

ОБ ОДНОМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ ГРАДИЕНТОМ СДВИГА

Ю. М. МОЛОКОВИЧ, Э. В. СКВОРЦОВ

(Казань)

Промысловыми и лабораторными исследованиями последних лет показано [1], что некоторые нефти, содержащие полярные компоненты и твердые углеводороды, обладают структурно-механическими свойствами и могут быть отнесены к разряду вязкопластичных жидкостей. Характерной особенностью фильтрации таких жидкостей является то, что она становится существенно заметной лишь после достижения градиентом давления некоторого критического значения, называемого градиентом сдвига.

В 1953 году А. Х. Мирзаджанзаде предложил феноменологическую теорию фильтрации вязкопластических жидкостей, согласно которой зависимость между скоростью фильтрации и градиентом давления описывается обобщенным законом Дарси [4].

Ряд работ [2-7] посвящен вопросам одномерной нестационарной фильтрации жидкостей, обладающих постоянным градиентом сдвига. Вместе с тем известно, что структурно-механические свойства нефтей в пределах одного месторождения неодинаковы [2]. Кроме того, в современной практике нефтедобычи широко используются методы закачки в пласты холодной поверхностной воды, что приводит к заметному возмущению теплового поля месторождения. Это, в свою очередь, влечет за собой существенное изменение свойств жидкости и условий ее фильтрации [8]. Поэтому представляет теоретический и практический интерес рассмотреть задачи с переменным градиентом сдвига.

1. Прямолинейно-параллельная фильтрация. Пусть полубесконечный, однородный, изотропный, единичной мощности и ширины пласт заполнен однородной жидкостью, обладающей градиентом сдвига $\beta(x)$, где x — координата. Считается, что $\beta(x)$ — непрерывная функция вместе со своей первой производной. Порода и жидкость предполагаются сжимаемыми, структурно-механические свойства жидкости в данной точке пласта — не зависящими от времени, давление в пласте до его эксплуатации — постоянным, равным p_0 .

Проекция v скорости фильтрации на ось x имеет вид

$$v = \begin{cases} 0, & |p_x| < \beta(x) \\ -(k/\mu)[p_x - \beta(x)], & |p_x| > \beta(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

где p — давление, k — коэффициент проницаемости, μ — вязкость. В зоне фильтрации давление удовлетворяет уравнению

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x} [p_x - \beta(x)] = p_t, \quad 0 < x < l(t) \quad (1.2)$$

а вне ее ($x > l(t)$) считается неизменным и равным p_0 . Здесь κ — коэффициент теплопроводности, $l = l(t)$ — подвижная граница, на которой выполняются следующие условия:

$$p(l, t) = p_0 \quad (1.3)$$

$$p_x(l, t) = \beta(l) \quad (1.4)$$

Задача 1. Найти решение уравнения (1.2), $l = l(t)$ и дебит галереи при условиях (1.3), (1.4) и

$$p(x, 0) = p_0, \quad p(0, t) = p_1 < p_0 \quad (1.5)$$

Отыскивая решение задачи в виде

$$p(x, t) = a_0(t) + a_1(t) \frac{x}{l} + a_2(t) \frac{x^2}{l^2} + \int_0^x \beta(\xi) d\xi \quad (1.6)$$

и учитывая (1.3) — (1.5), получаем

$$p(x, t) = p_0 - B(l, x) - [\Delta p - B(l, 0)](1 - x/l)^2 \quad (1.7)$$

где

$$B(l, x) = \int_x^l \beta(\xi) d\xi, \quad \Delta p = p_0 - p_1$$

Использование интегрального соотношения, характеризующего условие материального баланса [9], дает следующую связь между l и t :

$$6\kappa t = \frac{l^2}{2} + 2 \int_0^l \frac{\lambda^2 \beta(\lambda) d\lambda}{\Delta p - B(\lambda, 0)} \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что $l = l(t)$ имеет асимптоту l_0 , которая определяется из уравнения

$$\Delta p = B(l_0, 0) \quad (1.9)$$

если выполняется условие $\Delta p > B(\infty, 0)$. Дебит галереи

$$q(t) = \frac{2k}{\mu l} [\Delta p - B(l, 0)] \quad (1.10)$$

Согласно методу квазистационарного приближения [10, 11] найдем решение задачи 1, ограничиваясь малыми значениями t . Будем считать, что $l(\tau) = \text{const}$ и $p = p(x, t, \tau)$, где τ — параметр. Введем преобразование Лапласа — Карсона $W(x, s, \tau)$ функции давления. После перехода к изображениям решение уравнения (1.2) при условиях (1.3) и (1.5) имеет вид

$$W = p_0 + \frac{\text{sh } \lambda(x-l)}{\text{sh } \lambda l} + \int_0^x \beta(\xi) \text{ch } \lambda(x-\xi) d\xi - \frac{\text{sh } \lambda x}{\text{sh } \lambda l} \int_0^l \beta(\xi) \text{ch } \lambda(x-\xi) d\xi, \quad \lambda = \sqrt{s/\kappa}$$

Давление можно получить по теореме обращения [12]

$$p(x, t, \tau) = p_1 + \Delta p \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n x}{l} \exp \frac{-\pi^2 n^2 \kappa t}{l^2} \times \\ \times \left[\Delta p - \int_0^l \beta(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right] + B(x, 0) - \frac{x}{l} B(l, 0) \quad (1.11)$$

Согласно (1.11) и (1.4) при $\tau = t$

$$\Delta p + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \frac{-\pi^2 n^2 \kappa t}{l^2} (-1)^n \left[\Delta p - \int_0^l \beta(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{l} d\xi \right] = B(l, 0) \quad (1.12)$$

Если ограничиться в (1.12) первым членом ряда (оценку остаточного члена сделать нетрудно), то связь между l и t будет следующей:

$$t = \frac{l^2}{\pi^2 \kappa} \ln \left\{ \frac{2}{\Delta p - B(l, 0)} \left[\Delta p - \int_0^l \beta(\xi) \cos \frac{\pi \xi}{l} d\xi \right] \right\} \quad (1.13)$$

Дебит галереи с учетом (1.13) принимает вид (1.10). Ограничившись в (1.11) первым членом ряда, формулу для давления с помощью (1.13) можно представить в форме

$$p(x, t) = p_1 + B(x, 0) + \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \right) [\Delta p - B(l, 0)] \quad (1.14)$$

Если рассмотреть задачу (1.2), (1.3), (1.5) при $l = l_0 = \text{const}$, то ее точное решение будет даваться формулой (1.11), где $l(\tau) = l_0$. При $t \rightarrow \infty$ распределение давления имеет вид

$$p(x, \infty) = p_1 + \Delta p x/l + B(x, 0) - (x/l)B(l, 0)$$

Очевидно, то же распределение давления получится из решения (1.11) задачи с подвижной границей, когда $t \rightarrow \infty$, а $l(t) \rightarrow l_0$, что связано с квазистационарностью процесса перемещения границы при больших t . Таким образом, формулы (1.11) и (1.12) могут быть использованы и для больших t . При этом из (1.4) вытекает (1.9).

Примеры. Пусть $\beta(x) = a + bx$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тогда согласно (1.7), (1.8), (1.10)

$$p(x, t) = p_0 - a(l - x) - \frac{b}{2}(l^2 - x^2) - \left[\Delta p - \left(al + \frac{bl^2}{2} \right) \right] \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \quad (1.15)$$

$$6\kappa t = -\frac{3l^2}{2} + \frac{4al}{b} + \frac{4(a^2 + b\Delta p - ac)}{b^2} \ln \frac{2\Delta p}{2\Delta p - 2al - bl^2} - \frac{8ac}{b^2} \ln \frac{a + bl + c}{a + c}, \quad c = \sqrt{a^2 + 2b\Delta p} \quad (1.16)$$

$$q = \frac{2k}{\mu l} \left[\Delta p - al + \frac{bl^2}{2} \right]$$

Согласно (1.14) и (1.13)

$$p(x, t) = p_1 + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} \left[\Delta p - l \left(a + \frac{bl}{2} \right) \right] + \frac{x}{l} \Delta p - \frac{bx(l - x)}{2} \quad (1.17)$$

$$t = \frac{l^2}{\pi^2 \kappa} \ln \frac{4(\pi^2 \Delta p + 2bl^2)}{\pi^2 [2\Delta p - l(2a + bl)]} \quad (1.18)$$

При $\beta = a + be^{-\alpha x}$, $a \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $a + b \geq 0$ получим:

по формулам (1.7), (1.8), (1.10)

$$p(x, t) = p_0 - a(l - x) - \frac{b}{\alpha}(e^{-\alpha x} - e^{-\alpha l}) - \left[\Delta p - al - \frac{b}{\alpha}(1 - e^{-\alpha l}) \right] \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2$$

$$6\kappa t = \frac{l^2}{2} + 2 \int_0^l \frac{\lambda^2(a + be^{-\alpha \lambda}) d\lambda}{\Delta p - a\lambda - (1 - e^{-\alpha \lambda})b/\alpha} \quad (1.19)$$

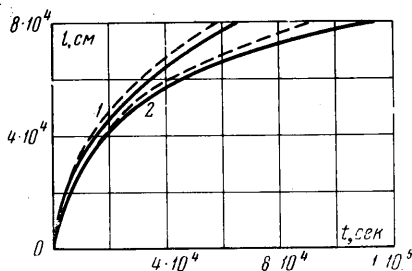
$$q = \frac{2k}{\mu l} \left[\Delta p - al - \frac{b}{\alpha}(1 - e^{-\alpha l}) \right]$$

по формулам (1.14) и (1.13)

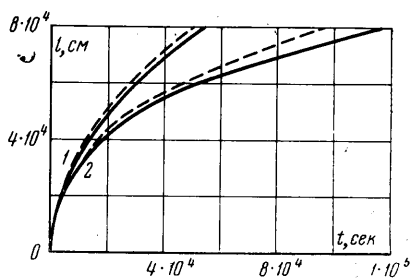
$$p(x, t) = p_1 - \frac{al}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} + \left(\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{x}{l} \right) \left[\Delta p + \frac{b}{\alpha}(e^{-\alpha l} - 1) \right] - \frac{b}{\alpha}(e^{-\alpha x} - 1)$$

$$t = \frac{l^2}{\pi^2 \kappa} \ln \frac{2\alpha [\Delta p (\pi^2 + \alpha^2 l^2) - \alpha bl^2 (1 + e^{-\alpha l})]}{(\pi^2 + \alpha^2 l^2) [(\Delta p - al)\alpha + b(e^{-\alpha l} - 1)]} \quad (1.20)$$

Следует заметить, что в пласте конечной длины L фильтрация может разбиться на две фазы. Первая фаза имеет место при $0 \leq t \leq T$, где T — момент времени, когда граница зоны фильтрации достигает правого конца пласта, т. е. $l = L$; вторая фаза осуществляется при $t \geq T$.



Фиг. 1

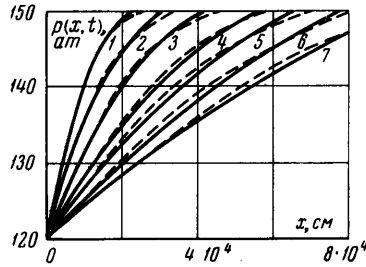


Фиг. 2

Если $L < l_0$, то первая фаза закончится за время T , определяемое соотношениями (1.8) или (1.13) при $t = T$ и $l = L$. Во второй фазе решение задачи нетрудно найти обычными классическими методами.

Если $L \geq l_0$, фильтрация в пласте ограничится первой фазой. В этом случае пласт можно рассматривать как полубесконечный.

Пусть $p_0 = 150$ ат, $p_1 = 120$ ат, $k = 0.4$ д, $\mu = 2.5$ снз, $m = 0.2$, $\kappa = 10^4$ см²/сек, $a = 5 \cdot 10^{-5}$ ат/см, $L = 800$ м, $\alpha = 10^{-4}$. На фиг. 1 кривые 1 ($b = 25 \cdot 10^{-10}$ ат/см²) и 2 ($b = 0$) построены по формулам (1.16) (сплошные) и (1.18) (штриховые), на фиг. 2 кривые 1 ($a = 0$, $b = 2 \cdot 10^{-4}$ ат/см) и 2 ($a = 2 \cdot 10^{-4}$ ат/см, $b = 0$) построены по формулам (1.19) (сплошные) и (1.20) (штриховые). На фиг. 3 даны кривые 1–7 изменения давления, соответствующие формулам (1.15) (сплошные) и (1.17) (штриховые) для $b = 25 \cdot 10^{-10}$ ат/см² и $t = 5 \cdot 10^3, 10^4, 2 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 6 \cdot 10^4, 10^5, 1.5 \cdot 10^5$ сек.



Фиг. 3

Задача 2. Найти решение уравнения (1.2) и $l = l(t)$ при условиях (1.3), (1.4) и

$$p(x, 0) = p_0, \quad p_x(0, t) = \beta(0) + q\mu/k = \text{const}$$

Приближенное решение задачи методом интегральных соотношений имеет вид

$$p(x, t) = p_0 - B(x, l) - (q\mu l/2k)(1 - x/l)^2, \quad 6\kappa q\mu t = 6k \int_0^l B(l, x) dx + q\mu l^2$$

Метод квазистационарного приближения дает

$$p(x, t) = p_0 + \varepsilon(x - l) + \frac{2\varepsilon l}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2l} - B(x, l)$$

$$t = \frac{4l^2}{\pi^2 \kappa} \ln \left\{ \frac{2}{\pi \varepsilon l} \left[2\varepsilon l + \pi \int_0^l \beta(\xi) \sin \frac{\pi \xi}{2l} d\xi \right] \right\}, \quad \varepsilon = \frac{q\mu}{k}$$

Заметим, что в случае ограниченного пласта в задаче 2 всегда имеют место две фазы фильтрации.

2. Плоскорадиальная фильтрация. Пусть однородный, изотропный, единичной мощности пласт, заполненный однородной вязко-пластической жидкостью в начальный момент времени вскрывается эксплуатационной скважиной радиуса r_1 . Как и в п. 1, порода и жидкость предполагаются сжимаемыми, давление в пласте до эксплуатации — постоянным и равным p_0 , а градиент сдвига $\beta = \beta(r)$ — функцией, непрерывной вместе со своей первой производной.

Считая вне области фильтрации ($r > \rho(t)$) давление равным p_0 , имеем

$$\frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{r[p_r - \beta(r)]\} = p_t, \quad r_1 < r < \rho(t) \quad (2.1)$$

$$p(\rho, t) = p_0 \quad (2.2)$$

$$p_r(\rho, t) = \beta(\rho) \quad (2.3)$$

Задача 3. Найти решение уравнения (2.1), $\rho = \rho(t)$ и дебит скважины при условиях (2.2), (2.3) и

$$p(r, 0) = p_0, \quad p(r_1, t) = p_1 < p_0 \quad (2.4)$$

Применение метода интегральных соотношений дает

$$p(r, t) = p_0 - B(\rho, r) - [\Delta p - B(\rho, r_1)] \frac{1 - r/\rho + \ln(r/\rho)}{1 - r_1/\rho + \ln(r_1/\rho)}$$

$$q(t) = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{\Delta p - B(\rho, r_1)}{1 - r_1/\rho + \ln(r_1/\rho)} \left(1 - \frac{r_1}{\rho} \right) \quad (2.5)$$

$$12\pi t = \int_{r_1}^{\rho} \frac{[6(\lambda^2 - r_1^2)\beta(\lambda) + A(\lambda, r_1)][1 - r_1/\lambda + \ln(r_1/\lambda)]}{\Delta p - B(\lambda, r_1)} d\lambda$$

Здесь

$$A(\lambda, r_1) = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{[\Delta p - B(\lambda, r_1)] \{ \lambda^2 + r_1^2 [3 - 4r_1/\lambda + 6 \ln(r_1/\lambda)] \}}{1 - r_1/\lambda + \ln(r_1/\lambda)} \right\}$$

Исследование зависимости (2.5) показывает, что $\rho = \rho(t)$ имеет асимптоту ρ_0 , определяемую уравнением

$$\Delta p = B(\rho_0, r_1), \quad \Delta p > B(\infty, r_1) \quad (2.6)$$

Следуя методу квазистационарного приближения, введем преобразование Лапласа — Карсона функции давления $W(r, s, \tau)$. Уравнение (2.1) при условиях (2.2), (2.4) в изображениях имеет следующее решение:

$$W = p_0 + \frac{1}{\Phi(r_1, \rho)} \left\{ \Phi(\rho, r) \left[\Delta p - \int_{r_1}^r (\xi\beta_\xi + \beta) \Phi(r_1, \xi) d\xi \right] - \right. \\ \left. - \Phi(r_1, r) \int_r^\rho (\xi\beta_\xi + \beta) \Phi(\rho, \xi) d\xi \right\} \\ \Phi(r, \rho) = I_0(\lambda r) K_0(\lambda \rho) - I_0(\lambda \rho) K_0(\lambda r)$$

Здесь $I_0(z)$, $K_0(z)$ — функции Бесселя мнимого аргумента. По теореме обращения

$$p(r, t, \tau) = p_0 + \frac{1}{\ln(r_1/\rho)} \left\{ \ln \frac{\rho}{r} [\Delta p - B(r, r_1)] - \ln \frac{r_1}{r} B(\rho, r) \right\} + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(r, r_1) [2\Delta p - G(\rho, r_1)]}{J_0^2(\rho \alpha_n) - J_0^2(r_1 \alpha_n)} J_0^2(\rho \alpha_n) e^{-\alpha_n^2 t}$$

$$G(\rho, r_1) = \int_{r_1}^{\rho} (\xi\beta_\xi + \beta) F(\xi, r_1) d\xi$$

Здесь

$$F(\rho, r) = J_0(\alpha_n \rho) Y_0(\alpha_n r) - J_0(\alpha_n r) Y_0(\alpha_n \rho),$$

$J_0(z)$ и $Y_0(z)$ — функции Бесселя, α_n — корень уравнения $F(\rho, r_1) = 0$. Квазистационарность изучаемого процесса фильтрации имеет место и при больших t , поэтому выражение (2.8) для $t \gg 1$ может быть упрощено. Из (2.3) при $r = \rho$, $\tau = t$ следует, что

$$e^{-\alpha_1^2 t} = \frac{\alpha_1 [\Delta p - B(\rho, r_1)] [J_0^2(\rho \alpha_1) - J_0^2(r_1 \alpha_1)]}{J_0(r_1 \alpha_1) J_0(\rho \alpha_1) \ln(\rho/r_1) [2\Delta p - \pi G(\beta r_1)]}$$

и из (2.8)

$$p(r, t) = p_0 + \frac{1}{\ln(r_1/\rho)} \left\{ \ln \frac{\rho}{r} [\Delta p - B(r, r_1)] - \ln \frac{r_1}{r} B(\rho, r) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 \pi}{2} F(r, \rho) [\Delta p - B(\rho, r_1)] \right\}$$

причем асимптота функции $\rho = \rho(t)$ определяется равенством (2.6).

Для малых t решение удобнее представить в иной форме. Применяя асимптотические формулы для функций $I_0(z)$ и $K_0(z)$ [13] в (2.7) и переходя к оригиналам,

после преобразований и упрощений можно найти

$$p(r, t) = p_0 - \Delta p \left(\frac{r_1}{r} \right)^{1/2} \frac{\rho - r}{\rho - r_1} + \frac{1}{\pi \sqrt{r}} \sin \frac{\pi(\rho - r)}{\rho - r_1} \times \\ \times [\Delta p \sqrt{r_1} + H(\rho, r_1, r_1) - \beta(\beta - r_1) \sqrt{\rho}] + \\ + \frac{1}{\sqrt{r}(\rho - r_1)} [(r - \rho)H(r, r_1, r_1) + (r - r_1)H(\rho, r, \rho)] \\ 2 \exp \frac{-\pi^2 \kappa t}{(\rho - r_1)^2} = \frac{\Delta p \sqrt{r_1} + H(\rho, r_1, r_1) - \beta(\rho - r_1) \sqrt{\rho}}{\Delta p \sqrt{r_1} + M(\rho, r_1)(\rho - r_1)/\pi} \\ H(\xi, z, \omega) = \int_z^\xi \frac{(\xi \beta_\xi + \beta)(\xi - \omega) d\xi}{\sqrt{\xi}}, \quad M(\rho, r_1) = \int_{r_1}^\rho \frac{(\xi \beta_\xi + \beta) \sin \frac{\pi(\xi - r_1)}{\rho - r_1} d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

Задача 4. Найти решение уравнения (2.1) и $\rho = \rho(t)$ при условиях (2.2), (2.3) и

$$p(r, 0) = p_0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \{r[p_r - \beta(r)]\} = \frac{q\mu}{2\pi k} = \frac{\varepsilon}{2\pi}$$

Приближенное решение методом интегральных соотношений имеет вид

$$p(r, t) = p_0 - B(\rho_0 r) + (\varepsilon/2\pi)[1 - r/\rho + \ln(r/\rho)] \\ 12\kappa\epsilon t = 24\pi \int_0^\rho \xi^2 \beta(\xi) d\xi + \varepsilon \rho^2$$

по методу квазистационарного приближения для малых t и не слишком малых r , применяя асимптотические формулы [13] для функций $I_0(z)$, $K_0(z)$ и $D_p(z)$, где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра, можно найти

$$p(r, t) = p_0 - \frac{2 \cdot 8^{1/4} \epsilon \kappa t}{r^2} \left[\exp \frac{-3r^2}{16\kappa t} - \exp \frac{-3(2\rho - r)^2}{16\kappa t} \left(\frac{r}{2\rho - r} \right)^{3/2} \right] + \\ + \frac{1}{2\sqrt{r}} \int_0^\rho \left[2 \left(\frac{\kappa t}{\pi} \right)^{1/2} \left(\exp \frac{-(2\rho - \xi - r)^2}{4\kappa t} - \exp \frac{-(r - \xi)^2}{4\kappa t} \right) - \right. \\ \left. - (2\rho - \xi - r) \operatorname{erfc} \frac{2\rho - \xi - r}{2\sqrt{\kappa t}} + (r - \xi) \operatorname{erfc} \frac{r - \xi}{2\sqrt{\kappa t}} \right] \frac{(\xi \beta_\xi + \beta) d\xi}{\sqrt{\xi}} \\ \frac{3 \cdot 8^{1/4} \epsilon (\rho^2 + 4\kappa t)}{2\rho^3} \exp \frac{-3\rho^2}{16\kappa t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^\rho \frac{\xi \beta_\xi + \beta}{\sqrt{\xi}} \operatorname{erfc} \frac{\rho - \xi}{2\sqrt{\kappa t}} d\xi = \beta(\rho)$$

Поступило 9 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурбанов Р. С., Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Гидродинамика вязко-пластических сред. Изв. АН СССР, МЖТ, 1967, № 3.
2. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е. Особенности фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Сб. «Теория и практика добычи нефти», М., «Недра», 1966.
3. Ентов В. М. Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
4. Ентов В. М. Об исследовании скважин на нестационарный приток при нелинейном законе фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 6.
5. Ентов В. М., Сухарев М. Г. Автомодельный случай плоско-радиальной нестационарной фильтрации при нелинейном законе сопротивления. Изв. вузов, Нефть и газ, 1965, № 4.

6. Молокович Ю. М., Скворцов Э. В., Чилап А. Я. Некоторые приближенные решения одномерных задач фильтрации упругой вязко-пластичной жидкости. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1969, т. 129, кн. 2.
7. Чилап А. Я., Непримеров Н. Н., Молокович Ю. М. Определение зоны притока к скважине с начальным градиентом сдвига. Тр. Азерб. ин-та нефти и химии, 1967, вып. 26.
8. Непримеров Н. Н., Пудовкин М. А., Марков А. И. Особенности теплового поля нефтяного месторождения. Изд. Казанск. ун-та, 1968.
9. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
10. Лейбензон Л. С. Собр. тр., т. 4, Изд. АН СССР, 1955.
11. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.
13. Градштейн И. М., Рыжик И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1962.

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ МАЛКУСА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

М. А. ГОЛЬДШТИК, В. А. САПОЖНИКОВ, В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

Показано путем численного расчета, что гипотеза Малкуса о нейтральной устойчивости профиля осредненной скорости турбулентного потока к внешним возмущениям не подтверждается.

1. В 1956 году Малкусом [1] была выдвинута феноменологическая теория для описания установившихся турбулентных потоков в каналах.

Согласно этой теории осредненный турбулентный профиль скорости должен (а) разыскиваться в классе нейтрально устойчивых профилей в смысле гидродинамической теории устойчивости и (б) обладать в этом классе максимальной скоростью диссипации энергии.

Конкретные расчеты были проведены для течения в плоском канале при дополнительном предположении о выпуклости профиля скорости. Используя довольно грубые асимптотические оценки при решении уравнения Орра — Зоммерфельда, Малкус рассчитал профиль скорости. При этом найденная из теоретических соображений константа Кармана оказалась в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

Теория Малкуса привлекла внимание гидромехаников. На международном конгрессе по турбулентности в Марселе (1961 г.) она детально обсуждалась Таунсендом [2] и Шпигелем [3], которые признали гипотезу Малкуса правдоподобными. Позднее Нихоль [4] предпринял попытку обосновать подход Малкуса на основе принципа Пригожина для установившихся диссипативных процессов. Савулеску и Настази [5], следуя Малкусу, провели теоретический расчет профиля осредненной скорости в турбулентном пограничном слое и получили известный закон «одной седьмой».

Однако проверка расчетов [1], предпринятая Рейнольдсом и Тидерманом [6], показала, что асимптотические оценки Малкуса были неудовлетворительны и, в частности, экспериментальный турбулентный профиль скорости при $Re = 25\,000$ оказался не нейтрально устойчивым, а глубоко устойчивым. Кроме того, оказалось, что среди нейтрально устойчивых профилей с заданным Re_* можно найти профили, обеспечивающие сколь угодно большую диссипацию энергии.

Тем не менее Нихоль [7] отнес различие в результатах [1] и [6] за счет более или менее удачно выбранной асимптотической аппроксимации. Нихоль склонялся к малкусовой теории и пытался ее обосновать при помощи результатов Серрина в нелинейной теории устойчивости (хотя и признавал, что прямой связи между результатами Серрина и теорией Малкуса нет).

В работе [8] Нихоль вновь ставит под сомнение результаты, полученные на основе уравнения Орра — Зоммерфельда. Однако, если предположить бесконечную малость возмущений и не учитывать их взаимодействия с турбулентными пульсациями, как это принято во всех цитированных работах по малкусовой теории, то справедливость уравнения Орра — Зоммерфельда для возмущенного движения непосредственно следует из уравнения Навье — Стокса.