторов, асимптотическая техника в работе [6] более эффективна.

В последнее время разработаны прямые численные методы, позволяющие находить собственные значения (3.1) с заданной точностью при произвольных значениях α и R [12]. Это позволяет провести контрольные расчеты, не связанные с асимптотическими погрешностями. В данной работе собственные значения находились с точностью трех значащих цифр.

На фиг. 2 нанесен «носик» нейтральной кривой для экспериментального профиля при $R_0 = 25\,000$. При этом $R_* = 980\,000$, $\alpha_* = 24$, $X_* = 0.15$, что находится в качественном согласии с данными [6]. Касательное расхождение объясняется различной точностью аппроксимации экспериментальных данных в вязком подслое и переходной зоне.

Вычисления были проведены и для других значений R_0 из диапазона $5000 \leq R_0 \leq 25\,000$. Результаты представлены на фиг. 3. Точки соответствуют вычисленным параметрам и хорошо ложатся на прямые

$$R_* = aR_0, \quad \alpha_* = bR_0, \quad a = 39.2, \quad b = 0.00096 \quad (3.2)$$

Критическая точка y_c ($U(y_c) = X$), соответствующая «носик» нейтральной кривой, с ростом R_0 стремится к стенке, однако, в универсальных координатах ее значение остается постоянным $y_{c+} = 0.88$.

На фиг. 4 представлена зависимость $Y(\alpha)$ (кривая 1) для наиболее опасных возмущений в случае $R_0 = 25\,000$, $R = 10^6$ которая свидетельствует, что неустойчивость связана лишь с волновыми числами $\alpha \approx 24$, а возмущения с большими и меньшими α во всем диапазоне $0 < \alpha < \infty$ затухают.

Кривая 2 отражает положение критической точки y_{c+} в зависимости от волнового числа. При $\alpha \rightarrow \infty$ y_{c+} стремится к стенке. Существенно, что для наиболее ответственных за устойчивость возмущений $y_{c+} < 1$ и $\alpha \gg 1$.

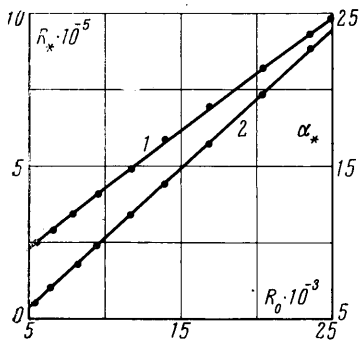
Исследования авторов [13] показали, что при таких больших волновых числах α собственная функция практически отлична от нуля лишь в малой окрестности критической точки $|y - y_c| \lesssim 1/\alpha$. Величина соответствующего собственного значения при этом существенно зависит от формы профиля в этой окрестности и практически не зависит от формы профиля вне ее. Так как критическая точка нейтрального возмущения находится в вязком подслое, то точность аппроксимации профиля скорости на этом участке существенно влияет на результат. В частности, различие в аппроксимациях данной работы и [6] привело к тому, что в данной работе получен коэффициент a в формуле (3.2) порядка сорока, а в работе [6] он порядка десяти.

Вообще говоря, подбором формы профиля скорости в вязком подслое и переходной зоне можно добиться, чтобы $a = 1$, т. е. профиль будет гранично устойчивым, как это получено в работах [1, 5]. Но тогда не следует ожидать хорошего совпадения с опытом для характеристик, связанных с вязким подслоем. И действительно, Малкус признал, что не смог получить удовлетворительного совпадения с опытом для трения на стенке.

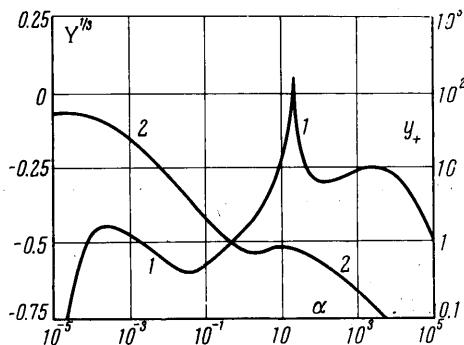
Требование максимальной диссипации только усугубляет положение. Поскольку $y_c \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, деформация профиля на весьма малом участке вблизи стенки скажется только на возмущениях с весьма большими α , причем можно добиться, чтобы эти волновые числа были много больше α_* . Таким образом, можно деформировать профиль в глубине вязкого подслоя, оставая его нейтрально устойчивым. При этом диссипацию энергии (соответственно величину dU/dy) можно сделать сколь угодно большой, что также находится в согласии с выводами [6].

Основное значение имеет то обстоятельство, что критические точки для нейтрального и близких к нему возмущений лежат в вязком подслое, а соответствующие волновые числа достаточно велики.

Согласно свойствам локальности собственные значения в этом случае практически не зависят от формы профиля скорости вне вязкого подслоя и переходной зоны. Произвольная деформация профиля скорости вне этой зоны практически не повлияет на декременты указанных возмущений. Таким образом, требование нейтральной устойчивости не позволяет однозначно определить форму профиля вне вязкого подслоя и переходной зоны.



Фиг. 3



Фиг. 4

С другой стороны обнаружено, что с ростом заполненности профиля (т. е. с увеличением диссипации энергии) R_* возрастает (см., например, фиг. 3). Фиксируя произвольно большой градиент скорости на стенке, можно «ухудшить» (причем различными способами) профиль скорости таким образом, чтобы он стал нейтрально устойчивым.

Следовательно, даже если требования Малкуса и выполнялись бы для экспериментального профиля, то они не позволили бы найти этот профиль однозначно. Только выделяя специальный класс пробных профилей, можно получить константу Кармана или закон «одной седьмой».

4. Проведенный численный анализ позволяет сделать следующие выводы:

а) критическое число Рейнольдса для профилей скорости, близких к экспериментальному более чем на порядок, выше числа Рейнольдса, при котором эти профили реализуются;

б) критическое число Рейнольдса растет пропорционально числу Рейнольдса потока;

в) среди нейтрально устойчивых профилей найдутся профили, отвечающие сколь угодно большой диссипации энергии;

г) нейтрально устойчивые профили с заданной диссипацией энергии могут иметь произвольную форму вне вязкого подслоя и переходной области.

Таким образом, основные гипотезы Малкуса о граничной устойчивости осредненного турбулентного потока к бесконечно малым возмущениям не подтверждаются.

Устойчивость же осредненных турбулентных полей к конечным возмущениям является экспериментальным фактом. Если в начальный момент времени возмутить функции распределения энергии по частотам турбулентных пульсаций, то довольно быстро в потоке восстановится равновесное распределение энергии и профиль осредненной скорости.

Следовательно, осредненные турбулентные поля не обладают свойством нейтральной устойчивости. Данные расчеты, как и в [6], свидетельствуют о глубокой устойчивости осредненных полей скорости даже без учета стабилизирующего влияния рейнольдсовых напряжений, связанного с непосредственным их взаимодействием с возмущениями.

Противореча гипотезам Малкуса, полученные результаты не закрывают, однако, путь для феноменологического описания турбулентности на основе свойств устойчивости. Указывая на глубокую устойчивость турбулентных полей, они, в частности, косвенно свидетельствуют в пользу принципа максимальной устойчивости, развиваемого в работах [14, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Malkus W. V. R. Outline of a theory of turbulent shear flow. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt 5, p. 521.
2. Townsend A. A. Remarks on the Malkus theory of turbulent flow. Collog. Internat. Centre Nat. Rech. Sci., 1962, No. 108, pp. 167—180.
3. Spiegel E. A. On the Malkus theory of turbulence. Collog. Internat. Centre Nat. Rech. Sci., 1962, No. 108, pp. 181—199.
4. Nihoul J. C. J. Description hamiltonienne des phenomenes irreversibles stationnaires et elements d'une theorie de la turbulence. J. Mecanique, 1967, vol. 6, No. 3.
5. Savulescu S., Nastase A. Theoretische Ableitung des turbulenten Geschwindigkeitsprofils auf Grund des Minimums der Gesamtenergie der Schwankungen. Wiss. Z. Tech. Univ. Dresden, 1967, Bd 16 Nr 4.
6. Reynolds W. C., Tiederman W. G. Stability of turbulent channel flow with application to Malkus's theory. J. Fluid. Mech., 1967, vol. 27, pt 2.
7. Nihoul J. C. J. Tentative Lagrangian for the Determination of the Mean Velocity Profile in turbulent channel flow by a Hamiltonian Principle. Z. angew. Math. und Mech., 1968, Bd 48, H. 8.
8. Nihoul J. C. J. On a principle of «Minimum Reynolds number» and the Malkus theory of turbulent channel flow. Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, 1969, vol. 38, No. 3, 4.
9. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1964.
10. Van Driest E. R. On turbulent flow near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 11.
11. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
12. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
13. Гольдштик М. А., Сапожников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости. ПМТФ, 1970, № 2.
14. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 5.
15. Гольдштик М. А., Кутателадзе С. С. Вычисление константы пристенной турбулентности. Докл. АН СССР 1969, т. 185, № 3.

ДИСКРЕТНЫЕ ВИХРИ В ПЛОСКОМ СЛЕДЕ ПРИ $M_\infty < 1$ И НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ У ПЛАСТИНКИ

О. М. КУЗНЕЦОВ, С. Г. ПОПОВ, В. В. ФЕОКТИСТОВ

(Москва)

Экспериментами в аэродинамической трубе количественно и качественно показано распространение волн плотности над пластиной при нулевом угле атаки и числах $M_\infty < 1$; частота колебаний плотности в этой области одинакова с частотой дискретных вихрей, образующихся в следе пластинки.

При исследовании использовался теневой прибор ИАБ-451 с параллельным пучком света в схеме расфокусированной диафрагмы и шпирен-интерферометра со съемкой высокочастотной камерой СФР.

Формирование дискретных вихрей в расходящиеся двухрядные дорожки с шахматным расположением вихрей в плоских следах за различными профилями при $M_\infty < 1$ есть периодический регулярный процесс [1, 2], связанный с пограничными слоями на обеих боковых сторонах профиля, которые питают вязкий след, а также с окружающим внешним потоком. Поэтому все параметры течения в пограничном слое профиля также должны быть периодическими по времени, пусть даже заметными только в области вблизи задней части профиля.

Для изучения этих процессов в аэродинамической трубе с прямоугольной перфорированной рабочей частью $32 \times 25 \text{ см}^2$ создавалось нестационарное распределение плотности над поверхностью плоской пластины длиной $l = 100 \text{ мм}$, толщиной $d = 5 \text{ мм}$, при нулевом угле атаки и числах $M_\infty = 0.4$, $Re = lV_\infty / \nu = 10^6 \div 2 \cdot 10^6$ [3]. При этом применялся способ Теллера в схеме расфокусированной нити [4-6] и в схеме шпирен-интерферометра [7-9]; в обоих случаях применялась для фотографирования высокочастотная камера СФР с оптической коммутацией [10].