№ 5 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1970

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ В КАНАЛЕ

О. М. КИСЕЛЕВ

(Казань)

Исследуется плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости в канале с неровным дном при переменном давлении на поверхности потока с учетом сил тяжести и поверхностного натяжения.

Начало изучения установившихся капиллярно-гравитационных волн относится ко второй половине прошлого столетия и связано с именами Кельвина [1] и Рэлея [2]. С тех пор по этой проблеме появилось много работ, библиографию которых по 1963 год включительно можно найти в обзорах [3, 4]. Из более поздних работ следует назвать [5–12]. Подавляющее большинство этих работ посвящено изучению периодических течений жидкости бесконечной глубины, а также периодических течений при наличии прямолинейного или волнистого дна. Исследовались также непериодические течения жидкости бесконечной глубины [2] и течения типа уединенной волны в канале с прямолинейным дном [5, 9, 10].

1. В плоскости $z = x + iy$ рассматривается установившееся потенциальное течение тяжелой несжимаемой жидкости, ограниченное снизу криволинейной твердой стенкой. На поверхности потока действуют силы поверхностного натяжения интенсивности T и переменное давление $P_1(x)$. Ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх. На бесконечности вверх по течению дно потока асимптотически приближается к оси x, а функция $P_1(x)$ — к некоторой константе (характер этого приближения уточняется ниже (1.5)). При $x = -\infty$ движение жидкости невозмущенное и характеризуется скоростью V_0 и глубиной потока H.

В плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ области течения соответствует полоса шириной V_0H. Отобразим область w на область $\zeta = \xi + i\eta$ при помощи линейной подстановки $\zeta = \pi w / 2V_0H$. В плоскости ζ получим полосу шириной $\pi / 2$. Прямой $\eta = \pi / 2$ соответствует поверхность потока, а прямой $\eta = 0$ — твердая граница.

Рассмотрим функцию Жуковского

$$f = \ln\left(V_0\frac{dz}{dw}\right) = r + i\theta \qquad (r = \ln V_0/V)$$

Здесь V — модуль скорости, θ — угол наклона скорости к оси x. Отображающая функция $z(\zeta)$ выражается через $f(\zeta)$ по формуле

$$z = \frac{2H}{\pi}\int e^{f(\zeta)}\,d\zeta \tag{1.1}$$

На поверхности потока давление терпит скачок, причем выполняется соотношение

$$TV\frac{d\theta}{d\varphi} = P_1 - P \tag{1.2}$$

где φ — потенциал скорости, P — давление в жидкости. Подставляя в (1.2) выражение для P из интеграла Бернулли и дифференцируя полученное равенство по φ, нетрудно привести результат к виду (1.3)

$$\frac{\pi^2}{4}\alpha\beta\left(\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\frac{dr_1}{d\xi}\frac{d\theta_1}{d\xi}\right)e^{-2r_1}=\gamma\cos\theta_1-\frac{\pi}{2}\alpha\frac{dr_1}{d\xi}e^{-3r_1}+\sin\theta_1$$

$$\alpha = V_0^2 / gH, \quad \beta = T/\rho H V_0^2, \quad \gamma = (\rho g)^{-1} dP_1/dx$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность жидкости; индексом 1 будем отмечать функции $r(\xi)$, $\theta(\xi)$ при $\eta = \pi/2$, индексом 0 — при $\eta = 0$.

Будем считать, что величины γ, θ_0 являются известными функциями параметра ξ, причем

$$\gamma = \gamma(\xi), \qquad \theta_0 = \theta_0(\xi) \tag{1.4}$$

$$|\gamma(\xi)|,\ |\theta_0(\xi)| < M \text{ при } \xi \geqslant 0, \qquad |\gamma(\xi)|,\ |\theta_0(\xi)| < Me^{\varepsilon_1\xi} \text{ при } \xi \leqslant 0 \tag{1.5}$$

Здесь M, ε_1 — некоторые положительные константы. Случай $\gamma \equiv 0$, $\theta_0 \not\equiv 0$ соответствует течению жидкости по криволинейному дну при постоянном давлении над верхней границей, случай $\gamma \not\equiv 0$, $\theta_0 \equiv 0$ соответствует течению по прямолинейному горизонтальному дну с переменным давлением над верхней границей.

Таким образом, задача сводится к определению аналитической в полосе $-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$ функции $f(\zeta)$ по граничным условиям (1.3), (1.4) и дополнительному условию

$$\lim f(\zeta) = 0 \text{ при } \xi \to -\infty \tag{1.6}$$

После того как функция $f(\zeta)$ будет определена, с помощью (1.1) можно найти форму верхней и нижней границ потока и зависимость $P_1(x)$.

Решение задачи в точной постановке представляет значительные трудности. Поэтому, полагая, что величины r_1, θ_1, $dr_1/d\xi$, $d\theta_1/d\xi$ малы, будем в дальнейшем вместо условия (1.3) пользоваться линеаризованным соотношением

$$\frac{\pi^2}{4}\alpha\beta\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2}=\gamma-\frac{\pi}{2}\alpha\frac{dr_1}{d\xi}+\theta_1 \tag{1.7}$$

Заметим, что все интересующие нас элементы течения определяются через граничные значения $f(\zeta)$. Поэтому под решением задачи будем в дальнейшем понимать нахождение функций $\theta_1(\xi)$, $r_1(\xi)$, $r_0(\xi)$.

2. Аналитическая в полосе $-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty$, $0 \leqslant \eta \leqslant \pi/2$ функция $f = r + i\theta$ может быть различным образом определена по граничным значениям r и θ. В частности, если при $\xi \to -\infty$ существует предел $\lim r = r(-\infty)$, справедливы формулы

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\theta_0(\xi')\operatorname{csch}(\xi'-\zeta)+r_1(\xi')\operatorname{sch}(\xi'-\zeta)]\,d\xi' \tag{2.1}$$

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\{\theta_0(\xi')[\operatorname{cth}(\xi'-\zeta)-1]-\theta_1(\xi')[\operatorname{th}(\xi'-\zeta)-1]\}\,d\xi'+r(-\infty) \tag{2.2}$$

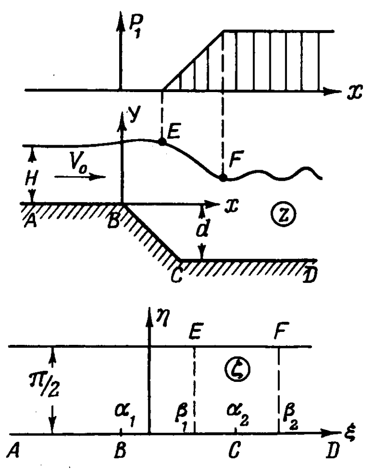
(Формула (2.1) выведена Вудсом [13], формулу (2.2) нетрудно получить аналогичным методом.) Вычитая (2.2) из (2.1), полагая $\zeta = \xi$ и учитывая (1.6), будем иметь

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta_0(\xi')\,d\xi'}{1-e^{\xi'-\xi}} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta_1(\xi')\,d\xi'}{1+e^{2(\xi'-\xi)}} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{r_1(\xi')\,d\xi'}{\mathrm{ch}(\xi'-\xi)} \tag{2.3}$$

Повторяя предыдущие рассуждения для функции $if = -\theta + ir$, получаем

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r_0(\xi')\,d\xi'}{1+e^{\xi'-\xi}} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r_1(\xi')\,d\xi'}{1+e^{2(\xi'-\xi)}} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta_1(\xi')\,d\xi'}{\mathrm{ch}(\xi'-\xi)} \tag{2.4}$$

Задачу будем решать с помощью двустороннего преобразования Лапласа [14], используя обозначения



Фиг. 1

$$\gamma(\xi) \doteq G(p) \qquad \left(G(p) = p\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\xi}\gamma(\xi)\,d\xi\right.$$

$$\left. p = \sigma + i\tau\right)$$

$$\theta_k(\xi) \doteqdot T_k(p), \qquad r_k(\xi) \doteqdot R_k(p), \qquad k = 0, 1$$

Функции $\gamma(\xi)$, $\theta_0(\xi)$ таковы (1.5), что их изображения существуют в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_1$. Относительно неизвестных функций $r_0(\xi)$, $\theta_1(\xi)$, $r_1(\xi)$ будем полагать, что они имеют изображения с полосой сходимости $0 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$.

Применяя двустороннее преобразование Лапласа к уравнениям (1.7), (2.3), (2.4), получаем соответственно

$$\tfrac{1}{4}\pi^2\alpha\beta p^2 T_1 = G - \tfrac{1}{2}\pi\alpha p R_1 + T_1 \tag{2.5}$$

$$T_0 = T_1 \cos \tfrac{1}{2}\pi p - R_1 \sin \tfrac{1}{2}\pi p$$

$$R_0 = R_1 \sin \tfrac{1}{2}\pi p + T_1 \sin \tfrac{1}{2}\pi p$$

Равенства (2.5) справедливы при $0 < \operatorname{Re} p < \min(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Из них легко выразить неизвестные функции T_1, R_1, R_0 через известные T_0, G

$$\begin{gathered}
R_0 = \{T_0[(1 - \tfrac{1}{4}\pi^2\alpha\beta p^2)\cos\tfrac{1}{2}\pi p + \tfrac{1}{2}\pi\alpha p \sin\tfrac{1}{2}\pi p] + G\}F^{-1} \\
R_1 = [T_0(1 - \tfrac{1}{4}\pi^2\alpha\beta p^2) + G\cos\tfrac{1}{2}\pi p]F^{-1} \\
T_1 = [T_0\tfrac{1}{2}\pi\alpha p + G\sin\tfrac{1}{2}\pi p]F^{-1} \\
F = \tfrac{1}{2}\pi\alpha p\cos\tfrac{1}{2}\pi p - (1 - \tfrac{1}{4}\pi^2\alpha\beta p^2)\sin\tfrac{1}{2}\pi p
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Функции $\theta_1(\xi)$, $r_k(\xi)$ $(k = 0, 1)$ определяются по формулам обращения [14]

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} T_1\frac{e^{p\xi}}{p}\,dp, \qquad r_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} R_k\frac{e^{p\xi}}{p}\,dp, \qquad 0 < c < \varepsilon_2 \tag{2.7}$$

Интегрирование ведется в плоскости комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$ вдоль прямой, параллельной мнимой оси, причем $\varepsilon_2 = \operatorname{Re} p_1$, где p_1 — тот из полюсов подынтегральной функции, который имеет наименьшую положительную вещественную часть.

3. Рассмотрим подробно случай, когда $\theta_0(\xi)$, $\gamma(\xi)$ являются кусочно-постоянными функциями. При этом дно потока и график функции $P_1(x)$

имеют полигональную форму (фиг. 1). Пусть

$$\theta_0(\xi)=\begin{cases}a_0=0 & \text{при } -\infty<\xi<\alpha_1\\ a_{k-1} & \text{при } \alpha_{k-1}<\xi<\alpha_k, \quad k=2,3,\ldots l\\ a_l=0 & \text{при } \alpha_l<\xi<\infty\end{cases}$$

$$\gamma(\xi)=\begin{cases}b_0=0 & \text{при } -\infty<\xi<\beta_1\\ b_{k-1} & \text{при } \beta_{k-1}<\xi<\beta_k, \quad k=2,3,\ldots m\\ b_m=0 & \text{при } \beta_m<\xi<\infty\end{cases}$$

Тогда

$$T_0=\sum_{k=1}^{l}(a_k-a_{k-1})e^{-p\alpha_k}, \qquad G=\sum_{k=1}^{m}(b_k-b_{k-1})e^{-p\beta_k}, \qquad 0<\operatorname{Re}p<\infty$$

Согласно (2.6), (2.7) будем при этом иметь

$$\theta_1=\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\mu_{1,k}+\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\nu_{1,k}, \qquad r_1=\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\mu_{2,k}+\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\nu_{2,k} \tag{3.1}$$

$$r_0=\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\mu_{3,k}+\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\nu_{3,k} \qquad \Delta a_k=a_k-a_{k-1}, \qquad \Delta b_k=b_k-b_{k-1}$$

$$\mu_{j,k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}M_je^{p(\xi-\alpha_k)}\,dp, \qquad \nu_{j,k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}N_je^{p(\xi-\beta_k)}\,dp \tag{3.2}$$

$$M_1={}^1\!/_2\pi\alpha F^{-1}, \qquad M_2=p^{-1}F^{-1}(1-{}^1\!/_4\pi^2\alpha\beta p^2)$$

$$M_3=p^{-1}F^{-1}[(1-{}^1\!/_4\pi^2\alpha\beta p^2)\cos{}^1\!/_2\pi p+{}^1\!/_2\pi\alpha p\sin{}^1\!/_2\pi p]$$

$$N_1=p^{-1}F^{-1}\sin{}^1\!/_2\pi p, \qquad N_2=p^{-1}F^{-1}\cos{}^1\!/_2\pi p, \qquad N_3=p^{-1}F^{-1}$$

В плоскости p рассмотрим последовательность квадратных контуров C_n

$$-2n-1\leqslant\sigma\leqslant 2n+1, \quad \tau=\pm 2n\pm 1; \qquad \sigma=\pm 2n\pm 1$$
$$-2n-1\leqslant\tau\leqslant 2n+1$$

Пусть $u_n={}^1\!/_2(2n+1)\pi$, а q — фиксированное число, меньшее единицы. При $p\in C_n$ и n достаточно большом можно получить оценки

$$|N_1|,\ |N_2|<\pi(2q\alpha\beta u_n^3)^{-1}, \qquad |M_3|<\pi(qu_n)^{-1}$$

При $\sigma=\pm 2n\pm 1$, $-2n-1\leqslant\tau\leqslant 2n+1$ и достаточно большом n

$$|M_1|<\pi(2q\beta u_n^2\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi\tau)^{-1}, \qquad |M_2|<\pi(qu_n\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi\tau)^{-1}$$
$$|N_3|<\pi(2q\alpha\beta u_n^3\operatorname{ch}{}^1\!/_2\pi\tau)^{-1}$$

При $-2n-1\leqslant\sigma\leqslant 2n+1$, $\tau=\pm 2n\pm 1$ и достаточно большом n

$$|M_1|<\pi(2q\beta u_n^2\operatorname{ch}u_n)^{-1}, \qquad |M_2|<\pi(qu_n\operatorname{ch}u_n)^{-1}$$
$$|N_3|<\pi(2q\alpha\beta u_n^3\operatorname{ch}u_n)^{-1}$$

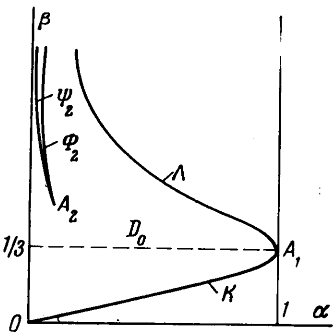
Обозначим через C_n' и C_n'' части контура C_n, лежащие соответственно слева и справа от прямой $\sigma=c$. С помощью оценок, записанных выше, нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n'} M_j e^{p\xi}\,dp = \lim_{n\to\infty}\int_{C_n'} N_j e^{p\xi}\,dp = 0, \quad \xi > 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n''} M_j e^{p\xi}\,dp = \lim_{n\to\infty}\int_{C_n''} N_j e^{p\xi}\,dp = 0, \quad \xi < 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n} M_k\,dp = \lim_{n\to\infty}\int_{C_n} N_j\,dp = 0, \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3 \tag{3.5}$$

Из равенств (3.3), (3.4) следует, что при $\xi > \alpha_k$ интегралы $\mu_{j,k}$ равны сумме вычетов своих подынтегральных функций в полюсах, расположенных слева от прямой интегрирования, а при $\xi < \alpha_k$ эти интегралы равны сумме вычетов, взятых с обратным знаком, в полюсах, расположенных справа от прямой интегрирования. Аналогичное предложение справедливо в отношении интегралов $\nu_{j,k}$ при $\xi > \beta_k$ и $\xi < \beta_k$. Из (3.5) следует, что интегралы $\mu_{1,k}$, $\mu_{2,k}$, $\nu_{1,k}$, $\nu_{2,k}$, $\nu_{3,k}$ непрерывны в точках $\xi = \alpha_k, \beta_k$.



Фиг. 2

4. Для нахождения вычетов функций $M_j e^{p(\xi-\alpha_k)}$, $N_j e^{p(\xi-\beta_k)}$ необходимо знать нули функции

$$\omega(p) = ({}^1/_2\pi\alpha p \sin {}^1/_2\pi p)^{-1}F = $$
$$= \operatorname{ctg} {}^1/_2\pi p - 2(\pi\alpha p)^{-1} + {}^1/_2\pi\beta p$$

Исследования, связанные с этим вопросом, достаточно громоздки, поэтому ниже приводятся лишь окончательные результаты.

Нули функции $\omega(p)$ расположены симметрично относительно координатных осей σ, τ, поэтому достаточно указать их расположение в области $\sigma \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$. При $\tau = 0$, $\sigma > 0$ нулями функции $\omega(p)$ служит бесконечная последовательность корней уравнения

$$\operatorname{ctg} {}^1/_2\pi\sigma = 2(\pi\alpha\sigma)^{-1} - {}^1/_2\pi\beta\sigma \tag{4.1}$$

Для их обозначения будем использовать символы σ_n, σ_n', σ_n'' при условии, что $2n-2 < \sigma_n, \sigma_n', \sigma_n'' < 2n$. При $\sigma = 0$, $\tau > 0$ существует не более двух нулей $p = i\tau_1, i\tau_2$, причем τ_1, τ_2 определяются из уравнения

$$\operatorname{cth} {}^1/_2\pi\tau = 2(\pi\alpha\tau)^{-1} + {}^1/_2\pi\beta\tau \tag{4.2}$$

Существует не более одного нуля $p = p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ такого, что $\sigma_0 > 0$, $\tau_0 > 0$.

Расположение нулей функции $\omega(p)$ в плоскости p зависит от положения точки (α, β) в плоскости $\alpha\beta$, причем область $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta < \infty$ можно разбить на ряд характерных подобластей, границами которых служат следующие кривые (фиг. 2).

Кривая $K(\beta = \varkappa(\alpha),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — геометрическое место точек, в которых уравнение (4.2) имеет двойной корень. Ее параметрические уравнения

$$\alpha = \left(\frac{t}{2}\operatorname{cth} t + \frac{t^2}{2\operatorname{sh}^2 t}\right)^{-1}, \quad \beta = \frac{1}{2t}\operatorname{cth} t - \frac{1}{2\operatorname{sh}^2 t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty$$

Точки $O(0, 0)$, $A_1(1, {}^1/_3)$ служат концами этой кривой. Функция $\varkappa(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ монотонно возрастающая, $\varkappa'(0) = {}^1/_4$, а производные более высоких порядков при $\alpha = 0$ равны нулю; в окрестности точки A_1 функция $\varkappa(\alpha) \sim {}^1/_3 - 2\sqrt{(1-\alpha)/45}$.

Кривая $\Lambda(\beta = \lambda(\alpha),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ — геометрическое место точек, в которых уравнение (4.1) имеет двойной корень на интервале $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$. Ее параметрические уравнения

$$\alpha = \left(\frac{s}{2}\operatorname{ctg} s + \frac{s^2}{2\sin^2 s}\right)^{-1}, \quad \beta = \frac{1}{2\sin^2 s} - \frac{1}{2s}\operatorname{ctg} s, \quad 0 \leqslant s \leqslant \pi$$

Кривая Λ имеет началом точку $A_1(1,\ {}^1/_3)$ и асимптоту $\alpha = 0$. Функция $\lambda(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ монотонно убывающая; в окрестности A_1 функция $\lambda(\alpha) \sim {}^1/_3 + 2\sqrt{(1-\alpha)/45}$, а при $\alpha \to 0$ функция $\lambda(\alpha) \sim \alpha^{-1}\pi^{-2}$.

Кривые Φ_k, Ψ_k $(\beta = \varphi_k(\alpha),\ \beta = \psi_k(\alpha),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k,\ k = 2, 3, \ldots)$ в сумме дают геометрическое место точек, в которых уравнение (4.1) имеет двойной корень на интервале $2k - 2 \leqslant \sigma \leqslant 2k$. Они определяются теми же параметрическими уравнениями, что и кривая Λ, но для Φ_k $(k-1)\pi \leqslant s \leqslant s_k$, а для Ψ_k $s_k \leqslant s \leqslant k\pi$, причем s_k находится из условий

$$\sin^2 s_k \cos s_k + s_k \sin s_k - 2s_k^2 \cos s_k = 0, \qquad (k-1)\pi < s_k < k\pi$$

Функции $\varphi_k(\alpha)$, $\psi_k(\alpha)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_k)$ монотонно убывающие

$$\psi_k(\alpha_k) = \varphi_k(\alpha_k) = \beta_k, \qquad \psi_k(\alpha) < \varphi_k(\alpha) \quad \text{при } 0 < \alpha < \alpha_k$$

$$\alpha_k = \alpha(s_k) \approx 8(2k-1)^{-2}\pi^{-2}\{1 + [(2k-1)^2\pi^2 - 4]^{-1}\}$$

$$\beta_k = \beta(s_k) \approx 2^{-1}\{1 - [(2k-1)^2\pi^2 - 4]^{-1}\}$$

Кривые Φ_k, Ψ_k имеют в точке $A_k(\alpha_k, \beta_k)$ общую касательную, уравнение которой $\beta + {}^1/_{16}\alpha\pi^2(2k-1)^2 = 1$

$$\varphi_k(\alpha) \sim \alpha^{-1}\pi^{-2}(k-1)^{-2}, \qquad \psi_k(\alpha) \sim \alpha^{-1}\pi^{-2}k^{-2} \quad \text{при } \alpha \to 0$$

Через G_0 обозначим внутренность области, ограниченной кривыми K, Λ, $\Phi_k\Psi_k$ $(k = 2, 3, \ldots)$ и полупрямой $\alpha = 0$, $\beta \geqslant 0$.

Нули функции $\omega(p)$ расположены следующим образом.

Простые нули в точках

$p = i\tau_1, \sigma_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad$ при $\alpha > 1$

$p = 0, \sigma_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad$ при $\alpha = 1, \quad {}^1/_3 < \beta < \infty$

$p = 0, i\tau_1, \sigma_n \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad$ при $\alpha = 1, \quad 0 < \beta < {}^1/_3$

$p = i\tau_1, i\tau_2, \sigma_n \quad (\tau_1 > \tau_2;\ n = 2, 3, \ldots) \quad$ при $0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < \varkappa(\alpha)$

$p = \sigma_n \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad$ при $\alpha = 1, \quad \beta = {}^1/_3; \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta = \varkappa(\alpha)$

или $\beta = \lambda(\alpha); \quad 0 < \alpha < \alpha_k, \quad \beta = \varphi_k(\alpha)$ или $\beta = \psi_k(\alpha) \quad (k = 2, 3, \ldots)$

$p = p_0, \sigma_n \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad$ при $(\alpha, \beta) \in G_0$

$p = \sigma_1', \sigma_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad$ при $0 < \alpha < 1, \quad \beta > \lambda(\alpha)$

$p = \sigma_k', \sigma_k'', \sigma_n \quad (n = 2, 3, \ldots) \quad$ при $0 < \alpha < \alpha_k, \ \psi_k(\alpha) < \beta < \varphi_k(\alpha)$ $(k = 2, 3, \ldots)$

$p = \sigma_n \quad (n = 3, 4, \ldots) \quad$ при $\alpha = \alpha_2, \ \beta = \beta_2$

$p = \sigma_n \quad (n = 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots) \quad$ при $\alpha = \alpha_k, \ \beta = \beta_k \quad (k = 3, 4, \ldots)$

Нули второго порядка в точках

$p = i\tau_1 \quad$ при $0 < \alpha < 1, \quad \beta = \varkappa(\alpha)$

$$p=\sigma_1 \quad \text{при } 0<\alpha<1, \quad \beta=\lambda(\alpha)$$
$$p=\sigma_k'<\sigma_k \quad \text{при } 0<\alpha<\alpha_k, \quad \beta=\varphi_k(\alpha) \quad (k=2,3,\ldots)$$
$$p=\sigma_k'>\sigma_k \quad \text{при } 0<\alpha<\alpha_k, \; \beta=\psi_k(\alpha) \quad (k=2,3,\ldots)$$

Нули третьего порядка в точках

$$p=0 \quad \text{при} \quad \alpha=1, \quad \beta={}^1/_3$$
$$p=\sigma_k \quad \text{при } \alpha=\alpha_k, \quad \beta=\beta_k \quad (k=2,3,\ldots)$$

Других нулей, кроме указанных выше, функция $\omega(p)$ в области $\sigma\geqslant 0$, $\tau\geqslant 0$ не имеет.

5. Зная нули функции $\omega(p)$, не представляет труда найти вычеты функций $M_j\exp[p(\xi-\alpha_k)]$, $N_j\exp[p(\xi-\beta_k)]$ и записать выражения $\theta_1(\xi)$, $r_1(\xi)$, $r_0(\xi)$ по формулам (3.1), (3.2). При получении численных результатов основная техническая трудность заключается в вычислении корней уравнения $\omega(p)=0$.

Асимптотические представления функций θ_1, r_1, r_0 при $\xi\to\infty$ целиком определяются вычетами функций $M_j\exp[p(\xi-\alpha_k)]$, $N_j\exp[p(\xi-\beta_k)]$ относительно полюсов, расположенных на оси τ, так как вычеты относительно остальных полюсов имеют экспоненциальные множители, исчезающие на бесконечности.

Нетрудно убедиться, что при $\xi\to\infty$ справедливы формулы

$$\theta_1\sim\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{2}U_n\delta_n\tau_n\cos(\tau_n\xi-\varkappa_n)$$

$$r_1\sim R+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{2}U_n\delta_n\tau_n\operatorname{cth}\frac{\pi\tau_n}{2}\sin(\tau_n\xi-\varkappa_n)$$

$$r_0\sim R+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{2}U_n\delta_n\tau_n\operatorname{csch}\frac{\pi\tau_n}{2}\sin(\tau_n\xi-\varkappa_n)$$

$$\delta_n=\left[\left(\frac{2\alpha}{\tau_nh_n}\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\cos\tau_n\alpha_k+\frac{4\operatorname{sh}{}^1/_2\pi\tau_n}{\pi\tau_n^2h_n}\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\cos\tau_n\beta_k\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\alpha}{\tau_nh_n}\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\sin\tau_n\alpha_k+\frac{4\operatorname{sh}{}^1/_2\pi\tau_n}{\pi\tau_n^2h_n}\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\sin\tau_n\beta_k\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\varkappa_n=\arccos\left[\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{2\alpha}{\tau_nh_n}\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\cos\tau_n\alpha_k+\frac{4\operatorname{sh}{}^1/_2\pi\tau_n}{\pi\tau_n^2h_n}\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\cos\tau_n\beta_k\right)\right]$$

$$R=\frac{2}{\pi(1-\alpha)}\left(\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\alpha_k+\sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\beta_k\right)$$

$$h_n=F'(i\tau_n)=\frac{\pi^2}{4}\alpha(1-2\beta)\tau_n\operatorname{sh}\frac{\pi\tau_n}{2}+\frac{\pi}{2}\left(\alpha-1-\frac{\pi^2}{4}\alpha\beta\tau_n^2\right)\operatorname{ch}\frac{\pi\tau_n}{2}$$

$$U_1=U_1(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 \text{ при } \alpha>1,\ \beta>0;\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<\varkappa(\alpha)\\ 0 \text{ при } 0<\alpha<1,\ \beta>\varkappa(\alpha)\end{cases}$$

$$U_2=U_2(\alpha,\beta)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<\alpha<1,\ 0<\beta<\varkappa(\alpha)\\ 0 \text{ при } 0<\alpha<1,\ \beta>\varkappa(\alpha);\ \alpha>1,\ \beta>0\end{cases}$$

Из приведенных формул видно, что r_1, $r_0 \to \infty$ при $\alpha \to 1$, кроме того, θ_1, r_1, $r_0 \to \infty$ при $0 < \alpha < 1$, $\beta < \varkappa(\alpha)$, $\beta \to \varkappa(\alpha)$, поскольку при этом h_1, $h_2 \to 0$. Таким образом, излагаемый метод, основанный на предположении о малости величин r_1, θ_1, оказывается непригодным, если точка (α, β) лежит в окрестности прямой $\alpha = 1$ или в окрестности кривой К. Приводим координаты ряда точек этой кривой

α	0	0.3999	0.4442	0.4993	0.5693	0.6596	0.7759	0.9124	1
β	0	$1/10$	$1/9$	$1/8$	$1/7$	$1/6$	$1/5$	$1/4$	$1/3$

В дальнейшем будем считать, что параметры, входящие в решение задачи, обеспечивают выполнение принятых условий линеаризации, в частности величины R, $\delta_n\tau_n$, $\delta_n\tau_n^2$ имеют порядок не ниже ε, где ε — некоторая малая величина. Случай малых τ_n должен быть исключен из рассмотрения, так как он соответствует малым значениям $1 - \alpha$.

Обозначим через V_1, H_1 среднюю скорость и среднюю глубину потока на бесконечности справа. С точностью до величин первого порядка малости включительно

$$V_1 = V_0(1 - R), \quad H_1 = HV_0 / V_1 = H(1 + R) \tag{5.1}$$

Согласно (1.1) параметрические уравнения свободной поверхности таковы:

$$x = \frac{2H}{\pi}\int_0^\xi e^{r_1}\cos\theta_1\, d\xi + C'', \qquad y = \frac{2H}{\pi}\int_{-\infty}^\xi e^{r_1}\sin\theta_1\, d\xi + H$$

Здесь и далее C'', C', C — некоторые константы. Линеаризуя предыдущие равенства, с учетом (1.7) найдем

$$x = \frac{2H}{\pi}\left[\xi + \int_0^\xi r_1\, d\xi\right] + C'', \quad y = H\left[1 + \frac{\pi}{2}\alpha\beta\frac{d\theta_1}{d\xi} + \alpha r_1 - \frac{2}{\pi}\int_{\beta_1}^\xi \gamma\, d\xi\right]$$

Используя асимптотические представления для r_1, θ_1, получим, что при $\xi \to \infty$

$$x \sim \frac{2H_1}{\pi}\xi - H\sum_{n=1}^{2} U_n\delta_n \operatorname{cth}\frac{\pi\tau_n}{2}\cos(\tau_n\xi - \varkappa_n) + C' \tag{5.2}$$

$$y \sim y_1 + H\sum_{n=1}^{2} U_n\delta_n \sin(\tau_n\xi - \varkappa_n) \tag{5.3}$$

Здесь y_1 — средний уровень жидкости на бесконечности справа, причем

$$y_1 = H\left[1 + \frac{2}{\pi(1-\alpha)}\left(\alpha\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{m}\Delta b_k\beta_k\right)\right] \tag{5.4}$$

Понижение дна потока d определяется по формуле

$$d = H_1 - y_1 = \frac{2H}{\pi}\sum_{k=1}^{l}\Delta a_k\alpha_k \tag{5.5}$$

Заметим, что величины V_1, H_1, y_1, d не зависят от параметра β.

Пренебрегая величинами порядка выше чем ε, можно перейти от параметрического представления свободной поверхности (5.3) к явной форме записи

$$y \sim y_1 + H\sum_{n=1}^{2} U_n\delta_n \sin\left(\frac{\pi\tau_n}{2H_1}x - \varkappa_n + C\right) \tag{5.6}$$

Отсюда видно, что на бесконечности вниз по течению или отсутствуют волны $(0 < \alpha < 1,\ \beta > \varkappa(\alpha))$, или существует одна система синусоидальных волн $(\alpha > 1)$ или две системы волн $(0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < \varkappa(\alpha))$ в соответствии с тем, сколько положительных корней имеет уравнение (4.2).

Кривая $K(\beta = \varkappa(\alpha), 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ заключена между прямыми

$$\beta / \alpha = {}^1/_4, \qquad \beta / \alpha = {}^1/_3 \qquad (\beta / \alpha \equiv Tg / \rho V_0^4)$$

Рассматривая движение воды при температуре 20° С, можно положить $T = 72.8$ *дин/см*, $\rho = 0.998$ *г/см*^{3}, $g = 981$ *см/сек*^{2}. При этом значениям $\beta / \alpha = {}^1/_4$ и $\beta / \alpha = {}^1/_3$ соответствуют скорости

$$V_0 = V_k' = (4Tg / \rho)^{1/4} = 23.1 \text{ см/сек}$$

$$V_0 = V_k'' = (3Tg / \rho)^{1/4} = 21.5 \text{ см/сек}$$

Таким образом, если число Фруда меньше единицы, а невозмущенная скорость потока меньше чем V_k'', то волн на поверхности воды не образуется. Если число Фруда меньше единицы, а скорость невозмущенного потока больше чем V_k', на поверхности воды образуются две системы волн. Каждому фиксированному числу Фруда из интервала $0 < \alpha < 1$ соответствует свое значение $V_k (V_k'' < V_k < V_k')$ такое, что при $V_0 > V_k$ на поверхности имеются две системы волн, а при $V_0 < V_k$ волны отсутствуют. При числе Фруда, большем единицы, на поверхности жидкости всегда образуются волны, обязанные своим происхождением наличию капиллярности. Заметим, что значение $V_k' = 23.1$ *см/сек* в качестве критической скорости для потока воды бесконечной глубины найдено еще Кельвином [1].

Согласно (5.6) длина волны каждой из систем волн определяется по формуле $\lambda_n = 4H_1 / \tau_n$. Учитывая, что τ_n — корень уравнения (4.2), получаем связь между физическими параметрами потока

$$V_0^2 = \left(\frac{g\lambda_n}{2\pi}\frac{H}{H_1} + \frac{2\pi T}{\lambda_n\rho}\frac{H_1}{H}\right)\operatorname{th}\frac{2\pi H_1}{\lambda_n}$$

При $H = H_1$ отсюда получается известное соотношение (см. [3]).

Рассмотрим в качестве примера движение жидкости через вертикальный уступ при постоянном давлении над поверхностью потока. Пусть

$$\theta_0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < \xi < -\lambda \\ -\pi/2 & \text{при } -\lambda < \xi < \lambda \\ 0 & \text{при } \lambda < \xi < \infty \end{cases}$$

При этом согласно (5.1), (5.5)

$$H_1 = H[1 + 2\lambda / (1 - \alpha)], \qquad d = 2\lambda H \tag{5.7}$$

Линеаризуя уравнение Бернулли при условии, что H_1 близко к H, легко получить соотношение

$$d / H = (1 - \alpha)(H_1 / H - 1)$$

Формулы (5.7) удовлетворяют этому соотношению, что подтверждает правильность найденных результатов. Связь между высотой уступа d и параметром λ в форме (5.7) согласуется с результатами Н. Е. Кочина [21], полученными из других соображений.

Амплитуда n-й системы волн Δ_n определяется по формуле

$$\Delta_n = H\delta_n = HU_n \left| \frac{2\pi\alpha}{\tau_n h_n} \sin \tau_n \lambda \right| = HU_n \left| \frac{2\pi\alpha}{\tau_n h_n} \sin \frac{\tau_n d}{2H} \right| \tag{5.8}$$

Таким образом, при фиксированных α, β и при монотонном увеличении высоты уступа величина Δ_n колеблется по периодическому закону между нулем и $2HU_n\pi\alpha\tau_n^{-1}|h_n|^{-1}$. Устремляя α к бесконечности, из (5.8) в пределе получим, что $\Delta_2 = 0$

$$\Delta_1 = H\frac{8\,\mathrm{sh}\,{}^1/_2\pi\tau_1}{\pi\tau_1^2[1+\beta(\mathrm{sh}\,{}^1/_2\pi\tau_1)^2]}\left|\sin\frac{\tau_1 d}{2H}\right|, \qquad \beta\frac{\pi\tau_1}{2} = \mathrm{cth}\frac{\pi\tau_1}{2} \tag{5.9}$$

Если $\beta = 0$, то $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ при $\alpha > 1$, а при $\alpha < 1$

$$\Delta_2 = H\frac{4\alpha\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2\pi\tau_2}{\tau_2[\alpha(\mathrm{ch}\,{}^1/_2\pi\tau_2)^2 - 1]}\left|\sin\frac{\tau_2 d}{2H}\right|, \qquad \alpha\frac{\pi\tau_2}{2} = \mathrm{th}\frac{\pi\tau_2}{2} \tag{5.10}$$

Формулы (5.9), (5.10) и их аналоги для некоторых других форм дна были найдены автором ранее при исследовании чисто капиллярных и чисто гравитационных волн [15–18].

Интересно, что при исследовании чисто гравитационных волн в канале с неровным дном методом Кельвина [19, 20] или методом Н. Е. Кочина [21–23] получаются иные результаты: амплитуда волн может периодически меняться с увеличением горизонтального размера препятствия, но всегда пропорциональна его высоте. В частности, для течения жидкости через вертикальный уступ оба названных метода приводят к выражению

$$\Delta_2 = d\frac{2\alpha\,\mathrm{ch}\,{}^1/_2\pi\tau_2}{\alpha(\mathrm{ch}\,{}^1/_2\pi\tau_2)^2 - 1}, \qquad \alpha\frac{\pi\tau_2}{2} = \mathrm{th}\frac{\pi\tau_2}{2} \tag{5.11}$$

которое получается из (5.10) путем замены $\sin(\tau_2 d/2H)$ на $\tau_2 d/2H$. Очевидно, формулы (5.10), (5.11) эквивалентны, когда $\tau_2 d/2H$ мало. Малость отношения d/H при $\alpha < 1$ является естественным ограничением для нашего метода. Но при малых α $\tau_2 \approx 2/\alpha\pi$, а комбинация $\tau_2 d/2H \approx \approx d/\alpha\pi H$ может принимать любые значения, что приводит к существенному различию формул (5.10), (5.11). Различие результатов обусловлено тем, что в методах Кельвина и Н. Е. Кочина, помимо линеаризации граничных условий на свободной поверхности, производится линеаризация граничных условий на дне потока.

В заключение рассмотрим течение жидкости в канале с ровным дном, когда давление P_1 над поверхностью задается в виде

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dP_1}{dx} = \gamma(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < \xi < -\lambda \\ b_1 & \text{при } -\lambda < \xi < \lambda \\ 0 & \text{при } \lambda < \xi < \infty \end{cases}$$

Полагая на бесконечности слева $P_1 = 0$, для давления на бесконечности справа получаем выржение $P_{1\infty} = \rho g b_1 l$, где l — проекция на ось x участка поверхности, вдоль которого $\gamma = b_1$. Связь между l и λ можно установить приближенно в виде

$$l = \frac{2H}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{\tau_1}\cos\theta_1\,d\xi = \frac{4H\lambda}{\pi}[1 + O(\varepsilon)]$$

Амплитуда n-й системы волн определяется по формуле

$$\Delta_n = H\delta_n = HU_n \left| \frac{8b_1 \operatorname{sh} {}^1/_2 \pi\tau_n}{\pi\tau_n^2 h_n} \sin \tau_n\lambda \right|$$

Отсюда видно, что при монотонном увеличении λ (увеличении $P_{1\infty}$) величина Δ_n периодически меняется между нулем и некоторым максимальным значением.

Поступило 15 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Kelvin, Lord (Thomson W.) The influence of wind and capillarity on waves in water supposed frictionless. Philos. Mag., 1871, vol. 42, pp. 368—374.
2. Rayleigh, Lord The form of standing waves on the surface of running water. Proc. London Math. Soc., 1883, vol. 15.
3. Wehausen J. V., Laitone E. V. Surface waves. Handbuch der Physik, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer Verlag, 1963, Bd. 9.
4. Wehausen J. V. Free — surface flows. Research frontiers in fluid dynamics. New York, London, Sydney, Interscience, 1965.
5. Секерж-Зенькович Я. И. К теории капиллярно-гравитационной уединенной волны. II Всес. съезд по теорет. и прикл. механ., Аннот. докл., М., «Наука», 1964.
6. Секерж-Зенькович Я. И. К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном. Приложения теории функций в механике сплошной среды. Тр. Междунар. симпоз. в Тбилиси, М., «Наука», 1965, т. 2.
7. Beckert H. Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flässigkeit entlang eines Kanals. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1963, vol. 13, No. 1.
8. Hilbig H. Existenzbeweis fur Potentialströmungen längs eines Kanals mit welliger sohle unter Einflub von Schwerkraft und Oberflächenspannung. Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1965, vol. 18, No. 5.
9. Черноусько Ф. Л. Движение тонкого слоя жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
10. Моисеев Н. Н. О некоторых особенностях течения жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
11. Базалий Б. В. О волновых движениях жидкости с учетом поверхностного натяжения. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 6.
12. Barakat R., Houston A. Nonlinear periodic capillary-gravity waves on a fluid of finite depth. J. Geophys. Res., 1968, vol. 73, No. 20.
13. Woods L. C. Compressible subsonic flow in two-dimensional channels with mixed boundary conditions. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, No. 3. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1956, № 1.)
14. Van der Pol B., Bremmer H. Operational calculus based on the two — sided Laplace integral. Cambridge, 1950. (Рус. перев.: Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.)
15. Киселев О. М. Течение тяжелой жидкости через полигональное препятствие. В кн. «Тр. Семинара по обратным краевым задачам», Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1964, вып. 1.
16. Киселев О. М. О гравитационных волнах при течении жидкости через уступ. В кн. «Тр. Семинара по обратным краевым задачам», Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1964, вып. 2.
17. Киселев О. М. О гравитационных волнах при течении жидкости в канале с полигональным дном. Современные вопросы гидродинамики, Киев, «Наукова думка», 1967.
18. Киселев О. М. Капиллярные волны в канале с полигональным дном. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
19. Thomson W. On stationary waves in flowing water. Philos. Mag., 1886, Ser. 5, vol. 22; 1887, vol. 23.
20. Wien W. Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig, 1900.
21. Кочин Н. Е. О движении тяжелой жидкости в канале с дном, имеющим уступ. Докл. АН СССР, 1938, т. 29, № 8.
22. Чадаева К. Ч. Плоскопараллельные течения в каналах с препятствиями на дне. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
23. Абдылдаев А. А. Теория течения в канале с низким треугольным препятствием на дне. Изв. вузов, Математика, 1960, № 5.