

ФИЛЬТРАЦИЯ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

М. М. МЕНДЕЛЬСОН, М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Оценивается коэффициент охвата среды фильтрацией, а также эффективная проницаемость среды с застойными зонами. Показано, что эффективная проницаемость является функцией внешних условий, в частности среднего градиента давления. Рассматриваются пространственное, плоское и одномерное течения. Для исследования применяется теория выбросов случайных функций и полей за заданный уровень [1, 2]. Изучаются выбросы элементов фильтрационного поля в средах со случайными неоднородностями. В частности рассматриваются выбросы энергии, диссипируемой в объеме, это позволяет приближенно оценить охват неоднородной пористой среды движением при фильтрации с предельным градиентом, т. е. в случае образования застойных зон, хаотично вкрапленных в область течения.

1. Выбросы энергии, диссипируемой потоком, за заданный уровень. При фильтрации несжимаемой однородной жидкости в среде со случайными неоднородностями диссипируемая энергия $E(\mathbf{r})$ является неотрицательной случайной функцией координат, колеблющейся около своего среднего значения. Очевидно, каково бы ни было положительное число E_* , всегда в области фильтрации для любой реализации случайной функции $E(\mathbf{r})$ можно выделить подобласти, где $E(\mathbf{r}) > E_*$. В этом случае говорят, что в соответствующей подобласти имеет место выброс энергии за уровень E_* . Представляет интерес оценка объема (площади в плоской задаче) подобласти с выбросом, приходящейся в среднем на единицу объема среды, т. е. плотность распределения выбросов по объему.

Очевидно, что если поле энергии эргодично, осреднение по объему можно заменить осреднением по вероятностной мере, и плотность распределения выбросов по объему равна вероятности появления выброса. Поэтому, если $f(E, \mathbf{r})$ — плотность распределения случайной энергии в точке \mathbf{r} , вероятность выброса в точке за уровень E_* имеет вид [1]

$$c(\mathbf{r}) = \int_{E_*}^{\infty} f(E, \mathbf{r}) dE \quad (1.1)$$

Установить связь плотности f с параметрами потока удастся лишь в случае одномерного течения, поэтому в дальнейшем вид функции f будет постулироваться, а ее свободные параметры будут определены непосредственно.

Для определенности рассмотрим фильтрационное течение в неограниченной среде трех измерений, проницаемость которой является однородной и изотропной случайной функцией координат. Будем считать, что задан средний градиент давления и он постоянен. Для упрощения анализа совместим ось x декартовой системы координат x, y, z с вектором среднего градиента.

Пусть случайная проницаемость представлена в виде

$$k = k_0 + k', \quad k_0 = \langle k \rangle \quad (1.2)$$

(угловыми скобками обозначено усреднение по вероятности).

Записывая аналогично выражения для давления и энергии

$$p = p_0 + p_1, \quad p_0 = \langle p \rangle; \quad E = E_0 + E_1, \quad E_0 = \langle E \rangle \quad (1.3)$$

и учитывая, что энергия, диссипируемая в единице объема среды в единицу времени определяется соотношением

$$E = -V \nabla p, \quad V = -\frac{k}{\mu} \nabla p \quad (1.4)$$

легко получить с точностью до малых первого порядка относительно k' выражение для E_1

$$E_1 = \frac{k'}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{k_0}{\mu} \frac{\partial p_0}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (1.5)$$

При этом учтено, что система координат ориентирована так, что

$$\partial p_0 / \partial x = \text{const}, \quad \partial p_0 / \partial y = \partial p_0 / \partial z = 0$$

Возводя (1.5) в квадрат и усредняя, получим дисперсию энергии

$$\langle E_1^2 \rangle = \frac{D}{\mu^2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^4 + 4 \frac{k_0^2}{\mu^2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \left\langle \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + 4 \frac{k_0}{\mu^2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^3 \left\langle k' \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle$$

где $D = \langle k'^2 \rangle$ — дисперсия проницаемости, а моменты $\langle (\partial p_1 / \partial x)^2 \rangle$ и $\langle k' \partial p_1 / \partial x \rangle$ в предположении конечности масштаба корреляции проницаемости вычислены в статье [3] и имеют вид

$$\left\langle \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \frac{D}{5k_0^2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2, \quad \left\langle k' \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\rangle = -\frac{D}{3k_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (1.6)$$

Таким образом,

$$\langle E_1^2 \rangle = \frac{7D}{15\mu^2} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^4 \quad (1.7)$$

Средняя энергия может быть представлена в виде

$$\langle E \rangle = \frac{k^*}{\mu} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^2 \quad (1.8)$$

где k^* — эффективная проницаемость среды со случайными неоднородностями. Как показано в [4], ее можно записать так:

$$k^* = k_0 (1 + 1/3 \zeta^2)^{-1}, \quad \zeta^2 = D / k_0^2 \quad (1.9)$$

Постулируя вид плотности распределения энергии f , следует учесть, что энергия неотрицательна. Далее примем, что энергия распределена логнормально, т. е.

$$f(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} E \sigma} \exp \left[-\frac{(\ln E - a)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (1.10)$$

где параметры a , σ определяются соотношениями $a = \langle \ln E \rangle$, $\sigma^2 = \langle (\ln E - a)^2 \rangle$ и должны быть найдены при помощи формул (1.7) и (1.8).

Так как для распределения (1.10) имеет место равенство

$$\langle E^n \rangle = \exp [na + 1/2 n^2 \sigma^2] \quad (1.11)$$

то, положив в нем $n = 1$ и $n = 2$, нетрудно получить

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{\langle E \rangle^2}{1 + \langle E_1^2 \rangle / \langle E \rangle^2}, \quad \sigma^2 = \ln(1 + \langle E_1^2 \rangle / \langle E \rangle^2) \quad (1.12)$$

Располагая параметрами a и σ , легко вычислить вероятность выброса c_3 . Интегрируя (1.10), получаем после преобразований

$$c_3 = 1/2(1 - \operatorname{erf} \alpha), \quad \left(\operatorname{erf} \alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-z^2} dz \right) \quad (1.13)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln \varphi(1 + 1/3 \zeta^2) \sqrt{1 + 7/15 \zeta^2 (1 + 1/3 \zeta^2)^2}}{\sqrt{\ln[1 + 7/15 \zeta^2 (1 + 1/3 \zeta^2)^2]}} \quad \alpha = \frac{\mu E^*}{k_0} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x} \right)^{-2}$$

Аналогично может быть рассмотрена задача о выбросах энергии за уровень E_* при плоской фильтрации. Опуская выкладки, приведем соотношения для вероятности выброса c_2

$$c_2 = 1/2(1 - \operatorname{erf} \beta) \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln \varphi(1 + 1/2 \zeta^2) \sqrt{1 + \rho \zeta^2 (1 + 1/2 \zeta^2)^2}}{\sqrt{\ln[1 + \rho \zeta^2 (1 + 1/2 \zeta^2)^2]}} \quad \rho = \frac{\pi - 2}{\pi} \quad (1.14)$$

Рассмотрим, наконец, одномерную фильтрацию в слоистой системе, в которой каждый слой имеет постоянную проницаемость и единичную мощность. Пусть $f_1(k)$ — плотность распределения проницаемости слоев и зададим в каждом из них один и тот же постоянный градиент давления dp_0/dx . Тогда энергия, отдаваемая в слое $E = k(dp_0/dx)^2/\mu$, и условие выброса за уровень имеют вид

$$k > k_0 \varphi \quad (1.15)$$

Очевидно, вероятность выброса c_1 запишется следующим образом:

$$c_1 = \int_{k_0 \varphi}^{\infty} f_1(k) dk \quad (1.16)$$

Предполагая, что энергия, а следовательно, и проницаемость распределены логнормально, легко получить

$$c_1 = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf} \gamma), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln \varphi \sqrt{1 + \zeta^2}}{\sqrt{\ln(1 + \zeta^2)}} \quad (1.17)$$

2. Фильтрация с предельным градиентом в среде со случайными неоднородностями. Рассмотрим движение неньютоновской жидкости в пористой среде, пользуясь моделью, получившей название «фильтрация с предельным градиентом». В соответствии с этой моделью обобщенный закон Дарси для однородной вязко-пластичной жидкости имеет вид

$$V(r) = - \frac{k}{\mu} \psi(\nabla p) \quad (2.1)$$

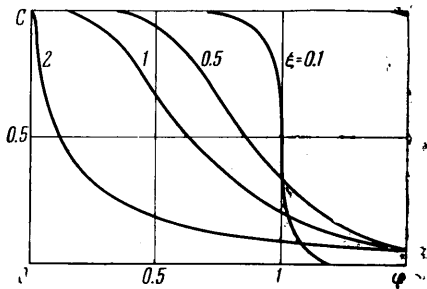
где функция ψ определена следующим образом: она тождественно равна нулю при $|\nabla p| < \theta$ и, вообще говоря, отлична от линейной функции при $|\nabla p| > \theta$. Величина θ называется обычно предельным градиентом и, как показывает анализ размерностей и экспериментальные исследования [5], ее можно представить в виде

$$\theta = \lambda / \sqrt{k} \quad (2.2)$$

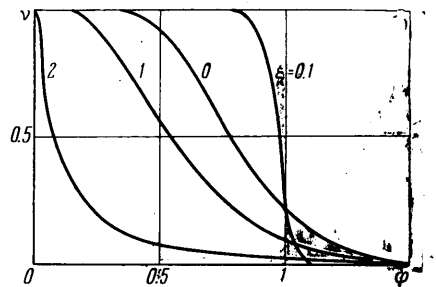
где λ — коэффициент, пропорциональный напряжению сдвига неньютоновской жидкости.

Очевидно, если гидродинамическое поле фильтрации имеет особенности типа источников и стоков или среда достаточно неоднородна, в области фильтрации должны существовать застойные зоны, т. е. подобласти, где скорость фильтрации равна нулю.

Естественно, что отыскание границ застойных зон является одной из основных задач теории фильтрации неньютоновской жидкости [8-11]. Если условия задачи достаточно нерегулярны, например среда является неоднородной в «малом», но однородной в «большом», а сама неоднородность скорее может трактоваться как случайная, отыскание границ множества застойных зон, вкрапленных в течение, не имеет смысла.



Фиг. 1



Фиг. 2

В этом случае естественно найти вероятность появления застойной области в данной точке или, если случайное поле эргодично, определить площадь или объем застойных зон, приходящихся на единицу площади или объема среды в среднем. Величину эту естественно назвать коэффициентом охвата. Представляет интерес оценить связь коэффициента охвата с параметрами, характеризующими свойства пористой среды и жидкости, и внешними условиями, определяющими течение в целом.

Очевидно, что решение подобной задачи в точной постановке в общем случае вряд ли осуществимо. Исключением является одномерная так называемая «слоистая» модель течения, рассмотренная в [8]. Далее для оценки коэффициента охвата используем некоторые соображения, позволяющие приблизительно оценить его величину. В самом деле, в работе [11] показано, что в некоторых случаях, например течение внутри угла при $\psi(\nabla p) = \nabla p$, площадь застойной зоны может быть приблизительно найдена, если считать жидкость неньютоновской и вычислить площадь подобласти, внутри которой $|\nabla p| < \theta$. При этом, правда, конфигурация «застойной» области оказывается мало похожей на истинную, но коэффициент охвата оценивается достаточно удовлетворительно.

Отметим, что указание на возможность подобной оценки застойных зон и коэффициента охвата с помощью рассмотрения фильтрационного поля ньютоновской жидкости имеется и в работе [7].

При фильтрации неньютоновской жидкости в среде со случайными неоднородностями конфигурация застойных зон не существенна, поэтому описанный эффект, по-видимому, позволяет построить схему расчета коэффициента охвата. При этом, очевидно, охваченными фильтрацией следует считать подобласти, где поле модуля градиента давления совершает «выбросы» за уровень θ .

Математическое ожидание отношения площади или объема таких под-областей ко всей площади или объему области фильтрации и есть коэффициент охвата. Следует отметить, что условие охвата $|\nabla p| \geq \theta$ неудобно для анализа. Если его возвести в квадрат и использовать (1.4) и (2.2), легко записать эквивалентное неравенство

$$E > E_* = \lambda^2 / \mu \tag{2.3}$$

Здесь E — энергия, отдаваемая потоком в единичном объеме за единицу времени. Иными словами, выброс градиента за уровень θ эквивалентен выбросу диссипируемой энергии за уровень λ^2 / μ . Отсюда вытекает, что при сделанных предположениях коэффициент охвата равен вероятности выброса энергии за уровень λ^2 / μ , и, следовательно, для его оценки применимы соотношения для c_3 , полученные в п. 1.

Рассмотрим течение в трехмерном пространстве. На фиг. 1 представлены кривые коэффициента охвата $c_3 = c_3(\varphi, \zeta)$, где под φ понимается комплекс $\varphi = \lambda^2 k_0^{-1} (\partial p_0 / \partial x)^{-2}$. Уместно добавить, что при $\zeta = 0$ функция $c_3(\varphi) = 1(\varphi < 1)$ и $c_3(\varphi) = 0(\varphi > 1)$.

Следует отметить, что если при $\varphi \leq 1$ увеличение ζ снижает коэффициент охвата c_3 , то при $\varphi \geq 1$ картина иная. Для любого φ существует ζ_0 , разделяющее области роста и убывания коэффициента c_3 . В интервале $(0, \zeta_0)$ охват растет, в (ζ_0, ∞) — убывает.

Иными словами, умеренная неоднородность ($\zeta \leq \zeta_0$) при фиксированном k_0 «разбалтывает» энергию и создает условия для выброса ее за критический уровень, т. е. увеличивает охват. Однако при $\zeta > \zeta_0$ убывание средней энергии компенсирует увеличение разброса, интенсивность выбросов за уровень снижается.

Располагая коэффициентом охвата c_3 , можно оценить поправку к эффективной проницаемости k^* , порождаемую наличием застойных зон. Будем считать, что в матрицу проницаемости k^* вкраплены с вероятностью $1 - c_3$ включения нулевой проницаемости (при этом предполагается, что застойные зоны распределены равномерно по областям повышенной и пониженной проницаемости. Основанием для этого является невысокое значение коэффициента корреляции проницаемости и энергии, оказавшееся равным 0,49).

Очевидно, что средняя проницаемость системы матрица — включения $k_0^* = k^* c_3$, а дисперсия проницаемости $D_1 = k^{*2} c_3(1 - c_3)$. Используя формулу (1.9), получаем эффективную проницаемость среды для неньютоновской жидкости

$$k^{**} = k^* v_3, \quad v_3 = \frac{3c_3^2}{1 + 2c_3} \tag{2.4}$$

Таким образом, в неоднородной среде фильтрация может быть описана законом Дарси

$$V = - \frac{k^{**}}{\mu} \nabla p$$

но коэффициент эффективной проницаемости k^{**} зависит от k_0, ζ, φ . На фиг. 2 приведены кривые $v_3 = v_3(\varphi, \zeta)$. Легко видеть, что при $\zeta = 0$ функция

$$v_3 = 1(\varphi < 1) \quad \text{и} \quad v_3 = 0(\varphi > 1)$$

Аналогично может быть рассмотрена плоская задача фильтрации неньютоновской жидкости в среде со случайной неоднородностью. Следует только напомнить, что эффективная проницаемость при плоской фильтрации отлична от (1.9) и имеет вид [4]

$$k^* = k_0 (1 + 1/2 \zeta^2)^{-1} \tag{2.5}$$

и, следовательно, для v_2 получим

$$v_2 = \frac{2c_2^2}{1 + c_2} \tag{2.6}$$

Как показывают расчеты по формулам (1.14) и (2.6), кривые $c_2(\varphi)$ и $v_2(\varphi)$ в случае плоской задачи имеют тот же характер, что и аналогичные зависимости, изображенные на фиг. 1, 2 и соответствующие трехмерной фильтрации. Однако в плоском случае функции c_2 и v_2 убывают несколько быстрее, чем на фиг. 1 и 2, что объясняется повышением роли застойных зон, связанным с понижением размерности пространства.

Перейдем к рассмотрению одномерной фильтрации в слоистой системе. Выражение для коэффициента охвата системы c_1 дается формулой (1.17), а эффективная проницаемость при предположении, что в охваченных слоях фильтрация ньютоновская, определяется соотношением

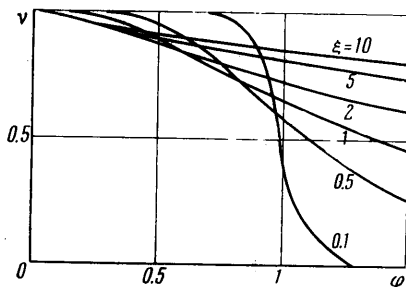
$$k^{**} = \int_{k_0, \varphi}^{\infty} k f_1(k) dk \quad (2.7)$$

и представима после вычислений в виде

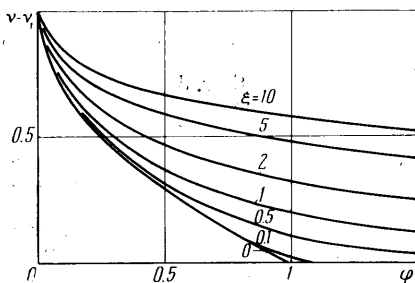
$$k^{**} = k^* v_1$$

$$v_1 = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \delta),$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln \varphi - \ln \sqrt{1 + \zeta^2}}{\sqrt{\ln(1 + \zeta^2)}} \quad (2.8)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Остается добавить, что в одномерном случае $k^* = k_0$. Зависимости $c_1(\varphi)$ и $v_1(\varphi)$ изображены на фиг. 3 и 4. Если кривая $c_1(\varphi)$ имеет тот же характер, что в случае плоского и пространственного течения, то $v_1(\varphi)$ при $\zeta \neq 0$ значительно отличается от аналогичных кривых, представленных на фиг. 2.

Интересным обстоятельством является рост v_1 с возрастанием ζ в области $\varphi > 1$. Иными словами, даже сильная неоднородность (большие ζ) приводит к росту эффективной проницаемости, в то время как коэффициент охвата убывает. Причиной такого эффекта является возрастание количества жидкости, фильтрующейся через высокопроницаемые слои, общее количество которых с ростом ζ при фиксированном k_0 убывает.

Аналогично может быть изучена одномерная задача при законе фильтрации [7, 8, 10]

$$V(r) = 0, \quad |\nabla p| \leq \theta; \quad V(r) = -k/\mu (\nabla p - \nabla p / |\nabla p| \theta), \quad |\nabla p| \geq \theta \quad (2.9)$$

В одномерном случае из (2.9) имеем при $|dp_0/dx| \geq \theta$

$$V = -\frac{k}{\mu} \frac{dp_0}{dx} + \frac{\lambda \sqrt{k}}{u} \operatorname{sign} \frac{dp_0}{dx} \quad (2.10)$$

Считая, что $\ln k$ распределен нормально, осредним (2.10) в интервале $k_0 \varphi \leq k < \infty$, т. е. по охваченной фильтрацией части слоистой системы. После преобразований получим

$$\langle V \rangle = -\frac{k_1^{**}}{\mu} \frac{dp_0}{dx} \quad (2.11)$$

$$k_1^{**} = k_0 (v_1 - v_0), \quad v_0 = \frac{\sqrt{\varphi}}{2 \sqrt{1 + \zeta^2}} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{\ln \varphi}{\sqrt{2 \ln(1 + \zeta^2)}} \right]$$

Нетрудно убедиться, что v_0 является поправкой к эффективной проницаемости (2.8), порожденной введением закона фильтрации в форме (2.9). График функции $v_1 - v_0$ представлен на фиг. 5. Сопоставление фиг. 4 и 5 показывает, что дополнительный по сравнению с линейным законом Дарси член в уравнении (2.9) приводит к существенному снижению эффективной проницаемости особенно при малых ζ .

Следует отметить, что, поскольку в одномерной задаче охват однозначно определяется условием $|dp_0/dx| \geq \theta$ и не зависит от вида закона фильтрации, вычисленный ранее коэффициент c_1 , определяемый формулой (1.17) и фиг. 3, имеет место и в рассматриваемом случае.

Авторы благодарят В. М. Ентова за обсуждение статьи и полезные замечания.

Поступило 16 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А. А. Прикладные методы случайных функций, Изд. 2. М., «Наука», 1968.
2. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. Свойства выборочных функций и их приложения. М., «Мир», 1969.
3. Мендельсон М. М., Швидлер М. И. О дисперсионных фильтрационных эффектах в средах со случайными неоднородностями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
4. Швидлер М. И. О решении типа источника в задаче о нестационарной фильтрации жидкости в среде со случайной неоднородностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
5. Султанов Б. И. О фильтрации вязко-пластичных жидкостей в пористой среде. Изв. АН АзербССР, Сер. физ.-мат. и техн. н., 1960, № 5.
6. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967). М., «Наука», 1969.
7. Мирзаджанзаде А. Х., Хасаев А. М., Гурбанов Р. С., Ахмедов З. М. Газогидродинамические особенности разработки месторождений не-newтоновских нефтей. Нефт. хоз-во, 1968, № 8.
8. Ентов В. М. Двумерные и нестационарные одномерные задачи движения не-newтоновских жидкостей в пористой среде. Нефт. хоз-во, 1968, № 10.
9. Девликамов В. В., Хабибуллин З. А. Структурно-механические свойства нефтей некоторых месторождений Башкирии. Нефт. хоз-во, 1968, № 10.
10. Алишаев М. Г., Вахитов Г. Г., Глумов И. Ф., Фоменко И. Е. О фильтрации пластовой девонской нефти при пониженных температурах. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник, М., «Недра», 1966.
11. Алишаев М. Г. О стационарной фильтрации с начальным градиентом. Теория и практика добычи нефти. Ежегодник, М., «Недра», 1968.