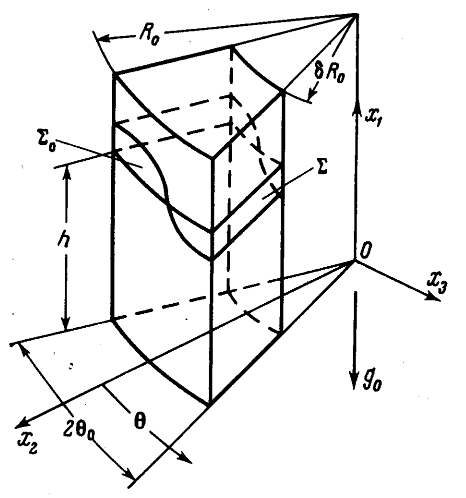
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КРУГОВОМ СЕКТОРЕ

И. Г. ГАТАУЛЛИН, В. И. СТОЛБЕЦОВ

(Москва)

Вычислены основные гидродинамические коэффициенты уравнений, описывающих немалые колебания идеальной несжимаемой и однородной жидкости в баках, имеющих форму цилиндрического сектора. Нелинейные колебания жидкости в цилиндрических полостях рассматривались в работах [1–3]. Здесь применяется метод решения некоторых нелинейных задач о колебаниях идеальной жидкости в произвольных полостях, предложенный в [4]. Анализируется важная для практических приложений зависимость рассчитанных коэффициентов от геометрических параметров рассматриваемой формы бака.

1. Рассмотрим немалые колебания тяжелой незавихренной жидкости в цилиндрическом круговом секторе, образованном двумя концентрическими цилиндрами радиусами R_0 и $\delta R_0 (0 \leqslant \delta < 1)$ и двумя радиальными плоскостями с углом $2\theta_0 = \pi / k$ между ними. Начало прямоугольной системы координат $x_1 x_2 x_3$ расположим на оси цилиндров в плоскости днища бака, ось x_1 совместим с осью цилиндров, а ось x_2 направим вдоль биссектрисы угла раствора рассматриваемого цилиндрического сектора (фиг. 1). Пусть на жидкость действует поле массовых сил с градиентом $\mathbf{g}_0$



Фиг. 1

$$\mathbf{g}_0 = -\nabla (g_0 x_1) \qquad (1.1)$$

Обозначим через $x_{1\Sigma}$ и $x_{1\Sigma 0}$ абсциссы возмущенной Σ и невозмущенной Σ_0 поверхностей жидкости соответственно. Тогда [4]

$$x_{1\Sigma} - x_{1\Sigma 0} = \sum_{l,\alpha} r_{l\alpha} \psi_{rl\alpha} + \sum_{m,\beta} s_{m\beta} \psi_{sm\beta} \qquad (1.2)$$

где $r_{l\alpha}$, $s_{m\beta}$ — обобщенные координаты рассматриваемой задачи; l, α, m, β — индексы, смысл которых будет определен ниже, а полная на Σ_0 система функций $\psi_{rl\alpha}$, $\psi_{sm\beta}$ представляет собой всю совокупность решений известной задачи о малых свободных колебаниях жидкости, которая применительно к рассматриваемой полости в цилиндрических координатах x_1, ρ, θ формулируется следующим образом:

$$\Delta \varphi_{rl0\alpha} |_{Q_0} = \Delta \varphi_{sm0\beta} |_{Q_0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{rl0\alpha}}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi_{sm0\beta}}{\partial \theta} = 0 \quad (\theta = \pm \theta_0)$$

$$\frac{\partial\varphi_{rl0\alpha}}{\partial\rho}=\frac{\partial\varphi_{sm0\beta}}{\partial\rho}=0\ (\rho=R_0,\ \delta R_0),\quad \left.\frac{\partial\varphi_{rl0\alpha}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\left.\frac{\partial\varphi_{sm0\beta}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_{rl0\alpha}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}=\frac{\omega_{rl\alpha}^2}{g_0}\varphi_{rl0\alpha}=\psi_{rl\alpha},\quad \left.\frac{\partial\varphi_{sm0\beta}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}=\frac{\omega_{sm\beta}^2}{g_0}\varphi_{sm0\beta}=\psi_{sm\beta} \quad (1.3)$$

Здесь Q_0 — невозмущенный объем жидкости, $h=x_{1\Sigma0}$, $\omega_{rl\alpha}^2$, $\omega_{sm\beta}^2$ — квадраты частот свободных колебаний жидкости.

Разделяя переменные [5], все решения задачи (1.3) можно записать в виде

$$\varphi_{rl0\alpha}=Z_{l\alpha}(\rho)\chi_{l\alpha}(x_1)\cos[l(\theta-\theta_0)],\quad l=\pi(i-{}^1/_2)/\theta_0$$

$$\varphi_{sm0\beta}=Z_{m\beta}(\rho)\chi_{m\beta}(x_1)\cos[m(\theta-\theta_0)],\quad m=\pi(j-1)/\theta_0 \quad (1.4)$$

$$Z_{pq}(\rho)=\frac{N_p'(\xi_{pq})J_p(\xi_{pq}\bar\rho)-J_p'(\xi_{pq})N_p(\xi_{pq}\bar\rho)}{N_p'(\xi_{pq})J_p(\xi_{pq})-J_p'(\xi_{pq})N_p(\xi_{pq})}$$

$$\chi_{pq}(x_1)=R_0\,\mathrm{ch}\,(\xi_{pq}\bar x_1)\,/\,\xi_{pq}\,\mathrm{sh}\,(\xi_{pq}\bar h),\quad \bar x_1R_0=x_1,\quad \bar hR_0=h$$

$$\bar\rho R_0=\rho,\quad J_p'(y)=dJ_p(y)/dy,\quad p=k(n-1)$$

$$(n,\ q,\ i,\ j,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

Здесь ξ_{pq} — q-й корень уравнения

$$J_p'(\xi)N_p'(\delta\xi)-J_p'(\delta\xi)N_p'(\xi)=0 \quad (1.5)$$

$J_p(\xi_{pq}\bar\rho)$, $N_p(\xi_{pq}\bar\rho)$ — цилиндрические функции p-го порядка первого и второго рода соответственно. Из (1.4), (1.5) следует, что суммирование в (1.2) необходимо производить по значениям $\alpha,\beta=1,2,3,\ldots$ и значениям l, m, определенным формулами (1.4). В [4] получены две системы уравнений, описывающие нелинейные колебания жидкости в случаях, когда немалым является один из параметров $r_{l\alpha}$ или $s_{m\beta}$ соответственно. Эти уравнения, если пренебречь в них связями выделенных немалых параметров $r_{l\alpha}$, $s_{m\beta}$ с остальными обобщенными координатами, можно записать в виде

$$\mu_{rl\alpha}(\ddot r_{l\alpha}+\omega_{rl\alpha}^2r_{l\alpha})+a_{rl\alpha}(r_{l\alpha}\dot r_{l\alpha}^2)^{\cdot}+e_{rl\alpha}\dot r_{l\alpha}^2r_{l\alpha}+g_{rl\alpha}r_{l\alpha}^3=Q_{rl\alpha} \quad (1.6)$$

$$\mu_{sm\beta}(\ddot s_{m\beta}+\omega_{sm\beta}^2s_{m\beta})+T_{1sm\beta}(\dot s_{m\beta}s_{m\beta})^{\cdot}+T_{2sm\beta}\dot s_{m\beta}^2+ \quad (1.7)$$

$$+T_{3sm\beta}s_{m\beta}^2+a_{sm\beta}(\dot s_{m\beta}s_{m\beta}^2)^{\cdot}+e_{sm\beta}\dot s_{m\beta}^2s_{m\beta}+g_{sm\beta}s_{m\beta}^3=Q_s$$

Здесь $Q_{rl\alpha}$, $Q_{sm\beta}$ — обобщенные силы, соответствующие координатам $r_{l\alpha}$, $s_{m\beta}$. Характер этих сил зависит от вида конкретной задачи.

2. Наиболее важным в вопросах динамики абсолютно жестких полостей, частично заполненных жидкостью, является случай, когда немалым параметрам в (1.2), (1.4) соответствуют значения $l=\pi/2\theta_0$, $m=0$, $\alpha=\beta=1$, т. е. значения индексов l, α, m, β, характеризующие основные тона колебаний жидкости. Вычислим коэффициенты управления (1.6) для значений $l=\pi/2\theta_0$, $\alpha=1$ и для различных значений параметров θ_0 и δ. В [4] показано, что коэффициенты $g_{rl\alpha}$ для цилиндрических полостей тождественно обращаются в нуль. Покажем, как эффективно вычисляются коэффициенты a_{rk1}, e_{rk1} с помощью рядов по известным собственным функциям (1.4). Согласно [4] имеем

$$a_{rk1}=\int\limits_{\Sigma_0}\left(\varphi_{r111}+\psi_{rk1}\frac{\partial\varphi_{r1r1}}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\psi_{rk1}^2\frac{\partial^2\varphi_{rk01}}{\partial x_1^2}\right)\psi_{rk1}\,dS \quad (2.1)$$

где φ_{r111}, φ_{r1r1} — гармонические в Q_0 функции, производные по нормали от которых на ограничивающих Q_0 поверхностях равны нулю всюду, кроме Σ_0, где (2.2)

$$\frac{\partial\varphi_{r111}}{\partial x_1}=\nabla\psi_{rk1}\nabla\varphi_{r1r1}+\psi_{rk1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla\psi_{rk1}\nabla\varphi_{rk01}-\frac{\partial\varphi_{r1r1}}{\partial x_1}\right)-\frac{\psi_{rk1}^2}{2}\frac{\partial^3\varphi_{rk01}}{\partial x_1^3}$$

$$\frac{\partial\varphi_{r1r1}}{\partial x_1}=\nabla\psi_{rk1}\nabla\varphi_{rk01}-\psi_{rk1}\frac{\partial^2\varphi_{rk01}}{\partial x_1^2}\tag{2.3}$$

Используя интегрирование по частям, преобразуем (2.1)

$$a_{rk1}=\int\limits_{\Sigma_0}\varphi_{rk01}\frac{\partial\varphi_{r111}}{\partial x_1}dS+\int\limits_{\Sigma_0}\left(\psi_{rk1}\frac{\partial\varphi_{r1r1}}{\partial x_1}+\frac{\psi_{rk1}^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{rk01}}{\partial x_1^2}\right)\psi_{rk1}\,dS\tag{2.4}$$

Полученное выражение может быть вычислено, если известна функция φ_{r1r1}. Для нахождения последней используем условие (2.3), которое с помощью формул (1.4) можно записать в виде

$$\left.\frac{\partial\varphi_{r1r1}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0}=\chi_{k1}(h)\,[F_1(\rho)+F_2(\rho)\cos\pi(\theta-\theta_0)/\theta_0]\tag{2.5}$$

$$F_1(\rho)=\xi_{k1}[Z_{k1}(\rho)Z_{k1}'(\rho)+\rho\xi_{k1}Z_{k1}'^2(\rho)+\rho\xi_{k1}Z_{k1}(\rho)Z_{k1}''(\rho)]/2\rho$$

$$F_2(\rho)=F_1(\rho)-\pi^2Z_{k1}^2(\rho)/4\rho^2\theta_0^2,\qquad Z_{pq}'(x)=\frac{dZ_{pq}(x)}{dx},\qquad Z_{pq}''(x)=\frac{dZ_{pq}'(x)}{dx}\tag{2.6}$$

Отметим, что здесь и в дальнейшем величина R_0 принята за единицу, что не влияет на общность результатов.

Из (2.5) следует, что φ_{r1r1} необходимо искать в виде ряда

$$\varphi_{r1r1}=\sum_{\beta=1}^{\infty}(h_{0\beta}\varphi_{s00\beta}+h_{\nu\beta}\varphi_{s\nu0\beta}),\qquad \nu=2k=\pi/\theta_0\tag{2.7}$$

Применение стандартной процедуры определения коэффициентов Фурье $h_{0\beta}$, $h_{\nu\beta}$ позволяет записать их в виде

$$h_{0\beta}=\chi_{k1}(h)\frac{(F_1,\psi_{s0\beta})}{(\psi_{s0\beta},\psi_{s0\beta})},\qquad h_{\nu\beta}=\chi_{k1}(h)\frac{(F_2\cos\nu(\theta-\theta_0),\psi_{s\nu\beta})}{(\psi_{s\nu\beta},\psi_{s\nu\beta})}\tag{2.8}$$

где использованы обозначения

$$(F_1,\psi_{s0\beta})=\int\limits_{\Sigma_0}F_1\psi_{s0\beta}\,dS,\qquad(\psi_{s0\beta},\psi_{s0\beta})=\int\limits_{\Sigma_0}\psi_{s0\beta}\psi_{s0\beta}\,dS$$

Подставляя (2.7), (2.8) в уравнения (2.2), (2.4), получаем окончательное выражение, определяющее a_{rk1}

$$a_{rk1}=\frac{3}{8}\theta_0\xi_{k1}^2\chi_{k1}(h)\int\limits_{\delta}^{1}Z_{k1}^4(\rho)\rho\,d\rho+\Sigma^0-$$

$$-\frac{15}{8}\theta_0\chi_{k1}(h)\xi_{k1}^2\int\limits_{\delta}^{1}Z_{k1}^2(\rho)Z_{k1}'^2(\rho)\rho\,d\rho-\frac{5}{32}\frac{\pi^2}{\theta_0}\chi_{k1}(h)\int\limits_{\delta}^{1}\frac{Z_{k1}^4(\rho)}{\rho}d\rho$$

$$\Sigma^0=\sum_{\beta=1}^{\infty}[h_{0\beta}^2\chi_{0\beta}(h)\,(\psi_{s0\beta},\psi_{s0\beta})+h_{\nu\beta}^2\chi_{\nu\beta}(h)\,(\psi_{s\nu\beta},\psi_{s\nu\beta})]\tag{2.9}$$

Аналогично находится e_{rk1}. Опустив промежуточные выкладки, приведем лишь окончательный результат

$$e_{rk1} = \frac{3}{4}\theta_0\xi_{k1}^2\chi_{k1}(h)\int_0^1 Z_{k1}^4(\rho)\rho\,d\rho - \Sigma^0 - \tag{2.10}$$

$$-\frac{3}{4}\theta_0\xi_{k1}^2\chi_{k1}(h)\int_0^1 Z_{k1}^2(\rho)Z_{k1}'^2(\rho)\,\rho\,d\rho - \frac{1}{16}\frac{\pi^2}{\theta_0}\chi_{k1}(h)\int_0^1\frac{Z_{k1}^4(\rho)}{\rho}d\rho$$

При проведении конкретных расчетов по формулам (2.9), (2.10) следует иметь в виду, что нормы $(\psi_{s0\beta}, \psi_{s0\beta})$, $(\psi_{s\nu\beta}, \psi_{s\nu\beta})$ легко вычисляются в квадратурах, а при вычислении остальных интегралов необходимо использовать ЭЦВМ.

3. Вычислим коэффициенты уравнений (1.7) для случая, когда $m=0$, $\beta=1$, т. е. для гармоники s_{01}, соответствующей осесимметричному тону колебаний жидкости с одним узлом вдоль радиуса. Коэффициенты $T_{3sm\beta}$ и $g_{sm\beta}$ в уравнении (1.7) тождественно равны нулю вследствие цилиндрической формы рассматриваемой полости [4], а остальные коэффициенты (1.7), стоящие при нелинейных членах, определяются выражениями

$$a_{s01} = \int_{\Sigma_0}\left(\varphi_{s111} + \psi_{s01}\frac{\partial\varphi_{s1s1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\psi_{s01}^2\frac{\partial^2\varphi_{s001}}{\partial x_1^2}\right)\psi_{s01}\,dS \tag{3.1}$$

$$e_{s01} = \int_{\Sigma_0}\left[\nabla\varphi_{s001}\left(\nabla\varphi_{s1s1} + \psi_{s01}\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla\varphi_{s001}\right)\right]\psi_{s01}\,dS \tag{3.2}$$

$$T_{1s01} = \int_{\Sigma_0}\left(\varphi_{s1s1} + \psi_{s01}\frac{\partial\varphi_{s001}}{\partial x_1}\right)\psi_{s01}\,dS,\qquad T_{2s01} = {}^1/_2\int_{\Sigma_0}(\nabla\varphi_{s001})^2\,\psi_{s01}\,dS \tag{3.3}$$

Гармонические в Q_0 функции φ_{s111}, φ_{s1s1} удовлетворяют условию непротекания на смоченной поверхности полости S и следующим краевым условиям на Σ_0 [4]:

$$\frac{\partial\varphi_{s111}}{\partial x_1} = \nabla\psi_{s01}\,\nabla\varphi_{s1s1} + \psi_{s01}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\nabla\psi_{s01}\,\nabla\varphi_{s001} - \frac{\partial\varphi_{s1s1}}{\partial x_1}\right) -$$

$$-\frac{\psi_{s01}^2}{2}\frac{\partial^3\varphi_{s001}}{\partial x_1^3},\qquad \frac{\partial\varphi_{s1s1}}{\partial x_1} = \nabla\psi_{s01}\,\nabla\varphi_{s001} - \psi_{s01}\frac{\partial^2\varphi_{s001}}{\partial x_1^2} \tag{3.4}$$

Из условия непротекания для функции φ_{s111} на S и уравнения (3.1) получим

$$a_{s01} = \int_{\Sigma_0}\varphi_{s001}\frac{\partial\varphi_{s111}}{\partial x_1}dS + \int_{\Sigma_0}\left(\psi_{s01}\frac{\partial\varphi_{s1s1}}{\partial x_1} + \frac{\psi_{s01}^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{s001}}{\partial x_1^2}\right)\psi_{s01}\,dS$$

Определим функцию φ_{s1s1}. Из формул (1.4) и условий (3.4) следует:

$$\left.\frac{\partial\varphi_{s1s1}}{\partial x_1}\right|_{\Sigma_0} = \chi_{01}(h)\,\xi_{01}\,\{Z_{01}(\rho)Z_{01}'(\rho) + \rho\xi_{01}[Z_{01}'^2(\rho) + Z_{01}(\rho)Z_{01}''(\rho)]\}/\rho =$$

$$= \chi_{01}(h)F_3(\rho) \tag{3.5}$$

что позволяет записать функцию φ_{s1s1} в виде ряда

$$\varphi_{s1s1} = \sum_{\beta=1}^{\infty}\chi_{01}(h)\frac{(F_3(\rho), \psi_{s0\beta})}{(\psi_{s0\beta}, \psi_{s0\beta})}\varphi_{s00\beta} \tag{3.6}$$

Подставим выражение (3.6) в равенства (3.1)—(3.3). Используя явный вид функций $\psi_{s0\beta}$, $\varphi_{s00\beta}$, получаем (3.7)

$$a_{s01} = \theta_0\chi_{01}(h)\xi_{01}^2\int_\delta^1 Z_{01}^4(\rho)\rho\,d\rho + \Sigma' - 5\theta_0\chi_{01}(h)\xi_{01}^2\int_\delta^1 Z_{01}^2(\rho)Z_{01}'^2(\rho)\rho\,d\rho$$

$$e_{s01} = 2\theta_0\chi_{01}(h)\xi_{01}^2\int_\delta^1 Z_{01}^4(\rho)\rho\,d\rho - \Sigma' - \tag{3.8}$$

$$-2\theta_0\chi_{01}(h)\xi_{01}^2\int_\delta^1 Z_{01}^2(\rho)Z_{01}'^2(\rho)\rho\,d\rho$$

$$T_{1s01} = 2\theta_0 I_1 - 2\theta_0\chi_{01}^2(h)\xi_{01}^2 I_2, \qquad I_1 = \int_\delta^1 Z_{01}^3(\rho)\rho\,d\rho \tag{3.9}$$

$$T_{2s01} = \theta_0 I_1 + \theta_0\xi_{01}^2\chi_{01}^2(h) I_2, \qquad I_2 = \int_\delta^1 Z_{01}(\rho)Z_{01}'^2(\rho)\rho\,d\rho$$

$$\Sigma' = \theta_0\sum_{\beta=1}^{\infty} g_{0\beta}^2\chi_{0\beta}(h)\left[1-\delta^2 Z_{0\beta}^2(\delta)\right] \tag{3.10}$$

$$g_{0\beta} = \chi_{01}(h)(F_3, \psi_{s0\beta}) / (\psi_{s0\beta}, \psi_{s0\beta})$$

Как отмечено выше, R_0 в формулах (2.5)—(3.10) принят за единицу. Благодаря нормировке (1.4) функций $\psi_{rl\alpha}$, $\psi_{sm\beta}$ параметры $r_{l\alpha}$, $s_{m\beta}$ представляют собой вертикальные смещения поверхности Σ в определенных точках ее контура, выраженные в долях R_0.

Однако для практического использования уравнений (1.6), (1.7) их удобно несколько преобразовать. Во-первых, разделим все коэффициенты уравнений (1.6), (1.7) на $\mu_{rl\alpha}$, $\mu_{sm\beta}$ соответственно. При этом во избежание недоразумений заметим, что за полученными таким образом коэффициентами в дальнейшем оставлены их прежние обозначения. Ниже анализируется зависимость гидродинамических коэффициентов уравнений (1.6), (1.7), стоящих при нелинейных членах, от параметров θ_0 и δ. Поэтому удобно из соображений, приведенных ниже, дополнительно преобразовать уравнения (1.6), (1.7) так, чтобы параметры $r_{l\alpha}$ и $s_{m\beta}$ были бы безразмерными смещениями поверхности Σ вдоль оси x_1 в некоторых точках ее контура, отсчитанными в долях $R_0\theta_0(1+\delta)/2$ для $r_{l\alpha}$ и в долях $R_0(1-\delta)/2$ для параметров $s_{m\beta}$. Из соображений размерности следуют очевидные преобразования для коэффициентов $a_{rk1}, \ldots, T_{2s01}$:

$$a_{rk1}' = {}^1/_4 a_{rk1}\theta_0^2(1+\delta)^2, \quad e_{rk1}' = {}^1/_4 e_{rk1}\theta_0^2(1+\delta)^2 \tag{3.11}$$

$$a_{s01}' = {}^1/_4 a_{s01}(1-\delta)^2, \quad e_{s01}' = {}^1/_4 e_{s01}(1-\delta)^2, \quad T_{ks01}' = {}^1/_2 T_{ks01}(1-\delta)$$

Ниже будут анализироваться коэффициенты, отмеченные в (3.11) штрихами. Для упрощения записи штрихи в дальнейшем опускаются.

4. С учетом сказанного выше уравнение (1.6), например, принимает вид

$$r^{\cdot\cdot} + \omega^2 r + a_{rk1}(r^2 r^\cdot)^\cdot + e_{rk1} r^{\cdot 2} r = Q_{rk1} \tag{4.1}$$

$$r_{l\alpha} = r_{k1} = r, \quad \alpha = 1, \quad k = \pi / 2\theta_0, \quad \omega_{rk1} = \omega$$

Пусть $Q_{rk1} = h_0 p^2 \cos pt$, $p \approx \omega$. Такой вид имеет обобщенная сила, например, в случае, когда сектор совершает гармонические колебания на частотах p, близких к ω, с небольшой амплитудой вдоль оси x_3 [3]. Устано-

Таблица 1

δ	$\theta_0 = \pi/4$		$\theta_0 = \pi/6$	
	a_{rk1}	e_{rk1}	a_{rk1}	e_{rk1}
0.2	0.2763	0.1226	0.2237	0.1074
0.4	0.4494	0.04771	0.3293	0.1016
0.6	0.5932	−0.008726	0.5302	0.01025
0.8	0.6172	−0.002623	0.6124	−0.002767
0.9	0.6173	$-0.3689\cdot10^{-3}$	0.6168	$-0.4889\cdot10^{-3}$

δ	$\theta_0 = \pi/8$		$\theta_0 = \pi/12$	
	a_{rk1}	e_{rk1}	a_{rk1}	e_{rk1}
0.2	0.2029	0.09110	0.1832	0.07179
0.4	0.2818	0.1105	0.2514	0.09470
0.6	0.4629	0.03407	0.3652	0.07021
0.8	0.6046	−0.002227	0.5828	$-0.36\cdot10^{-4}$
0.9	0.6161	$-0.5709\cdot10^{-3}$	0.6141	$-0.9465\cdot10^{-5}$

вившиеся решения уравнения (4.1), как известно [6], в первом приближении достаточно хорошо описываются формулами

$$r = r_0 \cos pt, \qquad r_0(\bar\omega^2 - 1) - r_0^3(a_{rk1} - e_{rk1}) / 4 = h_0, \qquad \bar\omega^2 = \omega^2 / p^2 \tag{4.2}$$

Пусть δr — вариция координаты r. Тогда из (4.1), (4.2) получим уравнение

$$\begin{aligned} &\delta r^{\cdot\cdot}[(1 + a_{rk1}r_0^2 / 2) + a_{rk1}r_0^2 \cos 2pt / 2] - \\ &\qquad - \delta r^{\cdot} r_0^2 p (2a_{rk1} + e_{rk1}) \sin 2pt + \\ &\qquad + \delta r[\omega^2 + e_{rk1}r_0^2p^2 / 2 - r_0^2p^2(2a_{rk1} + e_{rk1} / 2) \cos 2pt] = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

откуда найдем, что основная область неустойчивости G_1 решения (4.2) ограничивается кривыми

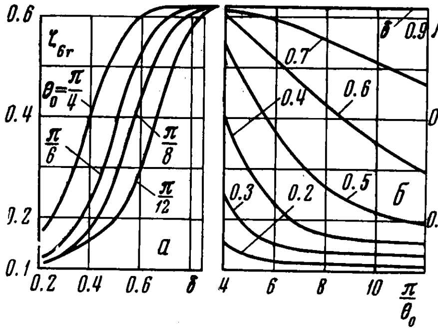
$$3\zeta_{\theta r} r_0^2 / 4 = \bar\omega^2 - 1, \qquad \zeta_{\theta r} r_0^2 / 4 = \bar\omega^2 - 1, \qquad \zeta_{\theta r} = a_{rk1} - e_{rk1} \tag{4.4}$$

Второе из уравнений (4.4) совпадает с уравнением скелетной кривой серии резонансных кривых, определенных формулой (4.2), представляю-

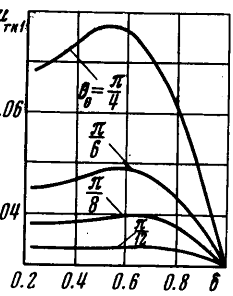
Таблица 2

δ	μ_{s01}	ω^2_{s01}	a_{s01}	e_{s01}	T_{1s01}	T_{2s01}
0.001	0.2050	3.832	2.008	1.108	−0.8369	−1.256
0.10	0.1893	3.941	1.635	0.7502	−0.6971	−1.046
0.30	0.1226	4.706	1.141	0.2435	−0.4067	−0.6101
0.50	0.06292	6.393	0.8869	0.07292	−0.2249	−0.3374
0.70	$0.2257\cdot10^{-1}$	10.52	0.7421	0.01708	−0.1093	−0.1640
0.90	0.002501	31.43	0.6508	0.001317	−0.03055	−0.04587
0.98	0.001000	157.1	0.6235	$0.1307\cdot10^{-3}$	$-0.5873\cdot10^{-2}$	$-0.8693\cdot10^{-2}$

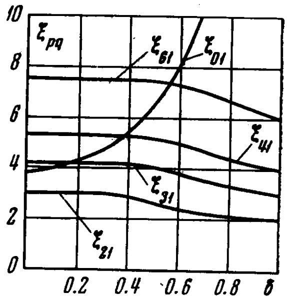
щей зависимость частоты немалых колебаний жидкости от амплитуды r_0. В табл. 1 и 2 представлены результаты вычислений с помощью ЭЦВМ по формулам (2.9), (2.10), (3.7)—(3.10) коэффициентов, стоящих при нелинейных членах в уравнениях (1.6), (1.7), для разных значений θ_0 и δ и значения $\bar{h} \gg 1$. Проведенные вычисления показали эффективность применения метода Фурье при отыскании функций φ_{r1r1}, φ_{s1s1}, поскольку в рассматриваемом случае достаточно легко вычисляется любое количество координатных функций $\varphi_{rl0\alpha}$, $\varphi_{sm0\beta}$, а ряды (2.9), (3.10) являются быстро



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

сходящимися. Так, для вычисления четырех верных значащих цифр в значениях коэффициентов, приведенных в таблицах, в этих рядах достаточно учесть лишь по четыре члена. Сказанное имеет силу для значений $\pi / 12 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi / 4$, $0.15 \leqslant \delta \leqslant 0.98$. В случае, когда немал параметр s_{01}, коэффициент $\zeta_{6s} = a_{s01} - e_{s01}$ с точностью, удовлетворяющей потребностям практики, для значений $\delta \geqslant 0.15$ может быть определен по первым двум членам рядов (3.7), (3.8). Такое же количество членов рядов (2.9), (2.10) гарантирует точность 10% при расчете коэффициента ζ_{6r} для всех значений параметров δ и θ_0, принятых в работе. Расчеты также показали, что сходимость рядов во всех случаях существенно улучшается по мере увеличения значений δ. Может быть предложена следующая геометрическая интерпретация этого факта. При малых значениях θ_0 и значениях δ, близких к единице, поперечное сечение полости близко по форме к прямоугольнику со стороны $(1-\delta)R_0$ и $\theta_0(1+\delta)R_0$ (этим объясняется характер преобразований (3.11)), а сам цилиндрический сектор — к прямоугольному параллелепипеду, для которого известно выражение коэффициентов ζ_{6r}, ζ_{6s}, полученное в конечной форме [7]. В частности, $\zeta_{6r} = \zeta_{6s} = \pi^2 / 16$ при $h \gg R_0$. Благодаря пересчету коэффициентов, стоящих при нелинейных членах, произведенному по формулам (3.11), можно ожидать близости значений приведенных в таблицах коэффициентов для малых θ_0 и значений δ, близких к единице, к значениям соответствующих коэффициентов, характеризующих нелинейные колебания жидкости в прямоугольном параллелепипеде. Как видно из табл. 1 и 2, при значении $\delta = 0.98$ и всех рассмотренных значениях θ_0 отличие значений коэффициентов ζ_{6r}, ζ_{6s}, от $\pi^2 / 16$ не превышает 1%, что может служить косвенным подтверждением правильности произведенных расчетов. С этим согласуется также тот факт, что значения коэффициентов T_{is01} при $\delta \to 1$, как это видно из таблиц, стремятся к значениям соответствующих коэффициентов для параллелепипеда.

Основные результаты расчетов представлены также на фиг. 2—4. Из фиг. 2, *а* видно, что при всех θ_0 коэффициент ζ_{6r} с увеличением δ резко возрастает, приближаясь к своему предельному значению $^1/_{16}\pi^2$, в то время как при $\delta \approx 0.1 \div 0.2$ им практически можно пренебречь, что важно для приложений. Результаты, приведенные на фиг. 2, *б*, показывают, что с ростом π / θ_0 коэффициент ζ_{6r} уменьшается. Наиболее сильное уменьшение этого коэффициента наблюдается в диапазоне значений $\delta = 0.4 \div 0.6$.

Таким образом, учет нелинейных свойств колеблющейся жидкости более важен в секторах с большими углами раствора. Полученные в работе численные результаты могут быть использованы при анализе устойчивости автоколебательных механических систем, содержащих в качестве элементов рассмотренные выше полости с жидкостью.

Авторы благодарят Г. С. Нариманова за внимание и советы.

Поступило 3 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1965.
3. Столбецов В. И. Об уравнениях нелинейных колебаний полости, частично заполненной жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
4. Гатауллин И. Г., Столбецов В. И. О немалых колебаниях жидкости в подвижных полостях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
5. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
6. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
7. Столбецов В. И. О колебаниях жидкости в сосуде, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.