О ДВИЖЕНИИ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ В СЛОИСТОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНОЙ ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА

В. М. МАКСИМОВ

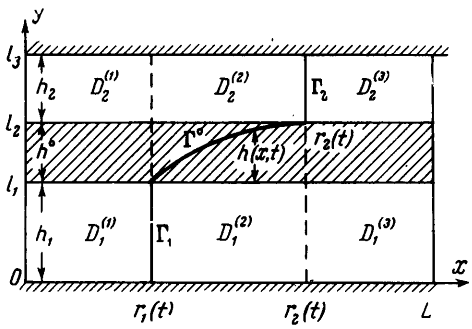
(Москва)

Рассмотрена постановка задач вытеснения одной несжимаемой жидкости другой с неизвестной подвижной границей в многослойной пористой среде, состоящей из хорошо проницаемых пропластков, разделенных мало проницаемыми перемычками.

В работе [1] при рассмотрении частной задачи такого типа при интегрировании осредненных уравнений для давлений [2] исходили из двух предельных схем течения, одна из которых соответствует ускорению продвижения фронта вытеснения по сравнению с истинным движением, а вторая — его замедлению. Показано, что такие приближения часто являются удовлетворительными.

В данной работе в рамках принимаемой схемы [2] приводится точная постановка задач вытеснения. Показано, что двумерные задачи вытеснения в слоистых пластах можно свести к системе алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка, которую в общем случае нетрудно решить численно на ЭВМ. Для некоторого класса граничных условий указанная система допускает аналитическое решение. В заключение для частной модели пласта приводится точное решение задачи фильтрации с неизвестной подвижной границей, имеющей практическое приложение.

1. Плоскопараллельное движение. Рассмотрим совместную фильтрацию двух несжимаемых жидкостей в неоднородном изолированном пласте, состоящем из двух хорошо проницаемых пропластков, разделенных мало проницаемой перемычкой (фиг. 1). Модель трехслойного пласта принята для простоты, и рассуждения, приведенные ниже, непосредственно обобщаются на случай n-слойного пласта, моделируемого системой горизонтальных пропластков с различными проницаемостями k_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), чередующихся с перемычками, причем проницаемости основных пропластков связаны[1] соотношениями $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$.



Фиг. 1

В начальный момент времени $t = 0$ через галерею, расположенную на линии $x = 0$, в ограниченный пласт длины L, состоящий из двух пропластков, разделенных слабо проницаемой перемычкой (фиг. 1), и полностью насыщенный одной несжимаемой жидкостью (нефтью), начинают закачивать другую несжимаемую жидкость (воду). Проницаемость верхнего пропластка $k_2 > k_1$, проницаемость перемычки $k^\circ \ll k_i$ ($i = 1, 2$). Вытеснение будем считать «поршневым». Область течения состоит из следующих зон: зона $D_i^{(1)}$ ($0 \leqslant x \leqslant r_1$), занятая вторг-

[1] Это допущение не принципиально; при произвольных (но фиксированных) связях между проницаемостями k_i рассмотрение несколько осложнится.

шейся водой; зона вытесняемой нефти $D_i^{(3)}$ $(r_2 \leqslant x \leqslant L)$ и промежуточная зона $D_i^{(2)}$ $(r_1 \leqslant x \leqslant r_2;\ i = 1, 2)$. Зоны, занятые водой и нефтью в верхнем и нижнем пропластке, отделены одна от другой подвижными границами Γ_i, закон движения которых будем искать в виде[2] $r_i = r_i(t)$, $i = 1, 2$ (здесь и всюду далее нижний индекс 1 относится к нижнему пропластку, нижний индекс 2 — к верхнему пропластку, характеристики перемычки отмечаются нулевым индексом вверху).

Промежуточная зона $D_i^{(2)}$ занята и вытесняемой и вытесняющей жидкостями. Вследствие повышения давления в пропластках в зонах $D_i^{(1)}$ и $D_i^{(3)}$ будет происходить переток однородной жидкости через перемычку. В части зоны $D^{(2)}$, связанной с перемычкой, при этом образуется граница раздела Γ° между вытесняемой и вытесняющей жидкостями, форма которой будет определяться выражением

$$y^\circ = h_1 + h(x, t) \qquad (0 \leqslant h(x, t) \leqslant h^\circ) \tag{1.1}$$

Здесь $h(x, t)$ — мощность части перемычки, занятая вытесняемой жидкостью.

Задача состоит в нахождении распределения давлений в каждой зоне и функций $r_i(t)$ и $h(x, t)$.

В верхнем и нижнем пропластке каждой из зон $D_i^{(\alpha)}$ давление $P_i^{(\alpha)}(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 P_i^{(\alpha)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_i^{(\alpha)}}{\partial y^2} = 0, \qquad (x, y) \in D_i^{(\alpha)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ i = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Здесь индекс α указывает номер зоны, индекс i — номер пропластка; время t входит как параметр через граничные условия.

Вследствие условия $k^\circ \ll k_i$ $(i = 1, 2)$ горизонтальная фильтрация в перемычке пренебрежимо мала по сравнению с вертикальным движением. Поэтому, согласно схеме Мятиева — Гиринского [3, 4], распределение давлений $P^{\circ(\alpha)}$ в перемычке можно считать линейным по y

$$P^{\circ(\alpha)} = a^{(\alpha)}(x, t)y + b^{(\alpha)}(x, t) \qquad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

Коэффициенты $a^{(\alpha)}$, $b^{(\alpha)}$ легко определяются, если известны давления $P_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2)$ в основных пропластках.

После осреднения уравнений (1.2) по мощности верхнего и нижнего пропластков по схеме, описанной в [2], и учета соотношений (1.3) и условия непроницаемости верхней и нижней границы пласта

$$\partial P_i^{(\alpha)} / \partial y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,\ y = l_3 \qquad (i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, 3)$$

получим уравнения для определения средних давлений $p_i^{(\alpha)}(x, t)$ в пропластках в зонах $D_i^{(\alpha)}$

$$\frac{\partial^2 p_i^{(\alpha)}}{\partial x^2} - \frac{(-1)^{i-1}k^\circ}{k_i h_i h^\circ}\left(p_1^{(\alpha)} - p_2^{(\alpha)}\right) = 0 \quad \text{в зоне } D_i^{(\alpha)} \ (i=1, 2;\ \alpha=1, 3) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 p_i^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{(-1)^{i-1}\mu_i^* k^\circ}{k_i h_i \varphi(x, t)}\left(p_1^{(2)} - p_2^{(2)}\right) = 0 \quad \text{в зоне } D_i^{(2)} \ (i=1, 2) \tag{1.5}$$

$$(r_1(t) \leqslant x \leqslant r_2(t))$$

$$p_i^{(\alpha)}(x, t) = \langle P_i^{(\alpha)}(x, y, t)\rangle = \frac{1}{h_i}\int_{a_i}^{b_i} P_i^{(\alpha)}(x, y, t)\,dy \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ i = 1, 2)$$

$$(a_1 = 0, \quad b_1 = h_1; \quad a_2 = l_2 = h_1 + h^\circ, \quad b_2 = l_3 = l_2 + h_2)$$

---

[2] Предположение о прямолинейности фронтов вытеснения в пропластках представляется разумным вследствие того, что их мощности $h_i \ll L$ $(i = 1, 2)$.

Здесь

$$\varphi(x, t) = (\mu^* - 1)h(x, t) + h^\circ \qquad (\mu_1^* = \mu^* = \mu^{(3)} / \mu^{(1)},\ \mu_2^* = 1) \tag{1.6}$$

$\mu^{(1)}$ — вязкость вытесняющей жидкости, $\mu^{(3)}$ — вязкость вытесняемой жидкости.

Если считать, что мощности пропластков h_1, h_2 и мощность перемычки h° одного порядка, то вследствие условия $k^\circ \ll k_i$ $(i = 1, 2)$ выражения для скоростей перетока между пластами в зонах $D^{(1)}$ и $D^{(3)}$ [2] совпадают с аналогичными выражениями работ [3, 4]

$$v^{(\alpha)}(x, t) = \frac{k^\circ}{\mu^{(\alpha)} h^\circ}(p_1^{(\alpha)} - p_2^{(\alpha)}) \quad \text{в зоне } D^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 3) \tag{1.7}$$

В зоне $D^{(2)}$ для скорости перетока через перемычку имеем

$$v^{(2)}(x, t) = k^\circ [\mu^{(1)} \varphi(x, t)]^{-1} (p_1^{(2)} - p_2^{(2)}) \tag{1.8}$$

При этом согласно [2] истинные давления в пропластках $P_i^{(\alpha)}(x, y, t)$ выражаются через средние давления $p_i^{(\alpha)}(x, t)$ следующим образом:

$$P_1^{(\alpha)} = p_1^{(\alpha)} - (6\beta_1^{(\alpha)})^{-1}(3y^2 - h_1) v^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$P_2^{(\alpha)} = p_2^{(\alpha)} + (6\beta_2^{(\alpha)})^{-1}(3y^2 - l_3^2 - l_3 l_2 - l_2^2) v^{(\alpha)} - $$
$$- (2\beta_2^{(\alpha)})^{-1} l_3 (2y - l_3 - l_2) v^{(\alpha)}$$
$$(\beta_i^{(\alpha)} = k_i h_i / \mu^{(\alpha)},\ i = 1, 2)$$

Пусть давления $p_i^{(\alpha)}(x, t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$p_i^{(1)}(0, t) = p_{0i}(t), \qquad p_i^{(3)}(L, t) = p_i^*(t) \tag{1.9}$$

$$p_i^{(1)}(r_1, t) = p_i^{(2)}(r_1, t), \quad p_i^{(2)}(r_2, t) = p_i^{(3)}(r_2, t) \quad (i = 1, 2) \tag{1.10}$$

$$\mu^* \frac{\partial p_i^{(1)}(r_1, t)}{\partial x} = \frac{\partial p_i^{(2)}(r_1, t)}{\partial x}, \qquad \mu^* \frac{\partial p_i^{(2)}(r_2, t)}{\partial x} = \frac{\partial p_i^{(3)}(r_2, t)}{\partial x} \tag{1.11}$$

Полагая для простоты $p_{01} = p_{02} = p_0$, $p_1^* = p_2^* = p^*$, общие решения уравнений (1.4) с учетом условий (1.9) получаем в виде

$$p_i^{(1)}(x, t) = (-1)^{i-1} 2\alpha_i A_1(t) \operatorname{sh} \lambda x + A_2(t) x + p_0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant r_1(t)) \tag{1.12}$$

$$p_i^{(3)}(x, t) = (-1)^{i-1} \alpha_i A_3(t) b(\lambda x) + A_4(t)(x - L) + p^*$$
$$(r_2(t) \leqslant x \leqslant L) \tag{1.13}$$

$$\lambda^2 = \frac{k^\circ}{h^\circ}\left(\frac{1}{k_1 h_1} + \frac{1}{k_2 h_2}\right), \quad \alpha_1 = \frac{k_2 h_2}{k_1 h_1 + k_2 h_2}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1, \quad b(x) = e^x - e^{2L - x} \tag{1.14}$$

Здесь A_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные интегрирования.

Задачу определения давлений в зоне $D_i^{(2)}$ удобно переформулировать в терминах функции $h(x, t)$, определяющей форму границы раздела Γ° в перемычке.

С учетом (1.8) для нахождения формы границы Γ° имеем уравнение

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k^\circ}{\mu^{(1)} \varphi(x, t)} [p_1^{(2)}(x, t) - p_2^{(2)}(x, t)] \tag{1.15}$$

с начальным условием

$$h(x, 0) = h_0(x) \tag{1.16}$$

Здесь x является параметром $(r_1(t) \leqslant x \leqslant r_2(t))$

Введя далее функцию

$$P_{12}(x, t) = p_1^{(2)}(x, t) - p_2^{(2)}(x, t)$$

в результате сложения уравнений (1.5) получим

$$\frac{\partial^2 P_{12}}{\partial x^2}-\frac{\omega^2 P_{12}(x,t)}{\varphi(x,t)}=0, \qquad \omega^2=k^\circ\left(\frac{\mu^*}{k_1h_1}+\frac{1}{k_2h_2}\right) \tag{1.17}$$

Из уравнения (1.15) с учетом (1.6) находим

$$P_{12}(x,\ t)=\varkappa(\partial\varphi^2/\partial t) \qquad (\varkappa=m\mu^{(1)}/2(\mu^*-1)k^\circ) \tag{1.18}$$

Исключая далее $P_{12}(x,\ t)$ из уравнения (1.17) с помощью соотношения (1.18) и меняя порядок дифференцирования по времени и координате, окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2}-2\omega^2\varphi(x,t)\right]=0$$

интегрируя которое по времени, найдем

$$\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x^2}-2\omega^2\varphi(x,t)=f(x) \qquad (r_1(t)\leqslant x\leqslant r_2(t)) \tag{1.19}$$

Здесь $f(x)$ — произвольная функция своего аргумента, определяемая из начального условия (1.16).

Граничные условия для уравнения (1.19) легко получить из (1.10) с помощью выражений (1.18), (1.12), (1.13). Имеем

$$\varkappa\partial\varphi^2(r_1,t)/\partial t=2A_1\operatorname{sh}\lambda r_1, \qquad \varkappa\partial\varphi^2(r_2,\ t)/\partial t=A_3b(\lambda r_2) \tag{1.20}$$

Решив задачу (1.19)—(1.20), получим выражение для $\varphi(x,\ t)$ через A_1, A_3, r_1 и r_2. Для частного вида функции $f(x)$ можно найти общее решение уравнения (1.19). В частности, это уравнение можно проинтегрировать, если $f(x)=\mathrm{const}$. Последнего можно добиться соответствующим заданием начального условия (1.16).

Выполнение условий

$$h(r_1,\ t)=0,\ \text{или}\ \ \varphi(r_1,\ t)=h^\circ; \qquad h(r_2,\ t)=h^\circ,\ \text{или}\ \ \varphi(r_2,\ t)=\mu^*h^\circ \tag{1.21}$$

позволит получить соотношения для нахождения функций $r_i(t)$, определяющих движение фронта вытеснения Γ_i в пропластках ($i=1,\ 2$).

Таким образом, выражения (1.19), (1.20) и (1.21) вместе с четырьмя условиями (1.11) дают замкнутую систему соотношений (алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка) для определения всех неизвестных функций $\varphi(x,\ t)$, $r_i(t)$ $(i=1,2)$, $A_k(t)$ $(k=1,2,3,4)$.

В общем случае сформулированную задачу нетрудно решить численно на ЭВМ. Если известно общее решение уравнения (1.19), то для некоторых частных схем вытеснения задача допускает аналитическое решение.

2. Осесимметричное движение. В аналогичной постановке можно рассматривать осесимметричные задачи вытеснения в неоднородном изолированном пласте с центральной нагнетательной скважиной радиуса r_0, моделируемым двумя пропластками цилиндрической формы, имеющими радиус R и разделенными перемычкой. Начало координат поместим у подошвы пласта, а ось z направим вверх по направлению оси скважины. Всюду далее, если не оговаривается особо, сохраняются обозначения и терминология п. 1.

Исходные дифференциальные уравнения для определения давлений $P_i^{(\alpha)}(r,\ z,\ t)$ в верхнем и нижнем пропластках в этом случае имеют вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P_i^{(\alpha)}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 P_i^{(\alpha)}}{\partial z^2}=0, \qquad (r,z)\in D_i^{(\alpha)}\ {\scriptstyle(i=1,\ 2;\ \alpha=1,\ 2,\ 3)} \tag{2.1}$$

После осреднения уравнений (2.1) получим

$$\Delta p_i^{(\alpha)} - \frac{(-1)^{i-1}k^\circ}{k_i h_i h^\circ}(p_1^{(\alpha)} - p_2^{(\alpha)}) = 0 \quad \text{в зоне } D_i^{(\alpha)} \ (\alpha=1,3) \tag{2.2}$$

$r_0 \leqslant r \leqslant r_i(t)$ при $\alpha = 1$;

$$r_i(t) \leqslant r \leqslant R \text{ при } \alpha = 3 \quad (i=1,2)$$

$$\Delta p_i^{(2)} - \frac{(-1)^{i-1}\mu_i^* k^\circ}{k_i h_i \varphi(r,t)}(p_1^{(2)} - p_2^{(2)}) = 0 \quad \text{в зоне } D_i^{(2)} \ (i=1,2) \tag{2.3}$$

$$r_1(t) \leqslant r \leqslant r_2(t)$$

Здесь $\varphi(r, t)$ получается из (1.6) заменой координаты x на r

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r_2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad p_i^{(\alpha)}(r,t) = \langle P_i^{(\alpha)}(r,z,t)\rangle = \frac{1}{h_i}\int_{a_i}^{h_i} P_i^{(\alpha)}(r,z,t)\,dz$$

Задача решается при краевых условиях (1.10), (1.11) и условиях

$$p_i^{(1)}(r_0, t) = p_{0i}(t), \qquad p_i^{(3)}(R, t) = p_i^*(t) \quad (i=1,2) \tag{2.4}$$

Общие решения систем уравнений (2.2) с учетом граничных условий (2.4) (для простоты считаем, что $p_{01} = p_{02} = p_0$ и $p_1^* = p_2^* = p^*$) имеют вид

$$p_i^{(1)}(r,t) - p_0 = \frac{\pi\alpha_i A_1(t)}{2K_0(\lambda r_0)}\operatorname{bsh}_0\lambda(r - r_0) + A_2(t)\ln\frac{r}{r_0} \tag{2.5}$$

$$(r_0 \leqslant r \leqslant r_1(t);\ i = 1, 2)$$

$$p_i^{(3)}(r,t) - p^* = \frac{\pi\alpha_i A_3(t)}{2K_0(\lambda R)}\operatorname{bsh}_0\lambda(r - R) + A_4(t)\ln\frac{r}{R} \qquad (r_2(t) \leqslant r \leqslant R)$$

$$\operatorname{bsh}_0(x - y) = 2\pi^{-1}[I_0(x)K_0(y) - K_0(x)I_0(y)]; \qquad \alpha_1 = 1 \tag{2.6}$$

$$\alpha_2 = -\beta_1^{(\alpha)}/\beta_2^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 3)$$

Здесь A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) — постоянные интегрирования; $I_0(x)$, $K_0(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; bsh_0 — модифицированный бесселев разностный синус нулевого порядка [5].

Вследствие малости величины λr_0 при вычислениях можно использовать асимптотику функций Бесселя для малых значений аргумента

$$I_0(\lambda r_0) \approx 1, \quad K_0(\lambda r_0) \approx \ln(2/\gamma\lambda r_0) \quad (\gamma \text{ — константа Эйлера})$$

$${}^1\!/_2\pi \operatorname{bsh}_0\lambda(r - r_0) \approx \ln(2/\gamma\lambda r_0)I_0(\lambda r) - K_0(\lambda r)$$

Аналогично п. 1 давления в зоне $D_i^{(2)}$ определим через функцию $\varphi(r,t)$, определяющую форму границы раздела Γ° в перемычке. Для последней получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\Delta\varphi^2(r,t) - 2\omega^2\varphi(r,t) = f(r) \qquad (r_1(t) \leqslant r \leqslant r_2(t)) \tag{2.7}$$

Здесь функция $f(r)$ определяется из начального условия (1.16) после замены в нем x на r.

Граничные условия для уравнения (2.7) получаются из (1.10) аналогично п. 1 и имеют вид

$$\varkappa \frac{\partial \varphi^2(r_1, t)}{\partial t} = \frac{\pi \alpha A_1}{2K_0(\lambda r_0)} \operatorname{bsh}_0 \lambda (r_1 - r_0)$$

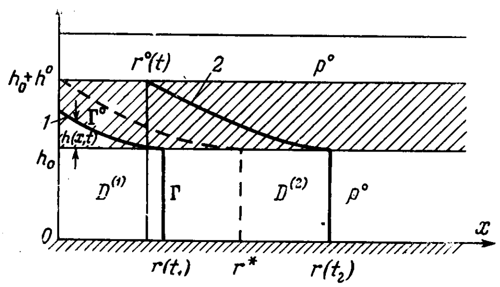
$$\varkappa \frac{\partial \varphi^2(r_2, t)}{\partial t} = \frac{\pi \alpha A_3}{2K_0(\lambda R)} \operatorname{bsh}_0 \lambda (r_2 - r_0) \tag{2.8}$$

$$(\alpha = 1 + k_1 h_1 / k_2 h_2)$$

Соотношения (2.7), (2.8), (1.21) и (1.11) образуют замкнутую систему уравнений для определения семи неизвестных функций $\varphi(r, t)$, $r_i(t)$ $(i = 1, 2)$; $A_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Знание последних позволяет полностью решить задачу.

Отметим, что задача существенно упрощается, если удается найти общее решение уравнения (2.7).

3. Пример. В качестве примера, иллюстрирующего постановку задач вытеснения в неоднородных пластах, рассмотрим задачу о нагнетании через галерею несжимаемой жидкости в линейный полубесконечный пласт (фиг. 2) с непроницаемой нижней границей и слабо проницаемой перемычкой над пластом. Будем предполагать, что при этом над перемычкой и справа от фронта вытеснения $r = r(t)$ поддерживается постоянное начальное давление p°. Отметим, что принимаемая схема является удовлетворительной при вытеснении маловязкой жидкости (например, газа).



Фиг. 2

Следует выделить две различные фазы движения жидкости. В первой фазе течения закачиваемая жидкость заполняет часть перемычки (границе Γ° соответствует кривая *1* на фиг. 2). Предельное положение кривой Γ°, соответствующее моменту времени $t = t^*$, показано на фиг. 2 пунктиром. При $t > t^*$ (вторая фаза) образуются две зоны течения: в зоне $D^{(1)} (0 \leqslant x \leqslant r^\circ(t))$ жидкость перетекает в лежащий выше пропласток через всю мощность перемычки, в зоне $D^{(2)} (r^\circ(t) \leqslant x \leqslant r(t))$ нагнетаемой жидкостью заполнена лишь часть перемычки (кривая *2* на фиг. 2 показывает положение границы Γ° в этом случае).

Определяющие уравнения для средних давлений и граничные условия, соответствующие первой фазе течения, имеют вид

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\omega}{h(x, t)} (p - p^\circ) = 0 \qquad \left(\omega = \frac{k^\circ}{k_0 h_0}\right) \tag{3.1}$$

$$p(x, t) - p^\circ = \frac{m\mu}{2k^\circ} \frac{\partial h^2}{\partial t} \qquad (0 \leqslant x \leqslant r(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*) \tag{3.2}$$

$$h(r, t) = 0 \tag{3.3}$$

$$p(0, t) = p_0(t), \qquad p(r, t) = p^\circ \tag{3.4}$$

Здесь $p(x, t)$ — давление в части пласта, занятой нагнетаемой жидкостью, μ — ее вязкость; m, k_0, h_0 — пористость, проницаемость и мощность пласта соответственно (для параметров перемычки обозначения прежние).

Соотношения (1.19), (1.20) с учетом (3.4) и начального условия

$$h(x, 0) = 0 \tag{3.5}$$

принимают в данном случае вид

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} - 2\omega h(x, t) = 0 \tag{3.6}$$

$$\partial h^2(0, t) / \partial t = 2k^\circ (p_0 - p^\circ) / m\mu, \qquad \partial h^2(r, t) / \partial t = 0 \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) имеет интеграл «живых сил»

$$(\partial h^2 / \partial x)^2 = {}^8/_3 \omega h^3(x, t) + C(t) \tag{3.8}$$

Здесь $C(t)$ — постоянная интегрирования.

Принимая во внимание, что $\partial h^2 / \partial x < 0$, так как $h(x, t)$ есть убывающая функция x (фиг. 2), из (3.8) получаем

$$\partial h^2 / \partial x = -[{}^8/_3 \omega h^3(x, t) + C(t)]^{1/2}$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом условия (3.3), найдем

$$\int_0^h \frac{2\xi\, d\xi}{[{}^8/_3 \omega \xi^3 + C(t)]^{1/2}} = -x + r(t) \tag{3.9}$$

Продифференцируем обе части соотношения (3.9) по t

$$\frac{\partial h^2(x,t)}{\partial t} + F(h) \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2\xi}{F(\xi)} \right] d\xi = F(h) \frac{dr}{dt}, \qquad F(x) = [{}^8/_3 \omega x^3 + C(t)]^{1/2} \tag{3.10}$$

С учетом (3.3) и второго условия (3.7) из равенства (3.10), справедливого при любых $0 \leqslant x \leqslant r(t)$, находим, что $C(t) = 0$. Тогда после интегрирования в соотношении (3.9) имеем

$$h(x, t) = (\omega / 6)[r(t) - x]^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant r(t)) \tag{3.11}$$

Далее из (3.11) и первого условия (3.7) определим, учитывая начальное условие $r(0) = 0$

$$r(t) = [72 k_0^2 h_0^2 (m\mu k^\circ)^{-1} (p_0 - p^\circ) t]^{1/4} \qquad (0 \leqslant t \leqslant t^*) \tag{3.12}$$

а затем из уравнения (3.2) — давление

$$p(x, t) - p^\circ = \frac{2m\mu}{k^\circ} \left(\frac{\omega}{6} \right)^2 [r(t) - x]^3 \frac{dr}{dt} \qquad (0 \leqslant x \leqslant r(t)) \tag{3.13}$$

Полагая $h = h^\circ$ и $x = 0$ в равенстве (3.11), найдем предельное положение r^* фронта нагнетаемой жидкости в пласте и далее из (3.12) — соответствующий ему момент времени t^* (фиг. 2)

$$r^* = (6h^\circ / \omega)^{1/2}, \qquad t^* = m\mu (h^\circ)^2 / 2k^\circ (p_0 - p^\circ) \tag{3.14}$$

В момент времени $t = t^*$ распределение давлений в основном пропластке имеет вид

$$p(x, t^*) = p^\circ + (\omega / 6)^2 (6 k_0 h_0 / k^\circ h^\circ)^{1/2} (p_0 - p^\circ)(r^* - x)^3 \qquad (0 \leqslant x \leqslant r^*)$$

Вторая фаза движения ($t > t^*$) описывается следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial x^2} - \alpha^2 (p^{(1)} - p^\circ) = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant r^\circ(t)) \tag{3.15}$$

$$(\alpha^2 = \omega / h^\circ)$$

$$p^{(2)}(x, t) - p^\circ = \frac{m\mu}{2k^\circ} \frac{\partial h^2}{\partial t} \qquad (r^\circ(t) \leqslant x \leqslant r(t), \quad t \geqslant t^*) \tag{3.16}$$

$$p^{(1)}(0, t) = p_0(t) \tag{3.17}$$

$$p^{(1)}(r^\circ, t) = p^{(2)}(r^\circ, t), \qquad \partial p^{(1)}(r^\circ, t) / \partial x = \partial p^{(2)}(r^\circ, t) / \partial x \tag{3.18}$$

$$h(x, t) = {}^1/_6 \omega [r(t) - x]^2 \qquad (r^\circ(t) \leqslant x \leqslant r(t)) \tag{3.19}$$

Полагая $h = h^\circ$ в равенстве (3.19), найдем

$$r(t) - r^\circ(t) = r^* = \mathrm{const} \tag{3.20}$$

т. е. закон движения верхнего конца кривой Γ° по кровле перемычки $r^\circ(t)$ «жестко» связан с движением фронта $r(t)$ жидкости в пласте.

Общее решение уравнения (3.15) с учетом условия (3.17) имеет вид

$$p^{(1)}(x, t) - p^\circ = 2A(t) \operatorname{sh} \alpha x + (p_0 - p^\circ) e^{-\alpha x} \tag{3.21}$$

(A — постоянная интегрирования).

Из первого условия (3.18) с учетом (3.21), (3.16) и (3.19) найдем выражение, связывающее функцию $A(t)$ и $r(t)$

$$2A\,\mathrm{sh}\,\alpha(r-r^*)+(p_0-p^\circ)e^{-\alpha(r-r^*)}=\frac{m\mu\omega h^\circ r^*}{3k^\circ}\cdot\frac{dr}{dt} \tag{3.22}$$

Исключая $A(t)$ из (3.22) при помощи второго условия (3.18), для определения $r(t)$ получаем уравнение

$$\frac{m\mu h^\circ}{3k^\circ}\left(\frac{k^\circ h^\circ}{k_0h_0}\right)^{1/2}\left[\sqrt{6}\,e^{-\alpha(r-r^*)}+(3-\sqrt{6})\,\mathrm{sh}\,\alpha(r-r^*)\right]\frac{dr}{dt}=p_0-p^\circ$$

с начальным условием $r(t^*)=r^*$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем окончательно соотношение для определения $r(t)$

$$\sqrt{6}\,e^{-\alpha(r-r^*)}+(3-\sqrt{6})\,\mathrm{ch}\,\alpha(r-r^*)=\frac{3\alpha k^\circ(p_0-p^\circ)}{m\mu h^\circ}\left(\frac{k_0h_0}{k^\circ h^\circ}\right)^{1/2}(t-t^*)+3 \tag{3.23}$$

Далее из (3.22) и (3.23) найдем

$$2A(t)=\frac{p_0-p^\circ}{\mathrm{sh}\,\alpha r^\circ}\left(\frac{4t^*}{r^*}\frac{dr}{dt}-e^{-\alpha r^\circ}\right),\qquad dr\,/\,dt=(r^*\,/\,2t^*)\,(2\,\mathrm{ch}\,\alpha r^\circ+\sqrt{6}\,\mathrm{sh}\,\alpha r^\circ)^{-1} \tag{3.24}$$

и распределение давлений $p^{(1)}(x,t)$ можно найти теперь из (3.21).

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\xi=x\,/\,r^*,\qquad s=r\,/\,r^*,\qquad H=h\,/\,h^\circ,\qquad \tau=t\,/\,t^*$$

$$P(\xi,\tau)=\frac{p(\xi,\tau)-p^\circ}{p_0-p^\circ},\qquad P^{(\alpha)}(\xi,\tau)=\frac{p^{(\alpha)}(\xi,\tau)-p^\circ}{p_0-p^\circ}\qquad(\alpha=1,2)$$

Тогда полученные решения (3.11)—(3.13) и (3.23), (3.19), (3.21), (3.16) запишутся соответственно в виде

$$\begin{gathered}s(\tau)=\tau^{1/4},\qquad H(\xi,\tau)=(\tau^{1/4}-\xi)^2\\ P(\xi,\tau)=(\tau^{1/4}-\xi)^3\tau^{-3/4}\qquad(0\leqslant\tau\leqslant1,\ 0\leqslant\xi\leqslant s(\tau))\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{ch}\sqrt{6}(s-1)+\sqrt{2/3}\,\mathrm{sh}\sqrt{6}(s-1)={}^1/_2(\tau+1)\qquad(\tau\geqslant1)\\ H(\xi,\tau)=[s(\tau)-\xi]^2\qquad(s(\tau)-1\leqslant\xi\leqslant s(\tau))\\ P^{(1)}(\xi,\tau)=e^{-\sqrt{6}\xi}+(4ds\,/\,d\tau-e^{-\sqrt{6}s^\circ})\,\mathrm{sh}\sqrt{6}\xi\,/\,\mathrm{sh}\sqrt{6}s^\circ\qquad(0\leqslant\xi\leqslant s^\circ(\tau))\\ ds\,/\,d\tau=[2(2\,\mathrm{ch}\sqrt{6}s^\circ+\sqrt{6}\,\mathrm{sh}\sqrt{6}s^\circ)]^{-1}\qquad(s^\circ=s-1)\\ P^{(2)}(\xi,\tau)=4[s(\tau)-\xi]^3(ds\,/\,d\tau)\qquad(s(\tau)-1\leqslant\xi\leqslant s(\tau))\end{gathered} \tag{3.26}$$

Предельное распределение давлений, соответствующее моменту перехода от первой ко второй фазе течения ($\tau=1$, $s=1$), имеет вид

$$P(\xi)\equiv P(\xi,1)=P^{(2)}(\xi,1)=(1-\xi)^3\qquad(0\leqslant\xi\leqslant1)$$

По формулам (3.25) и (3.26) проводится расчет первой и второй фазы движения жидкости соответственно.

Отметим, что рассмотренная задача имеет не только иллюстративный характер, но представляет и самостоятельный интерес в связи с вопросами закачки загрязненных вод в подземные пласты и проблемой создания подземных хранилищ газа.

Автор глубоко признателен Л. И. Седову за внимание к работе.

Поступило 20 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Балашова Г. С., Максимов В. М., Филинов М. В. Об одной двумерной задаче вытеснения в неоднородных слоистых пластах при наличии неизвестной подвижной границы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
2. Лурье М. В., Максимов В. М. Об одном способе осреднения уравнений многофазной фильтрации при наличии перетоков между пластами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
4. Гусейн-Заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.
5. Советов Н. М., Авербух М. Э. Разностные бесселевы функции и их применение в технике. Саратов, Изд-во Саратовск. ун-та, 1968.