

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА В КАНАЛЕ, ВЫЗВАННОЕ ДВИЖЕНИЕМ ПОРШНЯ, ПРИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ОТВОДЕ ЭНЕРГИИ И ВЫСВЕЧИВАНИИ ГАЗА

А. Б. ВАТАЖИН

(Москва)

Рассмотрено одномерное нестационарное течение газа, вызванное движением поршня, при наличии слабых возмущающих сил и источников тепла. Указан класс возмущающих факторов, при котором исследование возмущенного (относительно обычного автомодельного режима) движения сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены распределения параметров газа между поршнем и ударной волной. Выяснены условия, при которых происходит ускорение или замедление ударного фронта. В качестве примера рассмотрено нестационарное движение проводящего газа в канале со сплошными электродами в режиме генерирования электроэнергии и течение газа с учетом излучения в предположении оптической прозрачности среды. Развита теория использована для решения задачи о движении тонкого клина с большой сверхзвуковой скоростью во внешнем осевом магнитном поле с учетом высвечивания слоя нагретого газа между клином и ударной волной.

Изучение нестационарных магнитогидродинамических течений в каналах представляет значительный интерес как в связи с разработкой нестационарных магнитогидродинамических устройств, так и проведением общих исследований по магнитной газовой динамике на установках импульсного действия.

При анализе указанных нестационарных течений в первую очередь необходимо выяснить основные особенности прохождения ударных волн и плазменных сгустков через зону магнитного поля. При этом в ряде случаев необходимо учитывать влияние на течение газа и радиационных эффектов.

Полное решение таких задач в настоящее время представляет очень сложную проблему. Поэтому весьма перспективным представляется рассматривать упрощенные модели магнитогидродинамического течения, которые тем не менее позволили бы получить качественные результаты.

В качестве модели ниже выбирается нестационарное течение газа в канале постоянного сечения, возникающее вследствие движения поршня с постоянной скоростью. Скорость поршня считается значительно превышающей скорость звука покоящегося газа, так что в области между поршнем и ударной волной газ имеет достаточно высокую температуру, становится электропроводным и может излучать энергию. В результате взаимодействия газа с внешним магнитным полем на внешней нагрузке, соединяющей установленные на стенках канала электроды, выделяется электроэнергия. Вследствие силового воздействия на поток, джоулевой диссипации энергии и отвода энергии излучением распределение газодинамических параметров за ударной волной и скорость ее движения будут отличаться от обычных газодинамических значений.

Следует заметить, что одномерные магнитогидродинамические течения уже давно изучаются различными авторами. Ряд общих вопросов теории одномерных нестационарных магнитогидродинамических течений был рассмотрен в работе [1]. Исследованы автомодельные режимы течения в случае достаточно большой [2, 3] (в пределе — бесконечной [4, 5]) проводимости газа. Общая формулировка автомодельных задач о магнитогидродинамическом течении теплопроводного газа приведена в [6-8]. Было также изучено влияние электрического и магнитного полей на распространение детонационных волн [9].

Основной особенностью исследуемых ниже нестационарных движений является их неавтомодельность и конечность проводимости газа (в экспериментах на ударных трубах и электроразрядных установках проводимость $\sigma \leq 10$ мо/см). Некоторые вопросы распространения ударных волн в каналах при таких условиях без учета излучения ранее были рассмотрены в работах [10, 11].

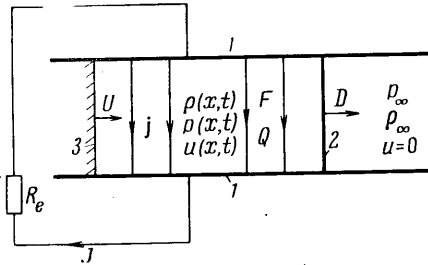
Для упрощения анализа в данной работе предполагается, что индуцированные магнитные поля невелики, среда представляет собой совершенный газ и излучает как оптически прозрачное тело (при этом окружающие газ поверхности также считают-

ся оптически прозрачными), и условия протекания процесса таковы, что исходные уравнения можно линеаризовать относительно невозмущенного (магнитным полем и радиационными эффектами) автомодельного течения.

В целях получения наиболее общих результатов ниже находится решение уравнений возмущенного течения газа без конкретизации возмущающих факторов (сил и источников тепла). Далее отдельно рассматривается магнитогидродинамическое течение в режиме генерирования электроэнергии, течение газа с излучением и движение при воздействии обоих указанных факторов.

В конце работы развитая теория используется для описания движения тонкого клина с большой сверхзвуковой скоростью во внешнем осевом магнитном поле с учетом излучения нагретого слоя газа между клином и ударной волной.

1. Рассмотрим одномерное нестационарное течение совершенного газа с постоянными теплоемкостями, вызванное движением плоского поршня со скоростью $U = \text{const}$, в случае, когда в области между ударной волной и поршнем происходит тепловыделение (телопоглощение) с объемной интенсивностью Q и на разогретый (за ударной волной) газ действует объемная продольная сила F (фиг. 1, 1 — электроды, 2 — ударная волна, 3 — поршень).



Фиг. 1

Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} \rho^\circ &= \rho_* \rho, & p^\circ &= p_* p, \\ T^\circ &= (U^2 / R) T, & u^\circ &= U u, & F &= F_* f, \\ Q &= Q_* q \end{aligned}$$

$$\left(\rho_* = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty, \quad p_* = \rho_\infty \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} U^2, \right.$$

$$\left. T = \frac{p}{\rho} \right) \quad (1.1)$$

Здесь ρ, p, T и u — соответственно безразмерные плотность, давление, температура и скорость газа; F_*, Q_* и f, q — характерные и безразмерные плотности действующих сил и источников тепла; R и γ — газовая постоянная и отношение удельных теплоемкостей, индексом ∞ обозначаются параметры покоящегося газа, верхний индекс \circ приписывается размерным величинам.

В безразмерных переменных (1.1) система уравнений, описывающая течение газа в области $Ut < x < X(t)$ (x — размерная текущая координата, X — размерная координата, соответствующая ударной волне, t — время), имеет следующий вид:

$$\frac{1}{U} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \rho \left(\frac{1}{U} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{U} \varepsilon f \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{U} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{U} (\gamma - 1) \varepsilon q \Lambda$$

$$\left(\varepsilon = \frac{(\gamma - 1) F_*}{\rho_\infty U (\gamma + 1)}, \quad \Lambda = \frac{Q_*}{U F_*} \right)$$

$$p = \frac{(\gamma - 1) r}{\gamma (\gamma + 1)} + (\gamma - 1) u \frac{D}{U}, \quad \rho = \left[1 + \frac{2r}{\gamma - 1} \left(\frac{D}{U} \right)^{-2} \right]^{-1} \quad \text{при } x = X(t)$$

$$D / U = \frac{1}{4} (\gamma + 1) u + \sqrt{\left[\frac{1}{4} (\gamma + 1) \right]^2 u^2 + r} \quad (D = dX / dt, \quad r = \gamma p_\infty / \rho_\infty U^2) \quad (1.3)$$

$$u = 1 \quad \text{при } x = Ut \quad (1.4)$$

Рассмотрим класс течений, когда величины f и q могут быть выражены через функции u , p , ρ , D и некоторые постоянные параметры. В этом случае система уравнений (1.2) — (1.4) является замкнутой: в результате ее решения определяются функции u , p , ρ и D .

В дальнейшем будем предполагать, что параметр $\Lambda \sim 1$, а безразмерная величина $\varepsilon t \ll 1$. Последнее условие оказывается всегда выполненным для начальных моментов времени. В том же случае, когда возмущающие факторы (силы и тепловыделение) относительно малы, это условие имеет место и для больших значений t .

Сделанные предположения позволяют искать решение системы (1.2) — (1.4) в виде следующих рядов по степеням εt :

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \varepsilon t p_1(\eta) + (\varepsilon t)^2 p_2(\eta) + \dots & (\eta = x / Ut) & \quad (1.5) \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon t \rho_1(\eta) + (\varepsilon t)^2 \rho_2(\eta) + \dots, & u &= 1 + \varepsilon t u_1(\eta) + (\varepsilon t)^2 u_2(\eta) + \dots \\ (D/U) &= \eta_0 + \varepsilon t \eta_1 + (\varepsilon t)^2 \eta_2 + \dots & (\eta_0, \eta_1, \dots = \text{const}) & \end{aligned}$$

Постоянные величины ρ_0 , p_0 и η_0 , соответствующие решению задачи о поршне при $\varepsilon = 0$, представляются следующими известными выражениями:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{(\gamma - 1) \eta_0^2}{m}, & p_0 &= \frac{(\gamma - 1) (\gamma \eta_0 + r)}{\gamma (\gamma + 1)}, & \eta_0 &= \frac{v + 1}{4} + \kappa & (1.6) \\ (m &= (\gamma - 1) \eta_0^2 + 2r, & \kappa &= \sqrt{[1/4(\gamma + 1)]^2 + r}) \end{aligned}$$

Подставляя (1.5) в систему (1.2) — (1.4), для возмущений первого порядка малости получим уравнения

$$\begin{aligned} \rho_0 u_1' - \rho_1' (\eta - 1) + \rho_1 &= 0 \\ \rho_0 u_1 - \rho_0 u_1' (\eta - 1) + p_1' &= f_0 & (1 < \eta < \eta_0, \frac{d\xi}{d\eta} = \xi') & \\ \left(\begin{aligned} p_1 - p_1' (\eta - 1) + \gamma p_0 u_1' &= (\gamma - 1) \Delta q_0 & (1.7) \\ \rho_1(\eta_0) = \frac{(\gamma^2 - 1) \eta_0^2 r}{\kappa m^2} u_1(\eta_0) & & p(\eta_0) = \frac{(\gamma - 1) \eta_0^2}{(\gamma + 1) \kappa} u_1(\eta_0) u_1(1) = 0 \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Входящие в эту систему величины f_0 и q_0 вычисляются по однородным распределениям $u = 1$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$ и поэтому являются постоянными.

Возмущение скорости ударной волны (величина η_1) находится с помощью (1.3) после определения функций u_1 , p_1 и ρ_1 и выражается формулой

$$\eta_1 = \frac{(\gamma + 1) \eta_0}{4\kappa} u_1(\eta_0) \quad (1.8)$$

Решение системы (1.7) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_1 &= b(\eta - 1), & p_1 &= k + e(\eta - 1), & \rho_1 &= b[-\rho_0 + g(\eta - 1)] \\ \eta_1 &= \frac{(\gamma + 1) b \eta_0 (\eta_0 - 1)}{4\kappa}, & b &= \frac{(\gamma + 1) \kappa}{(\gamma - 1) s} [(\gamma - 1) \Delta q_0 + f_0 (\eta_0 - 1)], \\ k &= \frac{\eta_0 - 1}{s} [(\gamma - 1) \eta_0^2 \Delta q_0 - f_0 \kappa (\gamma \eta_0 + r)], & e &= f_0 & (1.9) \\ g &= \frac{\kappa (\gamma - 1) \eta_0^2 m + (\gamma^2 - 1) (\eta_0 - 1) r \eta_0^2}{\kappa m^2 (\eta_0 - 1)} & (s &= (\gamma \eta_0 + r) \kappa + \eta_0^2 (\eta_0 - 1)) \end{aligned}$$

Полученные формулы дают возможность рассчитать возмущенное движение газа при задании величин q_0 и f_0 . Ниже эти выражения будут использованы для анализа магнитогидродинамического течения с учетом излучения.

2. Рассмотрим движение газа в плоском канале постоянной высоты h , когда внешнее магнитное поле приложено перпендикулярно к плоскости течения: $\mathbf{B} = (0, 0, B_* = \text{const})$. Пусть стенки канала представляют собой бесконечные электроды, соединенные между собой внешней нагрузкой R_e , разность потенциалов $\Delta\varphi$ между которыми в течение процесса подерживается постоянной (фиг. 1).

При большой интенсивности ударной волны ($r = 0$) температура газа в области $Ut < x < X$, $0 < y < h$ становится настолько высокой, что газ делается электропроводным и начинает взаимодействовать с магнитным полем. Будем изучать генераторный режим течения, когда от потока отводится электроэнергия.

В случае достаточно малых магнитных чисел Рейнольдса, когда, как нетрудно показать, можно пренебречь не только индуцированным магнитным, но и вихревым электрическим полями, распределение электрического тока, электромагнитных сил и источников тепла в области $Ut < x < X$, $0 < y < h$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (0, j, 0), \quad j = \sigma^\circ A, \quad F = \frac{\sigma^\circ}{c} B_* A \quad \left(A = \frac{\Delta\varphi}{h} - \frac{u^\circ}{c} B_* \right) \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_* B_*^2 (\gamma - 1)}{c^2 \rho_\infty (\gamma + 1)}, \quad \Lambda = 1, \quad f = -\sigma(u - K), \quad q = \sigma(u - K)^2 \\ f_0 &= -\sigma_0(1 - K), \quad q_0 = \sigma_0(1 - K)^2 \quad \left(K = \frac{c\Delta\varphi}{UB_*h} \right) \\ \left(F_* &= \frac{\sigma_*}{c^2} UB_*^2, \quad Q_* = \frac{\sigma_*}{c^2} U^2 B_*^2, \quad \sigma^\circ = \sigma_* \sigma, \quad \sigma^\circ = \Phi(p^\circ, \rho^\circ) \right) \\ \sigma_* &= \Phi(p_*, \rho_*), \quad \sigma = \frac{\Phi(p_* p_1, \rho_* \rho_1)}{\Phi(p_*, \rho_*)}, \quad \sigma_0 = \frac{\Phi(p_* p_0, \rho_* \rho_0)}{\Phi(p_*, \rho_*)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{j} — вектор плотности электрического тока, $\Delta\varphi = \varphi(x, 0) - \varphi(x, h)$ — постоянная разность потенциалов между нижним и верхним электродами, σ° — размерная проводимость среды, которая может быть выражена через плотность и давление газа (функция Φ — заданная характеристика газа), σ_* — характерная проводимость, рассчитываемая по параметрам p_* и ρ_* , определенным формулами (1.1), σ и σ_0 — безразмерные проводимости (при этом $\sigma_0 = \text{const}$ соответствует однородным параметрам (1.6)), $K = \text{const}$ — параметр нагрузки, характеризующий эффективность преобразования энергии потока в электроэнергию и изменяющийся в диапазоне $(0, 1)$.

Подставляя найденные выражения для f_0 и q_0 в (1.9), найдем параметры возмущенного движения газа.

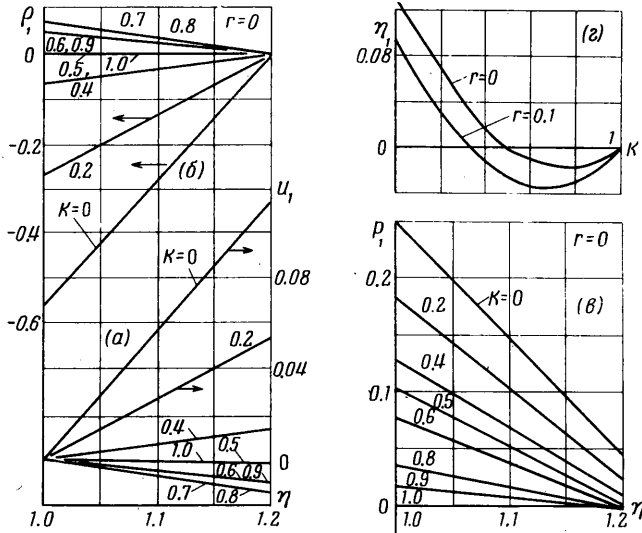
Исследуем полученные формулы в случае очень сильных ударных волн ($r = 0$).

Прежде всего заметим, что характер изменения параметров u_1 и ρ_1 в сжатом слое газа зависит от величины параметра нагрузки K . При $0 < K < 0.5$ наличие магнитного поля приводит к увеличению скорости газа ($u_1 \geq 0$) и скорости движения ударной волны ($\eta_1 > 0$) и уменьшению плотности в сжатом слое ($\rho_1 \leq 0$). При этом скорость и плотность газа возрастают от поршня к ударной волне. Если $K = 0.5$, то $u_1 \equiv 0$, $\rho_1 \equiv 0$, и, следовательно, магнитное поле не оказывает влияния на распределение скорости и плотности газа. Заметим, что при $K = 0.5$ на внешней нагрузке выделяется максимальная мощность.

Когда же $0.5 < K < 1$, то магнитогидродинамическое взаимодействие сопровождается уменьшением скоростей движения газа и ударного фронта и увеличением плотности между ударной волной и поршнем: $u_1 \leq 0$,

$\eta_1 \leq 0$, $\rho_1 \geq 0$. Скорость и плотность газа в этом случае убывают по направлению к ударной волне. Наибольшее (количественное) воздействие магнитного поля на поток наблюдается при $K = 0$ (в режиме короткого замыкания, когда мощность N на внешней нагрузке равна нулю). При $K = 1$ (режим холостого хода; $N = 0$, $j = 0$) влияние поля на течение прекращается.

Давление газа в сжатом слое между ударной волной и поршнем возрастает по направлению к поршню при всех K . Величина $p_1(1)$ монотонно убывает от максимального значения при $K = 0$ до нуля при $K = 1$. Таким образом, давление на поршне при наложении магнитного поля возрастает, притом тем значительнее, чем меньше K .



Фиг. 2

Заметим, что работа W , затрачиваемая на поддержание движения поршня с постоянной скоростью U , выражается через давление на поршне следующим образом:

$$\begin{aligned}
 W &= \rho_{\infty} h U^3 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \int_0^1 [p_0 + \epsilon t p_1(1) + \dots] dt = \\
 &= \rho_{\infty} h U^3 t \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[p_0 + \frac{\epsilon t}{2} p_1(1) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Указанные выше особенности изменения параметров газа легко объясняются с помощью общего решения (1.9), которое показывает, что наличие теплоисточников ($q_0 > 0$) вызывает увеличение скорости ударной волны, а наличие тормозящей силы ($f_0 < 0$) — уменьшение ее скорости. Результирующий эффект зависит от того, какой из двух указанных факторов оказывается более существенным. При относительно малых K преобладает эффект джоулева тепловыделения, а при относительно больших K возрастает роль тормозящей силы.

Результаты расчетов по формулам (1.9), (2.1), выполненных при $\gamma = 1.4$, $r = 0$, представлены на фиг. 2. Первые три фигуры (2, а, б, в) иллюстрируют изменение скорости, плотности и давления между поршнем ($\eta = 1$) и ударной волной ($\eta = \eta_0 = 1.2$). На фиг. 2, г показана функция $\eta_1 = \eta_1(K)$, характеризующая изменение скорости движения ударного

фронта при наличии магнитного поля. Нижняя кривая соответствует параметрам $\gamma = 1.4$, $r = 0.1$. Как следует из фиг. 2, с увеличением сопротивления влияние магнитного поля на скорость фронта становится сильнее при K , близких к единице (наблюдается большее замедление ударной волны), и слабее — при $K \rightarrow 0$ (поле вызывает меньшее ускорение волны).

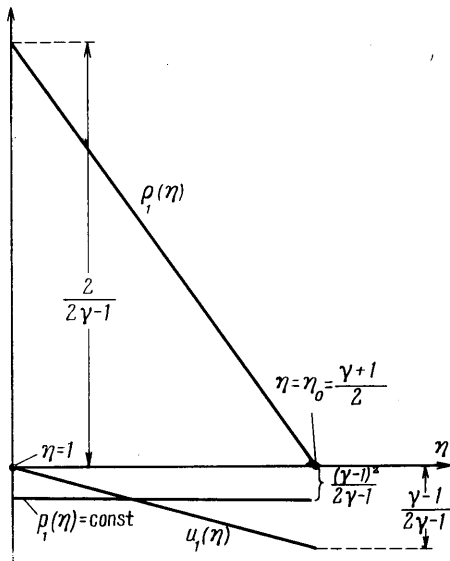
3. Развитый выше общий метод может быть использован для оценки влияния радиационных эффектов на динамику движения ударной волны и распределение газодинамических параметров в области между ударной волной и поршнем. Необходимость учета излучения газа объясняется его очень высокой температурой в случае сильных ударных волн.

Предположим, что в области $Ut < x < X$ газ излучает, как оптически прозрачное тело, и ограничен оптически прозрачными поверхностями. В этом случае объемные потери энергии газа вследствие излучения выражаются следующей формулой [12]:

$$Q = -\frac{4\Sigma T^{\circ 4}}{l^{\circ}}, \quad l^{\circ} = \psi(p^{\circ}, \rho^{\circ}).$$

Здесь Σ — постоянная Стефана — Больцмана, l° — размерная длина пробега излучения, вычисленная по Планку [12]. Функция ψ является известной характеристикой среды.

Выражения для возмущающих факторов, входящих в системы (1.2) и (1.7), в данном случае имеют вид



Фиг. 3

$$\varepsilon = \frac{4\Sigma U^6(\gamma - 1)}{R^4 l_* \rho_{\infty}(\gamma + 1)}, \quad \Lambda = 1$$

$$f = 0, \quad f_0 = 0$$

$$q = -\frac{T^4}{l} = -\frac{p^4}{l \rho^4}, \quad q_0 = -\frac{p_0^4}{l_0 \rho_0^4}$$

$$Q = Q_* q, \quad l^{\circ} = l_* l, \quad Q_* = \frac{4\Sigma U^8}{R^4 l_*}$$

$$l_* = \psi(p^*, \rho^*) \quad (3.1)$$

$$l = \frac{\psi(p_* p_1, \rho_* \rho_1)}{\psi(p_*, \rho_*)}$$

$$l_0 = \frac{\psi(p_* p_0, \rho_* \rho_0)}{\psi(p_*, \rho_*)}$$

Напомним, что параметры p_0 и ρ_0 выражаются по формулам (1.6), а ρ_* и p_* — соотношением (1.1).

Подставляя формулы (3.1) в (1.9), найдем распределение газодинамических параметров в сжатом слое.

Наличие излучения приводит к уменьшению скоростей газа и ударной волны, давления и толщины сжатого слоя газа по сравнению с обычным газодинамическим течением.

При $r = 0$ функции u_1 , p_1 и ρ_1 имеют следующий вид:

$$u_1 = -\frac{2\theta(\eta - 1)}{2\gamma - 1}, \quad p_1 = -\frac{\theta(\gamma - 1)^2}{2\gamma - 1}, \quad \rho_1 = \frac{2\theta}{2\gamma - 1} \left[1 - \frac{2(\eta - 1)}{\gamma - 1} \right]$$

$$\eta_1 = -\frac{\theta(\gamma^2 - 1)}{2\gamma - 1} \quad \left(\theta = -q_0 = \frac{(\gamma - 1)^4}{16l_0} \right) \quad (3.2)$$

Зависимости (3.2) при $\theta = 1$ показаны на фиг. 3.

4. В том случае, когда на течение между поршнем и ударной волной оказывают влияние электромагнитные силы (см. п. 2) и радиационные эффекты (см. п. 3), плотности возмущающих факторов f_0 и q_0 можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma_* B_*^2 (\gamma - 1)}{c^2 \rho_\infty (\gamma + 1)}, \quad \Lambda = 1, \quad f = -\sigma(u - K), \quad f_0 = -\sigma_0(1 - K) \\ q &= \sigma(u - K)^2 - \Pi \frac{T^4}{l}, \quad q_0 = \sigma_0(1 - K)^2 - \Pi\theta \quad (4.1) \\ \left(K &= \frac{c\Delta\varphi}{UB_*h}, \quad \Pi = \frac{4\Sigma U^6 c^2}{R^4 l_* \sigma_* B_*^2}, \quad \theta = \frac{T_0^4}{l_0}, \quad F_* = \frac{\sigma_*}{c^2} B_*^2 U \right) \end{aligned}$$

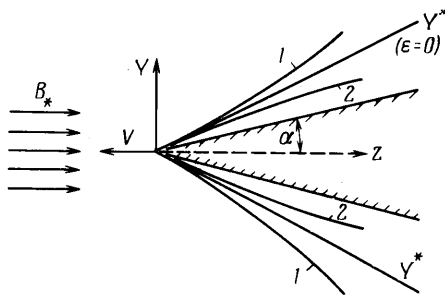
Величины σ_0 , σ_* и l_0 , l_* соответственно определены формулами (2.1) и (3.1).

Подставляя выражения (4.1) в (1.9), в случае $r = 0$ получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_1 &= n(\eta - 1) \quad \left(n = \frac{1}{2\gamma - 1} [\sigma_0(1 - K)(1 - 2K) - 2\Pi\theta] \right) \\ p_1 &= -\frac{\Pi\theta(\gamma - 1)^2}{2\gamma - 1} + \frac{\sigma_0(1 - K)(\gamma - 1)}{2(2\gamma - 1)} [\gamma + 2(1 - K)(\gamma - 1)] - \\ &- \sigma_0(1 - K)(\eta - 1), \quad \rho_1 = n \left[\frac{2(\eta - 1)}{\gamma - 1} - 1 \right], \quad \eta_1 = \frac{n}{4}(\gamma^2 - 1) \quad (4.2) \end{aligned}$$

Как следует из полученных выражений, $u_1 \leq 0$, $\eta < 0$ и $\rho_1 \geq 0$ при всех K , если только $(\Pi\theta/\sigma_0) > 0.5$. Плотность и скорость газа в этом случае убывают по направлению к ударной волне. Давление газа всегда возрастает по направлению к поршню. На поршне возмущенное давление газа оказывается отрицательным при всех K , если $(\Pi\theta/\sigma_0) > (3\gamma - 2)/(2(\gamma - 1))$.

5. Полученные выше результаты можно использовать для решения задачи о движении тонкого клина с большой сверхзвуковой скоростью $V = \text{const}$ в однородном внешнем магнитном поле B_* , коллинеарном с направлением V , при учете излучения газа, прошедшего ударную волну (фиг. 4).



Фиг. 4

Система уравнений, описывающая движение газа между ударной волной и телом, в системе координат zY (фиг. 4) получается добавлением к правой части уравнения импульсов в проекции на ось Y величины F , а к правой части уравнения энергии — величины Q ; эти величины определяются формулами

$$F = -\frac{\sigma^\circ v_Y^\circ}{c^2} B_*^2, \quad Q = \frac{\sigma^\circ v_Y^{\circ 2}}{c^2} B_*^2 - \frac{4\Sigma T^{\circ 4}}{l^\circ} \quad (5.1)$$

В этих выражениях v_Y° — проекция вектора абсолютной скорости газа на ось Y ; σ° , T° и l° — размерные электропроводность, температура и планковский пробег излучения в сжатом слое между ударной волной и телом.

Выражения (5.1) справедливы при малых магнитных числах Рейнольдса, равном нулю внешнем электрическом поле и оптической прозрачности газа¹.

Будем считать, что $M_\infty \operatorname{tg} \alpha \sim 1$ или $M_\infty \operatorname{tg} \alpha \gg 1$ (M_∞ — число Маха набегающего потока, α — полуугол раскрытия клина, $\alpha \ll 1$). Известно, что при выполнении указанных условий исследование обтекания тонкого тела на основании гипотезы плоских сечений сводится к задаче о нестационарном одномерном течении газа, вызванном движением поршня. Предполагая, что соответствующие оценки порядка величин газодинамических параметров не изменяются при учете магнитогидродинамических и радиационных эффектов (что имеет место при умеренной их величине), можно использовать гипотезу плоских сечений и для решения сформулированной выше задачи при наличии возмущающих факторов (5.1).

Пренебрегая в исходной системе уравнений для обтекания клина величинами более высокого порядка малости и производя замену переменных по формулам

$$t = \frac{z}{V}, \quad V \frac{dY^*}{dz} = D, \quad V \operatorname{tg} \alpha = U, \quad v_{Y^\circ} = u^\circ, \quad Y = x \quad (5.2)$$

(где $Y^*(z)$ — уравнение ударной волны), получаем уравнения для определения p° , ρ° , u° , D , которые после перехода к безразмерным переменным (1.1) преобразуются в систему (1.2)–(1.4), в которой надо положить

$$\varepsilon = \frac{\sigma_* B_*^2 (\gamma - 1)}{c^2 \rho_\infty (\gamma + 1)}, \quad \Lambda = 1, \quad f = -\sigma u, \quad q = \sigma u^2 - \Pi \frac{T^4}{l} \quad (5.3)$$

Величины, входящие в (5.3), имеют такой же смысл, как в (4.1).

Используя для решения задачи метод возмущений (см. п. 4) и затем возвращаясь к исходным переменным, найдем следующие распределения параметров между клином и ударной волной (при $r = 0$):

$$\begin{aligned} v_{Y^\circ} &= V \operatorname{tg} \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon z}{V} u_1(\eta) + \dots \right) \\ \left(\eta &= \frac{Y}{z \operatorname{tg} \alpha}, \quad 1 < \eta < \eta_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \right) \\ p^\circ &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty V^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\varepsilon z}{V} p_1(\eta) + \dots \right) \\ \rho^\circ &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_\infty \left(1 + \frac{\varepsilon z}{V} \rho_1(\eta) + \dots \right), \quad \frac{dY^*}{dz} = \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{\varepsilon z}{V} \eta_1 + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь функции u_1 , ρ_1 , p_1 и величина η_1 вычисляются по формулам (4.2), в которых надо положить $K = 0$.

Интегрируя последнее соотношение в (5.4), определяем форму ударной волны

$$Y^* = z \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\gamma + 1}{2} + \frac{\varepsilon z}{2V} \eta_1 + \dots \right) \quad (5.5)$$

¹ Задача об обтекании клина конечного угла раскрытия при учете излучения сжатого слоя газа (предполагаемого оптически прозрачной средой) и $B = 0$ рассматривалась с помощью метода возмущений в работе [13].

Сила сопротивления G , действующая на одну сторону клина единичного размаха и длины z , выражается формулой

$$G = \rho_{\infty} V^2 z \operatorname{tg}^3 \alpha \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma - 1}{2} + \frac{\varepsilon z}{2V} p_1(1) + \dots \right] \quad (5.6)$$

Как показывают полученные выражения, при наличии магнитного поля ($\varepsilon \neq 0$) и отсутствии излучения ($\Pi = 0$) ударная волна отходит от поверхности клина более резко, чем при $\varepsilon = 0$ (кривые 1 на фиг. 4), и сопротивление последнего возрастает. Когда же магнитное поле равно нулю, но имеет место излучение газа (в этом случае в формулах надо положить $\sigma_0 = 0$, а вместо ε использовать параметр $\varepsilon\Pi$), то ударная волна прижимается ближе к клину (кривые 2 на фиг. 4), а его сопротивление уменьшается.

В общем случае, при совместном учете радиационных и магнитогидродинамических эффектов ударная волна более быстро отходит от поверхности клина (по сравнению со случаем $\varepsilon = 0$), если $\sigma_0 > 2\Pi\theta$, а сопротивление клина возрастает, если $\sigma_0 > 2\Pi\theta [(\gamma - 1) / (3\gamma - 2)]$. При изменении знака неравенств влияние магнитного поля и излучения на форму ударной волны и сопротивление клина оказывается противоположным.

Поступило 30 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

- Whitman G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics. Commun. Pure and Appl. Math., 1959, vol. 12, No. 1, pp. 113—158.
- Карликов В. П., Коробейников В. П. О движении плоского поршня в среде с конечной проводимостью с учетом влияния электромагнитного поля. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5, стр. 970—972.
- Коробейников В. П., Рязанов Е. В. О влиянии магнитного поля на распространение плоских и цилиндрических ударных волн. ПМТФ, 1962, № 1, стр. 47—51.
- Коробейников В. П. Одномерные автомодельные движения проводящего газа в магнитном поле. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 4, стр. 613—615.
- Коробейников В. П. Об одномерных движениях газа в магнитном поле, сопровождающихся ударными волнами. ПМТФ, 1960, № 2, стр. 47—53.
- Волосевич П. П., Леванов Е. И. Одномерные автомодельные движения теплопроводного проводящего газа в магнитном поле. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6, стр. 1096—1106.
- Волосевич П. П., Леванов Е. И. Автомодельная задача о движении плоского поршня в теплопроводном газе при наличии замороженного магнитного поля. В кн. «Численные методы решения задач математической физики», М., «Наука», 1966, стр. 87—102.
- Волосевич П. П. Движение газа перед поршнем в магнитном поле в случае нелинейной теплопроводности и проводимости. В кн. «Численные методы решения задач математической физики», М., «Наука», 1966, стр. 103—112.
- Левин В. А. Распространение детонационных волн в электрическом и магнитном полях. Отчет Научн.-исслед. ин-та механики МГУ, 1969, № 972.
- Rosciszewski J., Oppenheim A. K. Shock interaction with an electromagnetic field. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5, pp. 689—698.
- Mirels H., Braun W. H. Perturbed one-dimensional unsteady flows including transverse magnetic field effects. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3, pp. 259—265.
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
- Жигулев В. Н., Ромишевский Е. А., Вертушкин В. К. О роли излучения в современных вопросах газовой динамики. Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 1, стр. 60—83.
- Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.