О ТЕОРЕМЕ ОБРАТИМОСТИ ДЛЯ КРЫЛА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЯХ ОТ ВРЕМЕНИ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Устанавливается интегральная связь между граничными условиями и соответствующими им аэродинамическими нагрузками на прямом и обратном крыльях. При этом обратное крыло получено обращением движения прямого относительно основной поступательной скорости u_0 [1-3]. Применение этой теоремы при установившемся движении и гармонических зависимостях от времени позволило упростить определение суммарных характеристик деформирующихся крыльев. Она широко используется как за границей (см. об этом подробнее в книге [2]), так и в работах советских авторов (А. И. Голубинский, Б. И. Ульянов [4] и др.).

Показано, что и при произвольных зависимостях от времени t все суммарные характеристики (подъемная сила, продольный и поперечный моменты) прямого и обратного крыльев любой формы в плане при всех t выражаются одни через другие. Выведены формулы, позволяющие находить подъемную силу и моменты, возникающие на деформирующемся крыле, в том числе с отклоняющимся элероном и закрылками, если решены соответствующие задачи о движении жесткого обратного крыла. Все сказанное справедливо как при дозвуковых скоростях ($M < 1$), так и при $M > 1$. Отметим, что применение указанного аппарата дает существенно большее сокращение объема расчетов, чем при гармонических зависимостях от времени и тем более в стационарных задачах.

1. Общие соотношения. Введем связанную с крылом стандартную систему координат с началом 0 на расстоянии x_0 от носка. На фиг. 1 изображены прямое (плюс) и обратное (минус) крылья и соответствующие им системы координат. Центровкой будем называть безразмерные координаты, характеризующие положение начала 0 относительно носка

$$\xi_{0+} = \frac{x_{0+}}{b}, \quad \xi_{0-} = \frac{x_{0-}}{b}, \quad \xi_{0+} + \xi_{0-} = 1 \quad (b \text{ — корневая хорда}) \tag{1.1}$$

Пусть крыло движется с постоянной средней скоростью U_0, совершает поступательные колебания вдоль оси O_y и вращательные с угловыми скоростями Ω_x и Ω_z. Условимся в формулах, где могут быть поставлены индексы и плюс и минус, индексы опускать. Введем безразмерные величины, положив

$$\tau = \frac{U_0 t}{b}, \quad \omega_x(\tau) = \frac{\Omega_x(\tau)\, b}{U_0}, \quad \omega_z(\tau) = \frac{\Omega_z(\tau)\, b}{U_0}$$

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b} \tag{1.2}$$

$$\xi_+ = -\xi_-, \qquad \eta_+ = \eta_-, \qquad \zeta_+ = -\zeta_-$$

Деформации поверхности крыла будем задавать в виде

$$\eta = f_\delta(\xi, \zeta)\, \delta(\tau) \tag{1.3}$$

где $\delta(\tau)$ — безразмерный параметр (масштаб) деформации.

В линейной задаче для крыла заданной формы в плане при фиксированном числе M характер воздействия потока на крыло определяется видом граничного условия на его поверхности. Это условие выражает требование о плавном обтекании крыла и имеет вид [5] (α — угол атаки, W_y —

возмущенная скорость на крыле)

$$\frac{W_y(\xi,\zeta,\tau)}{U_0} = -\alpha(\tau) - \omega_x(\tau)\zeta + \omega_z(\tau)\xi - \frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\delta(\tau) - f_\delta(\xi,\zeta)\frac{d\delta}{d\tau} \quad (1.4)$$

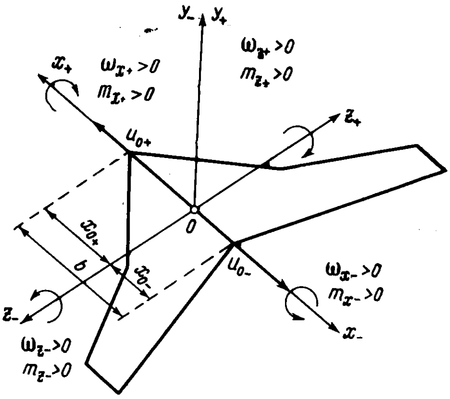
Переход от одних законов движения и деформаций к другим меняет только вид граничного условия. На уравнении неразрывности, условиях на вихревой пелене, Чаплыгина — Жуковского и в бесконечности, записанных в общем виде, этот переход не сказывается. Поэтому общая линейная задача (1.4) может быть сведена к ряду частных, решаемых независимо. Для краткости будем их называть α-, ω_x-, ω_z- и δ-задачами (в зависимости от того, какие члены в граничном условии сохраняются).

Заметим, что δ-задача может быть в свою очередь разбита на две, формально решаемые независимо: на δ-задачу 1 с граничным условием

$$\frac{W_{y\delta 1}}{U_0} = -\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\delta(\tau) \quad (1.5)$$

и δ-задачу 2, в которой

$$\frac{W_{y\delta 2}}{U_0} = f_\delta(\xi,\zeta)\frac{d\delta}{d\tau} \quad (1.6)$$



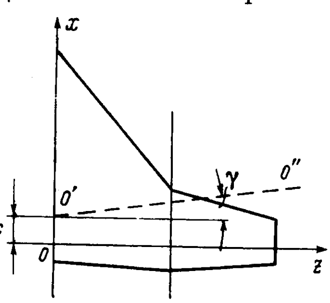
Фиг. 1

Решение полной задачи (1.4) будет представляться в виде суммы решений частных.

Введем следующие обозначения для кинематических параметров:

$$\begin{aligned}
&q_{10} = \alpha, \quad q_{11} = d\alpha/d\tau = \alpha^{\cdot}, \quad q_{20} = \omega_z, \quad q_{21} = d\omega_z/d\tau = \omega_z^{\cdot} \\
&q_{30} = \omega_x, \quad q_{31} = d\omega_x/d\tau = \omega_x^{\cdot}, \quad q_{40} = \delta, \quad q_{41} = d\delta/d\tau = \delta^{\cdot} \\
&q_{50} = d\delta/d\tau = \delta^{\cdot}, \quad q_{51} = d^2\delta/d\tau^2 = \delta^{\cdot\cdot}
\end{aligned} \quad (1.7)$$

Через q_{i0}^*, $i = 1, 2, \ldots, 5$ обозначим не зависящие от времени характерные значения параметров $q_{i0}(\tau)$. Коэффициент подъемной силы c_y будем относить к скоростному напору и площади крыла s, а продольного и поперечного моментов m_x и m_z — еще и к корневой хорде b.



Фиг. 2

Пусть на крыле имеются рули, элероны или предкрылки, произвольно расположенные у задней, боковой или передней кромок. Рулем будем называть любую из указанной механизацию, углы отклонения которой на левой и правой половинах крыла одинаковы, а элероном, если эти углы противоположны.

Рассмотрим правую половину крыла. Пусть руль или элерон поворачиваются вокруг произвольной прямой $O'O''$, составляющей угол γ с осью Oz и отсекающей отрезок bc на оси Ox (фиг. 2).

Тогда после простых выкладок найдем, что на правом руле или элероне

$$f_\delta(\xi,\zeta) = \xi\cos\gamma - \zeta\sin\gamma - c\cos\gamma \quad (1.8)$$

Вне руля и элерона указанная функция, очевидно, обращается в нуль. Заметим, что углы отклонения считаются положительными, если правый элерон или рули отклонены вниз.

2. Гармонические зависимости от времени. Пусть основные кинематические параметры меняются со временем по гармоническому закону

$$q_{i0} = q_{i0}^* \cos pt, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

Тогда на основании (1.7) можем написать (p^* — число Струхаля)

$$q_{i0} = q_{i0}^* \cos p^*\tau, \qquad q_{i1} = -q_{i1}^* \sin p^*\tau$$

$$q_{i1}^* = q_{i0}^* p^*, \qquad p^* = \frac{pb}{U_0}, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.1}$$

$$q_{50} = -q_{50}^* \sin p^*\tau, \qquad q_{51} = -q_{51}^* \cos p^*\tau$$

$$q_{50} = q_{41}, \qquad q_{51} = -p^{*2} q_{40}$$

В этом случае аэродинамические величины первого порядка малости (безразмерные нагрузки Δp, аэродинамические коэффициенты c_y, m_x, m_z) можно представить в виде

$$c = \sum_{i=1}^{5} (c^{q_{i0}} q_{i0} + c^{q_{i1}} q_{i1}) \tag{2.2}$$

При этом коэффициенты аэродинамических производных $c^{q_{i0}}$ и $c^{q_{i1}}$ не зависят от времени.

Для тонкого крыла произвольной формы в плане при гармонических зависимостях от времени параметров q_{i0} доказана следующая формула, выражающая основную зависимость теоремы обратимости [1]

$$\iint_s \Delta p_+ \frac{W_{y-}}{U_0} ds = \iint_s \Delta p_- \frac{W_{y+}}{U_0} ds \tag{2.3}$$

Здесь Δp — безразмерные нагрузки, полученные делением разности давлений на нижней и верхней сторонах крыла на скоростной напор, W_y / U_0 — безразмерные скосы, s — площадь крыла. Соотношение (2.3) является точным в рамках линейной теории и справедливо во всем диапазоне M, где данные этой теории справедливы, а также при любых p^*.

Рассматривая для прямого и обратного жестких крыльев различные комбинации частных задач из (1.4), нетрудно получить связь между всеми коэффициентами аэродинамических производных этих крыльев [4]

$$c_{y+}^{\alpha} = c_{y-}^{\alpha}, \qquad c_{y+}^{\alpha^\cdot} = c_{y-}^{\alpha^\cdot}, \qquad m_{z+}^{\alpha} = c_{y-}^{\omega_z} \tag{2.4}$$

$$m_{z+}{}^{\alpha^\cdot} = c_{y-}{}^{\omega_z^\cdot}, \qquad m_{z+}{}^{\omega_z} = m_{z-}{}^{\omega_z}, \qquad m_{z+}{}^{\omega_z^\cdot} = m_{z-}{}^{\omega_z^\cdot}$$

$$m_{x+}{}^{\omega_x} = m_{x-}{}^{\omega_x}, \qquad m_{x+}{}^{\omega_x^\cdot} = m_{x-}{}^{\omega_x^\cdot}$$

Формула (2.3) позволяет установить связь и между интегральными характеристиками прямого и обратного деформирующихся крыльев.

Пусть для этих крыльев изучается δ-задача 1. Тогда согласно (1.5), (2.1) и (2.2) получим из равенства (2.3) (везде далее $p^{q_{ik}}$ — аэродинамические производные безразмерных нагрузок)

$$\iint_s p_{1-}^{q_{4k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds = \iint_s p_{1+}^{q_{4k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_- ds \qquad (k=0,1) \tag{2.5}$$

Аналогично для δ-задачи 2 найдем

$$\iint_s p_{2-}^{q_{4k}} f_{\delta+} ds = \iint_s p_{2+}^{q_{4k}} f_{\delta-} ds \qquad (k=0,1) \tag{2.6}$$

И, наконец, рассматривая на прямом крыле задачу 1, а на обратном — задачу 2, будем иметь

$$\iint\limits_s p_{2-}^{q_{5k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds = - \iint\limits_s p_{1+}^{q_{4k}} f_{\delta -} ds \qquad (k=0,1) \tag{2.7}$$

Теорема обратимости (2.3) позволяет существенно упростить определение суммарных характеристик деформирующихся крыльев. Чтобы найти приращения коэффициентов подъемной силы и моментов, вызванные любыми деформациями, достаточно решить три основные задачи для обратного жесткого крыла. После этого расчет сводится к вычислению определенных интегралов от известных функций.

Изучая δ-задачу 1 для прямого крыла и α-задачу для обратного, нетрудно получить из (2.3)

$$c_{y1+}^{q_{\overline{4k}}} = \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{1k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \qquad (k= \;,) \tag{2.8}$$

Подобным же образом, рассмотрев δ-задачу 2 и α-задачу, придем к формулам

$$c_{y2+}^{q_{5k}} = - \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{1k}} f_{\delta +} ds \qquad (k=0,1) \tag{2.9}$$

Далее, из (2.3) в задачах 1 и ω_z, получим

$$m_{z\;+}^{q\;(k} = \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{2k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \qquad (k=0,1) \tag{2.10}$$

и в задачах 2 и ω_z

$$m_{z2+}^{q_{5k}} = - \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{2\bar{k}}} f_{\delta +} ds \qquad (k=0,1) \tag{2.11}$$

Наконец, рассмотрев δ-задачи и задачу ω_x, найдем

$$m_{x1+}^{q_{4k}} = \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{3k}} \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \qquad (k=0,1) \tag{2.12}$$

а также

$$m_{x\,2+}^{q\,4k} = - \frac{1}{s} \iint\limits_s p_-^{q_{3k}} f_{\delta +} ds \qquad (k=0,1) \tag{2.13}$$

В частном случае деформаций — отклонении рулевых поверхностей — формулы (2.8) — (2.13) благодаря зависимости (1.8) могут быть упрощены. Вне руля и элерона функции f_δ и $\partial f_\delta / \partial \xi$ будут обращаться в нуль. При отклонении рулей на крыле симметричной формы в плане приращения коэффициента $\Delta m_x = 0$, а при отклонении элеронов $\Delta c_y = 0$, $\Delta m_z = 0$. Поэтому соответствующие аэродинамические производные обращаются в нуль. Из соображений симметрии в формулах (2.8) — (2.13) можно перейти к интегрированию только по правому рулю или элерону, удвоив правые части и вместо f_δ подставив выражение (1.8).

3. **Переход к произвольным зависимостям от времени.** При помощи интегралов или рядов Фурье приведенные в предыдущем пункте соотношения могут быть обобщены на случай, когда кинематические параметры (1.7), характеризующие движение и деформации крыла, зависят от времени произвольным образом.

Остановимся подробнее на переходе к апериодическим законам $q_{i0}(\tau)$. При периодических зависимостях $q_{i0}(\tau)$ следует применять ряды Фурье. Везде предполагаем, что встречающиеся интегралы (или ряды) имеют смысл.

Пусть функции $q_{ik}(\tau)$ следующим образом представляются интегралами Фурье:

$$q_{ik}(\tau) = \int_0^\infty q_{ik}^{(p)}(p^*, \tau)\, dp^* \qquad (i=1, 2, \ldots, 5;\ k=0, 1) \tag{3.1}$$

$$q_{ik}^{(p)} = a_{ik}(p^*) \cos p^*\tau + b_{ik}(p^*) \sin p^*\tau$$

Согласно формулам (2.2) аэродинамические нагрузки и коэффициенты, соответствующие кинематическим параметрам $q_{i0}^{(p)}$, могут быть записаны в виде

$$c_p^{(i)} = c^{q_{i0}} q_{i0}^{(p)} + c^{q_{i1}} q_{i1}^{(p)}, \qquad c_p = \sum_{i=1}^{5} c_p^{(i)} \tag{3.2}$$

Обозначим нормированную переходную функцию нагрузки или аэродинамического коэффициента, которая соответствует кинематическому параметру $q_{i0}(\tau) / q_{i0}^*$, через (c / q_{i0}^*). Используя принцип наложений, можем написать

$$\left(\frac{c}{q_{i0}^*}\right) = \int_0^\infty \left(c^{q_{i0}} \frac{q_{i0}^{(p)}}{q_{i0}^*} + c^{q_{i1}} \frac{q_{i1}^{(p)}}{q_{i0}^*} \right) dp^* \tag{3.3}$$

4. Связь между суммарными характеристиками прямых и обратных крыльев. Вначале рассмотрим жесткое крыло произвольной формы в плане при любом числе M. Дадим обобщение формул (2.4) на случай, когда параметры $\alpha(\tau)$, $\omega_z(\tau)$ и $\omega_x(\tau)$ произвольно изменяются со временем.

Пусть у прямого и обратного крыльев углы атаки меняются одинаково

$$\frac{\alpha_+(\tau)}{\alpha^*} = \frac{\alpha_-(\tau)}{\alpha^*} \tag{4.1}$$

На основании (3.3) имеем как для прямого, так и для обратного крыльев

$$\left(\frac{c_y}{\alpha^*}\right) = \int_0^\infty \left(c_y^{\alpha} \frac{\alpha_p}{\alpha^*} + c_y^{\dot\alpha} \frac{\dot\alpha_p}{\alpha^*} \right) dp^*$$

а так как согласно (2.4)

$$c_{y+}^{\alpha} = c_{y-}^{\alpha}, \qquad c_{y+}^{\dot\alpha} = c_{y-}^{\dot\alpha}$$

то имеем для любого момента времени

$$\left(\frac{c_{y+}(M, \tau)}{\alpha^*}\right) = \left(\frac{c_{y-}(M, \tau)}{\alpha^*}\right) \tag{4.2}$$

Рассмотрим далее продольный момент прямого крыла при изменении угла атаки по любому закону

$$\left(\frac{m_{z+}}{\alpha^*}\right) = \int_0^\infty \left(m_{z+}^{\alpha} \frac{\alpha_p}{\alpha^*} + m_{z+}^{\dot\alpha} \frac{\dot\alpha_p}{\alpha^*} \right) dp^* \tag{4.3}$$

Пусть обратное крыло совершает движение, характеризуемое безразмерной угловой скоростью $\omega_z(\tau)$. Коэффициент подъемной силы этого крыла на основании (3.3) со временем будет меняться следующим образом:

$$\left(\frac{c_{y-}}{\omega_z{}^*}\right)=\int\limits_0^\infty\left(c_{y-}{}^{\omega_z}\frac{\omega_{zp}}{\omega_z{}^*}+c_{y-}{}^{\omega_z^\cdot}\frac{\omega_{zp}^\cdot}{\omega_z{}^*}\right)dp^* \tag{4.4}$$

Изучим одинаковые законы этих кинематических параметров

$$\frac{\alpha(\tau)}{\alpha^*}=\frac{\omega_z(\tau)}{\omega_z{}^*} \tag{4.5}$$

Тогда, учитывая равенства (2.4), (4.3) и (4.4), получаем

$$\left(\frac{m_{z+}(M,\tau)}{\alpha^*}\right)=\left(\frac{c_{y-}(M,\tau)}{\omega_z{}^*}\right) \tag{4.6}$$

Аналогично, рассмотрев для прямого и обратного крыльев вначале одинаковые $\omega_z(\tau)$, а затем $\omega_x(\tau)$, получим соотношения

$$\left(\frac{m_{z+}(M,\tau)}{\omega_z{}^*}\right)=\left(\frac{m_{z-}(M,\tau)}{\omega_z{}^*}\right),\qquad\left(\frac{m_{x+}(M,\tau)}{\omega_x{}^*}\right)=\left(\frac{m_{x-}(M,\tau)}{\omega_x{}^*}\right) \tag{4.7}$$

Перейдем к установлению зависимостей, подобных (2.5)—(2.7), для деформирующихся крыльев. Пусть изменение по времени деформаций прямого и обратного крыльев описывается одной и той же функцией $\delta(\tau)$. Представим ее интегралом Фурье (3.3). Умножим равенства (2.5) при $k=0$ на $(\delta_p/\delta^*)dp^*$, а при $k=1$ на $(\delta_p^\cdot/\delta^*)dp^*$, проинтегрируем полученные выражения по p^* от 0 до ∞ и сложим их

$$\iint\limits_s\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial\xi}\right)_+\int\limits_0^\infty\left(p_{1-}{}^\delta\frac{\delta_p}{\delta^*}+p_{1-}{}^{\delta^\cdot}\frac{\delta_p^\cdot}{\delta^*}\right)dp^*\,ds=$$

$$=\iint\limits_s\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial\xi}\right)_-\int\limits_0^\infty\left(p_{1+}{}^\delta\frac{\delta_p}{\delta^*}+p_{1+}{}^{\delta^\cdot}\frac{\delta_p^\cdot}{\delta^*}\right)dp^*\,ds$$

На основании (3.3) получаем искомую связь

$$\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{1-}}{\delta^*}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial\xi}\right)_+ds=\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{1+}}{\delta^*}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial\xi}\right)_-ds \tag{4.8}$$

Подобным же образом производится обобщение формул (2.6)

$$\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{2-}}{\delta^{\cdot *}}\right)f_{\delta+}\,ds=\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{2+}}{\delta^{\cdot *}}\right)f_{\delta-}\,ds \tag{4.9}$$

Рассмотрим равенства (2.7). Пусть в δ-задачах 1 для прямого и в δ-задачах 2 для обратного крыльев изучаются одинаковые законы $\delta_+(\tau)$ и $\delta_-^\cdot(\tau)$

$$\delta_+(\tau)=\delta_-^\cdot(\tau) \tag{4.10}$$

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, придем к соотношению

$$\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{2-}}{\delta^{\cdot *}}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial\xi}\right)_+ds=-\iint\limits_s\left(\frac{\Delta p_{1+}}{\delta^*}\right)f_{\delta-}\,ds \tag{4.11}$$

Полученные равенства справедливы при любых значениях безразмерного времени τ и являются точными в рамках линейной теории для тонкого крыла произвольной формы в плане при любом M. Они представляют не только теоретический интерес, но и позволяют распространить имеющиеся данные на более широкий класс крыльев, служат средством контроля при численных расчетах и т. д.

Напомним, что характеристики прямого и обратного крыльев, зависящие от центровки ξ_0, должны сравниваться при центровках, удовлетворяющих соотношению (1.1).

5. Аэродинамические коэффициенты деформирующихся крыльев. Обобщим формулы (2.8) — (2.13) на случай, когда деформации крыла со временем изменяются по любому закону $\delta(\tau)$.

Рассмотрим в формулах (3.3) ту, которая соответствует c_y при $i = 4$ (δ-задача 1). Подставим в ее правую часть выражения c_{y1+}^{δ} и $c_{y1+}^{\delta^\cdot}$ из (2.8)

$$\left(\frac{c_{y1+}}{\delta^*}\right) = \frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ \int\limits_0^\infty \left(p_-^{\alpha}\frac{\delta_p}{\delta^*} + p_-^{\alpha^\cdot}\frac{\delta_p^\cdot}{\delta^*}\right) dp^*\, ds$$

Возьмем $\alpha(\tau) = \delta(\tau)$, тогда $\delta_p = \alpha_p$, $\delta_p^\cdot = \alpha_p^\cdot$ и, учитывая (3.3), можем написать

$$\left(\frac{c_{y1+}(M,\tau)}{\delta^*}\right) = \frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\alpha^*}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \tag{5.1}$$

Затем возьмем формулу (3.3) для c_y при $i = 5$ (δ-задача 2). С помощью (2.9) придем к равенству

$$\left(\frac{c_{y2+}(M,\tau)}{\delta^{\cdot *}}\right) = \frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\alpha^*}\right) f_{\delta+}\, ds \tag{5.2}$$

причем здесь на обратном крыле нагрузки находятся при законе

$$\alpha_-(\tau) = \delta_+^\cdot(\tau)$$

Аналогично обобщаются формулы (2.10). При условии

$$\omega_{z-}(\tau) = \delta_+(\tau)$$

получаем

$$\left(\frac{m_{z1+}}{\delta^*}\right) = \frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\omega_z^*}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \tag{5.3}$$

Приняв $\omega_{z-}(\tau) = \delta_+^\cdot(\tau)$, найдем вместо (2.11)

$$\left(\frac{m_{z2+}}{\delta^{\cdot *}}\right) = -\frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\omega_z^*}\right) f_{\delta+}\, ds \tag{5.4}$$

Наконец, взяв $\omega_{x-}(\tau) = \delta_+(\tau)$, от соотношений (2.12) придем к следующему:

$$\left(\frac{m_{x1+}}{\delta^*}\right) = \frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\omega_x^*}\right)\left(\frac{\partial f_\delta}{\partial \xi}\right)_+ ds \tag{5.5}$$

Подобным же образом обобщаются формулы (2.13)

$$\left(\frac{m_{x2+}}{\delta^{\cdot *}}\right) = -\frac{1}{s}\iint\limits_s \left(\frac{\Delta p_-}{\omega_x^*}\right) f_{\delta+}\, ds \tag{5.6}$$

причем здесь нужно рассмотреть

$$\omega_{x-}(\tau) = \delta_+^\cdot(\tau)$$

Все обобщения справедливы, естественно, и в частном случае деформаций — при отклонении рулей и элеронов.

Пусть крыло имеет симметричную форму в плане. Тогда приращение коэффициента $\Delta m_x = 0$ при отклонении рулей и $\Delta c_y = 0$, $\Delta m_z = 0$ при отклонении элеронов. Удвоив правые части (5.1)—(5.6), перейдем к интегрированию только по правой половине крыла. Согласно (1.8) интегралы будут отличны от нуля лишь на правом руле (элероне), где функция $f_\delta(\xi, \zeta)$ задана уравнением (1.8).

Таким образом, чтобы найти суммарные аэродинамические характеристики крыла произвольной формы в плане как функции времени при любом законе деформации его поверхности

$$\eta_+(\xi, \zeta, \tau) = f_{\delta +}(\xi, \zeta)\delta_+(\tau)$$

нужно сделать следующее:

1) для обратного жесткого (недеформированного) крыла при том же числе M решить три задачи (α, ω_z, ω_x) при зависимостях от времени, совпадающих с $\delta(\tau)$;

2) решить еще три задачи (α, ω_z, ω_x) при законах, тождественно равных $\delta^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau)$;

3) вычислить переходные функции по формулам (5.1)—(5.6);

4) найти суммарные значения переходных функций

$$\left(\frac{c}{\delta^*}\right) = \left(\frac{c_1}{\delta^*}\right) + \left(\frac{c_2}{\delta^{\boldsymbol{\cdot}*}}\right)\frac{\delta^{\boldsymbol{\cdot}*}}{\delta^*}$$

или коэффициентов аэродинамических производных по формулам (2.2).

Существенным упрощением задачи является то, что переход от одного закона $f_\delta(\xi, \zeta)$ к другому не требует решения новых краевых задач, как это получается при прямом подходе.

Применение преобразований, связанных с интегралом Дюамеля, позволяет еще упростить задачу и ограничиться рассмотрением только ступенчатых изменений $\delta(\tau)$ и $\delta^{\boldsymbol{\cdot}}(\tau)$.

Отметим, что если исследуется линейная задача, в которой граничное условие на крыле может быть представлено в виде

$$\frac{W_y(\xi, \zeta, \tau)}{U_0} = f(\xi, \zeta)\, q(\tau)$$

то справедливо будет и общее соотношение теоремы обратимости [2]. Рассуждениями, аналогичными предыдущим, получим вместо (2.3)

$$\iint_s \left(\frac{\Delta p_+}{q^*}\right) f_- \, ds = \iint \left(\frac{\Delta p_-}{q^*}\right) f_+ \, ds \qquad (5.7)$$

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Flax A. H. Reverse — flow and variational theorems for lifting surfaces in nonstationary compressible flow. J. Aeronaut. Sci., 1953, No. 2.
2. Miles I. W. The potential theory of unsteady supersonic flow. Cambridge, 1959.
3. Heaslet M. A., Spreiter I. R. Reciprocity relations in aerodynamica. NACA Rep. No. 1119, 1953.
4. Ульянов Б. И. Некоторые обобщения и следствия теоремы обратимости для неустановившегося движения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
5. Белоцерковский С. М. Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.