

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О СОУДАРЕНИИ ПЛОСКИХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С РАЗРЫВОМ ТЕЧЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ МЕЖДУ СТРУЯМИ

П. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

(Москва)

Обычно линия разрыва в струйных течениях отделяет движущуюся жидкость от покоящейся. Однако в ряде случаев линии разрыва возникают и внутри течения. В статье задача такого рода сводится к нелинейной системе сингулярных интегральных уравнений, решаемой методом малого параметра. При этом каждый коэффициент ряда по малому параметру определяется из линейного сингулярного интегрального уравнения первого рода.

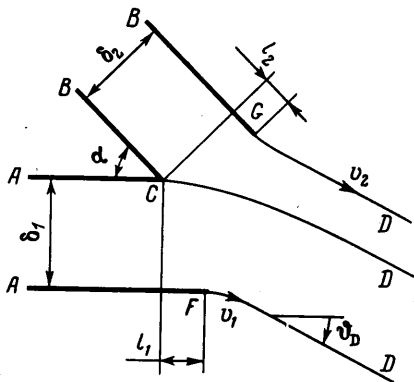
Пусть из канала шириной δ_1 (фиг. 1), образованного стенками AC и AF , параллельными оси x , вытекает струя жидкости плотности ρ_1 , имеющая скорость v_1 на свободной поверхности FD . Из канала шириной δ_2 , образованного параллельными стенками BC и BG , вытекает струя жидкости плотности ρ_2 , имеющая на свободной поверхности GD скорость v_2 . Стенки AC и BC образуют угол α . Давление на свободных поверхностях FD и GD принимается равным нулю. Пусть

$$\varepsilon = {}^{1/2}\rho_2 v_2^2 / {}^{1/2}\rho_1 v_1^2$$

где числитель и знаменатель дроби есть постоянные Бернулли для соударяющихся струй. Без ограничения общности можно считать, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$. При $\varepsilon \neq 1$ по теореме Бернулли течение имеет разрыв вдоль линии CD , разделяющей струи, и описывается кусочно аналитическими функциями, которым в области течения $ACDFA$ в дальнейшем будет приписываться индекс «минус», а в области $BCDGB$ — «плюс». Согласно теореме

Бернулли точка C является критической только для струи, вытекающей из канала, образованного стенками BC и BG . Следовательно, линия ACD имеет касательную, наклон которой изменяется непрерывно, а линии BC и CD образуют в точке C угол, равный $\pi - \alpha$. При $\varepsilon = 1$ и $\rho_1 = \rho_2$ разрыв течения вдоль линии CD отсутствует, и задача может быть решена обычными методами теории струй идеальной жидкости [1]. Этот случай рассмотрен в работах [2-4], причем в последней из указанных работ с учетом сжимаемости. Если $\varepsilon = 1$, а $\rho_1 \neq \rho_2$, то, хотя разрыв вдоль линии CD и сохраняется, течение может быть описано непрерывными на линии CD аналитическими функциями, как это делается, например, в теории кумулятивного заряда [5].

Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то почти очевидно, что линия CD приближается к положительной полуоси x , и в предельном случае $\varepsilon = 0$ области течения $ACDFA$

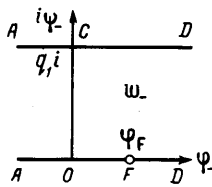


Фиг. 1

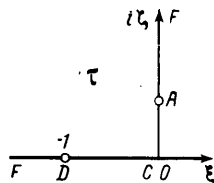
и $BCDGB$ ограничены или отрезками прямых, или свободными линиями тока. Поэтому при $\varepsilon = 0$ течение также может быть исследовано обычными методами. Опираясь на этот факт, в работе [4] рассматриваемая задача решена в первом приближении при малой величине ε .

В настоящей работе задача сведена к нелинейной системе уравнений, содержащей сингулярные интегралы, и получено решение этой системы при $\varepsilon = 0$. В предположении существования и единственности решения в окрестности точки $\varepsilon = 0$ получена зависимость от ε величины асимптотического угла отклонения струи θ_D в виде разложения по степеням ε .

1. В данном пункте рассматривается течение в области $ACDFA$. Соответствующая область изменения комплексного потенциала $w_- = \varphi_- + i\psi_-$ представляет собой полосу шириной $q_1 = v_A \delta_1$ (фиг. 2), где q_1 — расход вытекающей из канала жидкости, а v_A — скорость течения в бесконечно удаленной точке канала. Пусть $w_-(C) = q_1 i$ и $w_-(F) = \varphi_F$, где φ_F — действительное число. Область изменения функции w_- может быть конформно отображена на второй квадрант вспомогательной комплексной плоскости $\tau = \xi + i\zeta$ с соответствием точек согласно фиг. 3. Это отображение осуществляется единственным образом, а величины w_- и τ связаны соотношением



Фиг. 2



Фиг. 3

$$\tau = - \left[\frac{\exp(\pi w_- / q_1) + 1}{\exp(\pi w_- / q_1) - \Psi_-} \right]^{1/2} \quad \left(\Psi_- = \exp \frac{\pi \varphi_F}{q_1} \right) \quad (1.1)$$

где Ψ_- — величина, зависящая от ε . Легко убедиться, что при этом отображении точка A перейдет в точку $i\Psi_-^{1/2}$. Пусть аналитическая в области $ACDFA$ функция

$$\omega_- = \ln \frac{dw_-}{v_1 dz} = \ln \frac{v_-}{v_1} - i\theta_- \quad (1.2)$$

где $v_{\mp}$ и $\theta_{\mp}$ — модуль и аргумент вектора скорости. Действительная и мнимая части этой функции равны нулю соответственно на FD и FAC . Функция $\omega_-(\tau)$ определена на втором квадранте и принимает действительные значения на положительной части мнимой оси ζ . Поэтому она в соответствии с принципом симметрии может быть аналитически продолжена на всю верхнюю полуплоскость τ , причем значения функции $\omega_-(\tau)$ в точках, симметричных относительно мнимой оси будут при этом комплексно сопряженными. Таким образом, действительная и мнимая части функции ω_- будут соответственно четной и нечетной функциями на действительной оси ξ . Кроме того, $\operatorname{Re} \omega_- = 0$ на отрезках $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$, соответствующих свободной линии тока.

С помощью интеграла Шварца для полуплоскости функция $\omega_-(\tau)$ может быть представлена в виде [5]

$$\omega_-(\tau) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \ln \frac{v_-}{v_1} \frac{d\xi}{\xi - \tau} + Ci \quad (1.3)$$

В дальнейшем удобно использовать безразмерную величину давления p , определяемую зависимостью

$$\lambda = 2p / \rho_2 v_2^2$$

При движении вдоль линии CD величина λ изменяется от 1 до 0. Пусть $\xi_- (-1 \leq \xi_- \leq 1)$ — точка действительной оси плоскости τ , соответствующая

щая некоторой точке линии разрыва течения на физической плоскости z . Тогда величины ε , λ и ξ_- связаны некоторыми соотношениями

$$f_-(\varepsilon, \lambda, \xi_-) = 0, \quad f_-(\varepsilon, 1, 0) = 0, \quad f_-(\varepsilon, 0, \pm 1) = 0 \quad (1.4)$$

Последние два соотношения вытекают из соответствия точек при конформном отображении. Пусть соотношения (1.4) определяют непрерывные функции $\xi_- = \xi_-(\varepsilon, \lambda)$ и $\lambda = \lambda(\varepsilon, \xi_-)$, причем последняя из них является четной функцией аргумента ξ_- .

Выражая с помощью теоремы Бернулли величину v_-/v_1 через λ и подставляя в (1.3), можно получить

$$\omega_-(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda) d\xi_-}{\xi_- - \tau} + Ci \quad (1.5)$$

$$\omega_-(i\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda) d\xi_-}{\xi_- - i\zeta} + Ci = \frac{\zeta}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda) d\xi_-}{\xi_-^2 + \zeta^2} + Ci \quad (1.6)$$

$$a_e = \frac{v_A}{v_1} = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda) d\xi_-}{\xi_- - i\Psi_-^{-1/2}} = \exp \frac{\Psi_-^{-1/2}}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda) d\xi_-}{\Psi_- \xi_-^2 + 1} \quad (1.7)$$

В последнем интеграле (1.6) учтена четность функции λ . Поскольку точка $i\zeta$ соответствует стенке CAF , параллельной оси x , из выражения (1.6) следует, что $C = 0$.

Из выражений (1.1) и (1.2) следует, что

$$dz = \frac{1}{v_1} \exp(-\omega_-) dw_- = \frac{1}{v_1} \exp(-\omega_-) \frac{dw_-}{d\tau} d\tau$$

$$\frac{dw_-}{d\tau} = \frac{2v_A\delta_1(1 + \Psi_-)\tau}{\pi(1 + \Psi_- \tau^2)(1 - \tau^2)}$$

Интегрируя предыдущее выражение вдоль верхней половины мнимой оси ζ , можно получить

$$l_1 - i\delta_1 = \frac{2\delta_1 a_e (\Psi_- + 1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_1}{v_-} \frac{\zeta d\zeta}{(\Psi_- \zeta^2 - 1)(\zeta^2 + 1)} \quad (1.8)$$

Мнимая часть равенства (1.8), содержащего сингулярный интеграл, сводится к тождеству.

Из выражения (1.1) легко получить

$$\xi_-^2 = \frac{\Phi_- - 1}{\Phi_- + \Psi_-}, \quad \Phi_- = \exp \frac{\pi\varphi_-}{q_1} = \exp \int_0^{\tau} \sqrt{1 - \varepsilon\lambda} ds \quad (1.9)$$

Здесь φ_- — действительная координата точки, лежащей на линии CD плоскости комплексного потенциала w_- , s — дуговая абсцисса точки, лежащей на линии CD физической плоскости z .

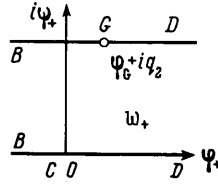
Выделяя из выражения (1.3) мнимую часть, можно получить натуральное уравнение линии разрыва течения

$$\theta(\varepsilon, \lambda) = \vartheta_-[\varepsilon, \xi_-(\varepsilon, \lambda)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon\lambda^*) d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} \quad (1.10)$$

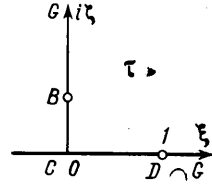
где величины λ^* и ξ_-^* связаны соотношениями (1.4).

2. В данном пункте рассматривается течение в области $BCDGB$. Соответствующая область изменения комплексного потенциала $w_+ = \varphi_+ + i\psi_+$ представляет собой полосу шириной $q_2 = v_B \delta_2$ (фиг. 4), где q_2 — расход вытекающей из канала жидкости, а v_B — скорость течения в бесконечно удаленной точке канала. Пусть $w_+(G) = \varphi_G + iq_2$, где φ_G — действительное число. Область изменения функции w_+ может быть конформно отображена на первый квадрант комплексной плоскости $\tau = \xi + i\zeta$, как показано на фиг. 5. Это отображение осуществляется единственным образом, а величины w_+ и τ связаны соотношением

$$\tau = \left[\frac{\exp(\pi w_+/q_2) - 1}{\exp(\pi w_+/q_2) + \Psi_+} \right]^{1/2} \quad \left(\Psi_+ = \exp \frac{\pi \varphi_G}{q_2} \right) \quad (2.1)$$



Фиг. 4



Фиг. 5

где Ψ_+ — величина, зависящая от ε .

Легко убедиться, что при этом отображении точка B перейдет в точку $i\Psi_+^{-1/2}$. Аналогично предыдущему пункту

$$\omega_+ = \ln \frac{dw_+}{v_2 dz} = \ln \frac{v_+}{v_2} - i\vartheta_+ \quad (2.2)$$

$$\omega_+(\tau) - i\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \ln \frac{v_+}{v_2} \frac{d\xi}{\xi - \tau} \quad (2.3)$$

$$f_+(\varepsilon, \lambda, \xi_+) = 0, \quad f_+(\varepsilon, 1, 0) = 0, \quad f_+(\varepsilon, 0, \pm 1) \quad (2.4)$$

$$\omega_+(i\xi) - i\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1-\lambda) d\xi_+}{\xi_+ - i\xi} = \frac{\xi}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-\lambda) d\xi_+}{\xi_+^2 + \xi^2} \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$b_\varepsilon = \frac{v_B}{n} = \exp \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1-\lambda) d\xi_+}{\xi_+ - i\Psi_+^{-1/2}} = \exp \frac{\Psi_+^{-1/2}}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1-\lambda) d\xi_+}{\Psi_+ \xi_+^2 + 1}$$

$$dz = \frac{1}{n} \exp(-\omega_+) \frac{dw_+}{d\tau} d\tau, \quad \frac{dw_+}{d\tau} = \frac{2v_B \delta_2 (1 + \Psi_+) \tau}{\pi (\Psi_+ \tau^2 + 1) (1 - \tau^2)}$$

$$l_2 + i\delta_2 = \frac{2b_\varepsilon \delta_2 (\Psi_+ + 1)}{\pi} \int_0^1 \frac{v_2}{v_+} \frac{\xi d\xi}{(\Psi_+ \xi^2 - 1) (\xi^2 + 1)} \quad (2.7)$$

$$\xi_+^2 = \frac{\Phi - 1}{\Phi_+ + \Psi_+}, \quad \Phi_+ = \exp \frac{\pi}{b_\varepsilon \delta_2} \sqrt{1 - \lambda} ds \quad (2.8)$$

$$\theta(\varepsilon, \lambda) = \vartheta_+[\varepsilon, \xi_+(\varepsilon, \lambda)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1-\lambda)^* d\xi_+^*}{\xi_+^* - \tau} - \alpha \quad (2.9)$$

Последнее выражение, так же как и выражение (1.10), дает уравнение линии разрыва течения CD .

3. Приравнявая правые части выражений (1.10) и (2.9), а также выделяя действительную часть в выражениях (1.8) и (2.7), можно получить уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon \lambda^*) d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda^*) d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} - \alpha, \quad \begin{matrix} -1 \leq \xi_- \leq 0 \\ 0 \leq \xi_+ \leq 1 \end{matrix} \quad (3.1)$$

$$\frac{2a_\varepsilon(\Psi_- + 1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_1}{v_-} \frac{\xi d\xi}{(\Psi_- \xi^2 - 1)(\xi^2 + 1)} = \sigma_1 \quad (\sigma_1 = l_1/\delta_1) \quad (3.2)$$

$$\frac{2b_\varepsilon(\Psi_+ + 1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_2}{v_+} \frac{\xi d\xi}{(\Psi_+ \xi^2 - 1)(\xi^2 + 1)} = \sigma_2 \quad (\sigma_2 = l_2/\delta_2) \quad (3.3)$$

Дифференцируя соотношения (1.9), можно определить дифференциал дуги CD . Эта же величина может быть определена и из соотношения (2.8). Приравнявая полученные выражения можно получить

$$\frac{a_\varepsilon(\Psi_- + 1)d(\xi_-^2)}{(\Psi_- \xi_-^2 + 1)(1 - \xi_-^2)\sqrt{1 - \varepsilon\lambda}} = \frac{\sigma_0 b_\varepsilon(\Psi_+ + 1)d(\xi_+^2)}{(\Psi_+ \xi_+^2 + 1)(1 - \xi_+^2)\sqrt{1 - \lambda}} \quad \left(\sigma_0 = \frac{\delta_2}{\delta_1} \right) \quad (3.4)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных ξ_- , ξ_+ , Ψ_- и Ψ_+ получено четыре уравнения (3.1)–(3.4). Уравнения (3.1) и (3.4) отождествляют линию CD , как границу областей течения $ACDFA$ и $BCDGB$. Уравнения (3.3) и (3.4) фиксируют на физической плоскости положение точек F и G схода струй.

4. Пусть $\varepsilon = 0$. Согласно (1.7) величина $a_0 = a_{\varepsilon=0} = 1$. Пусть $b_0 = b_\varepsilon$ и $\Psi_\mp^0 = \Psi_\mp$ при $\varepsilon = 0$.

Тогда уравнения (3.1)–(3.4) запишутся в следующей форме:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda^*) d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} = \alpha \quad (4.1)$$

$$\frac{2(\Psi_-^0 + 1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(\Psi_-^0 \xi^2 - 1)(\xi^2 + 1)} = \sigma_1 \quad (4.2)$$

$$\frac{2b_0(\Psi_+^0 + 1)}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_2}{v_+} \frac{\xi d\xi}{(\Psi_+^0 \xi^2 - 1)(\xi^2 + 1)} = \sigma_2 \quad (4.3)$$

$$\frac{(\Psi_-^0 + 1)d(\xi_-^2)}{(\Psi_-^0 \xi_-^2 + 1)(1 - \xi_-^2)} = \frac{\sigma_0 b_0(\Psi_+^0 + 1)d(\xi_+^2)}{(\Psi_+^0 \xi_+^2 + 1)(1 - \xi_+^2)\sqrt{1 - \lambda}} \quad (4.4)$$

Учитывая четность функции λ , уравнение (4.1) можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln(1 - \lambda^*)}{\xi_+^*} \frac{d(\xi_+^{*2})}{\xi_+^{*2} - \xi_+^2} = \frac{2\alpha}{\xi_+}$$

Последнее уравнение представляет собой сингулярное интегральное уравнение первого рода, решение которого сводится к обращению сингулярного интеграла и может быть получено методом Карлемана [7].

Согласно соотношениям (2.4) функция $\ln(1-\lambda)/\xi_+$ ограничена на конце отрезка интегрирования интеграла из предыдущего уравнения и обращается в бесконечность в начале этого отрезка. В этом случае решение предыдущего уравнения единственно и

$$(1-\lambda)^{\pi/2\alpha} = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi_+^2}}{1 + \sqrt{1 - \xi_+^2}} \quad (4.5)$$

Это соотношение устанавливает связь между ξ_+ и λ при $\varepsilon = 0$. Уравнение (4.2) легко интегрируется и

$$\Psi_-^0 = \exp(\pi\sigma_1) \quad (4.6)$$

Подставляя соотношение (4.5) в выражение (2.5), можно получить

$$\frac{v_+}{v_-} = \left(\frac{\sqrt{\xi_+^2 + 1} - 1}{\sqrt{\xi_+^2 + 1} + 1} \right)^{\alpha/\pi} = t^{\alpha/\pi} \quad (4.7)$$

Используя подстановку (4.7), уравнение (4.3) можно представить в виде

$$-\frac{4b_0(\Psi_+^0 + 1)}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{-\pi/\alpha}(1-t)dt}{(t+1)(t-t_0)(t-t_0^{-1})} = \sigma_2, \quad t_0 = (\sqrt{\Psi_+^0 + 1} - \sqrt{\Psi_+^0})^2 \quad (4.8)$$

Для определения Ψ_+^0 из уравнения (4.8) полезно уяснить геометрический смысл уравнения (4.1). Как видно из выражения (2.9), выполнение уравнения (4.1) означает, что линия CD совпадает с положительной частью оси x , и, следовательно, граница области $BCDGB$ состоит из прямых и свободной линий тока. В этом случае область $BCDGB$ на плоскости

$$t = - \left(\frac{dw_+}{u_2 dz} \right)^{\pi/\alpha}$$

представляет собой нижнюю половину единичного круга. Пользуясь методом особых точек, легко получить (N_k — некоторая постоянная)

$$\frac{dw_+}{dt} = \frac{N_1(1-t)dt}{(t+1)(t-b_0^{\pi/\alpha})(t-b_0^{-\pi/\alpha})}, \quad dz = \frac{1}{v_2} \frac{v_2 dz}{dw_+} \frac{dw_+}{dt} dt$$

Интегрируя последнее выражение на отрезке $[0, 1]$ и отделяя действительную и мнимую части, можно получить

$$\sigma_2 + i = N_2 \int_0^1 \frac{t^{-\alpha/\pi}(1-t)dt}{(t+1)(t-b_0^{\pi/\alpha})(t-b_0^{-\pi/\alpha})}, \quad N_2 = \frac{(1+b_0^{\pi/\alpha})^2}{\pi b_0^{\pi/\alpha+1}} \\ \sigma_2 = - \frac{(1+b_0^{\pi/\alpha})^2}{\pi b_0^{\pi/\alpha+1}} \int_0^1 \frac{t^{-\alpha/\pi}(1-t)dt}{(t+1)(t-b_0^{\pi/\alpha})(t-b_0^{-\pi/\alpha})} \quad (4.9)$$

Сравнивая равенства (4.9) и (4.8), легко получить, что последнее выполняется, если $t_0 = b_0^{\pi/\alpha}$. Следовательно

$$\Psi_+^0 = \frac{(1 - b_0^{\pi/\alpha})^2}{4b_0^{\pi/\alpha}} \quad (4.10)$$

Если известна величина b_0 , то величины σ_2 и Ψ_+^0 однозначно определяются по формулам (4.9) и (4.10). Поэтому в дальнейшем удобно предполагать заданным не геометрический параметр σ_2 , а однозначно с ним связанный кинематический параметр b_0 .

Подставляя соотношение (4.5) в уравнение (4.4), можно получить с помощью подстановки $u^2 = (1 - \lambda)^{\pi/2\alpha}$

$$\ln \Phi_- = \ln \frac{\Psi_-^0 \xi_-^2 + 1}{1 - \xi_-^2} = \frac{2\sigma_0 (1 + b_0^{\pi/\alpha})^2}{b_0^{\pi/\alpha-1}} \int_0^{\xi_-} \frac{u^{1-2\alpha/\pi} (1 + u^2) du}{(1 - u^2) (u^2 + b_0^{\pi/\alpha}) (u^2 + b_0^{-\pi/\alpha})} \quad (4.11)$$

Из выражения (4.11) можно определить ξ_- . При $\alpha = \pi/2$ интегралы (4.9) и (4.11) могут быть вычислены аналитически, и в этом случае

$$\sigma_2 = -b_0 - \frac{b_0^2 + 1}{\pi} \ln \frac{1 + b_0}{1 - b_0}$$

$$\Phi_- = \exp \left[2\sigma_0 \left(\arctg \frac{u}{b_0} + b_0^2 \arctg b_0 u + b_0 \ln \frac{1 + u}{1 - u} \right) \right] \quad (4.12)$$

Таким образом, система уравнений (3.1) — (3.4) имеет единственное решение при $\varepsilon = 0$. Исходя из физических представлений, естественно предположить, что существует единственное решение этой системы и при малой величине параметра ε . Предполагая также аналитичность по ε решения системы, можно искать неизвестные величины в виде рядов по степеням малого параметра ε .

5. Для дальнейшего необходимо доказать справедливость формулы Лейбница дифференцирования интеграла по параметру в сингулярном случае (обозначения этого пункта не связаны с остальным изложением). Если функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет всем условиям, налагаемым на подынтегральную функцию в теореме 3 ([⁸] стр. 661) и, кроме того, функции $\varphi(x, y)$ и $\varphi_y(x, y)$ удовлетворяют по x условиям Гельдера с показателем, не меньшим некоторого положительного числа μ , то

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b \frac{\varphi(x, y) dx}{x - t} = \int_a^b \frac{\varphi_y'(x, y) dx}{x - t} \quad (a < t < b) \quad (5.1)$$

где интегралы понимаются в смысле главного значения.

Действительно, интеграл в левой части выражения (5.1) можно представить в виде

$$\int_a^b \frac{\varphi(x, y) dx}{x - t} = \int_a^b \frac{\varphi(x, y) - \varphi(t, y)}{x - t} dx + \varphi(t, y) \int_a^b \frac{dx}{x - t} \quad (5.2)$$

Первое слагаемое есть несобственный интеграл в обычном смысле [⁷] и допускает применение формулы Лейбница, поскольку его подынтегральная функция может быть представлена в виде двух сомножителей

$$\frac{\varphi(x, y) - \varphi(t, y)}{\text{sign}(x - t) |x - t|^\mu} \frac{1}{|x - t|^{1-\mu}}$$

первый из которых есть функция, непрерывная по x и имеющая непрерывную по совокупности аргументов x и y производную по y , а второй сомножитель абсолютно интегрируем по x ([8], стр. 669). Дифференцируя по y равенство (5.2) и объединяя слагаемые в правой части, можно получить требуемую формулу.

6. Для решения системы (3.1) — (3.4) при малых значениях ε необходимо разложить в ряд по степеням ε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \varepsilon^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \theta_{\mp}^{(k)} \varepsilon^k \quad (6.1)$$

$$\theta_{\mp}^{(k)} = \left(\frac{d^k \theta_{\mp}}{d\varepsilon^k} \right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \xi_{\mp}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_{\mp}} \right)^k \theta_{\mp} \Big|_{\varepsilon=0}$$

правую и левую части уравнения (3.1). При этом, как следует из (4.10), величина $\theta_0 = 0$. Частные производные по ε и по $\xi_{\mp}$ могут быть вычислены с помощью формулы (5.1) и формулы дифференцирования сингулярного интеграла [7]. Поскольку сингулярный интеграл на концах отрезка интегрирования удовлетворяет условию Гёльдера с положительным показателем, меньшим 1, производные по $\xi_{\mp}$ существуют только внутри отрезка интегрирования. Учитывая соотношения (1.4) и (2.4) и разлагая функцию $\ln(1 - \varepsilon \lambda)$ в ряд по степеням ε , из (6.1) при $\xi_{\mp}^2 < 1$ можно получить

$$\theta_k = \frac{-1}{2\pi(k-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \xi_-}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_-} \right)^{k-1} \int_{-1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n-1} \lambda^{*n}}{n} \frac{d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} \quad (6.2)$$

$$\theta_k = \frac{1}{2\pi k!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \xi_+}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \xi_+} \right)^k \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda^*) d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} \quad (6.3)$$

Приравнивая величины θ_k , полученные с помощью выражений (6.2) и (6.3), можно получить уравнение, содержащее частные производные λ по ε до порядка k . Для $k = 1$ из выражения (6.2) следует

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda^* d\xi_-^*}{\xi_-^* - \xi_-} \quad (6.4)$$

Интеграл (6.4) может быть вычислен, если воспользоваться соотношением (4.11), связывающим величины λ и ξ_- при $\varepsilon = 0$. Поскольку величина λ обращается в нуль на концах отрезка интегрирования, интеграл (6.4) определен и на концах этого отрезка.

Из уравнения (4.1) следует, что при $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial^k}{\partial \xi_+^k} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \lambda^*) d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+} = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \dots) \quad (6.5)$$

Тогда из выражения (6.3) при $k = 1$ можно получить

$$\theta_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda^* / \partial \varepsilon}{1 - \lambda^*} \frac{d\xi_+^*}{\xi_-^* - \xi_+} \quad (6.6)$$

Как следует из предыдущего, функции $\lambda(\xi_{\mp})$ четны. Поэтому интегралы (6.4) и (6.6) есть нечетные функции своих аргументов и могут быть приравнены внутри всего отрезка интегрирования. Правая часть равенства (6.4) уже определена. Поэтому равенство (6.6) можно рассматривать как уравнение для определения функции $\partial\lambda/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon=0$. В силу соотношений (2.4) величина $\partial\lambda/\partial\varepsilon$ обращается в нуль на концах отрезка интегрирования. Следовательно, решение сингулярного интегрального уравнения (6.6) ограничено в этих точках и может быть представлено в виде [7]

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} = \frac{2(1-\lambda)\sqrt{1-\xi_+^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\theta_1^*}{\sqrt{1-\xi_+^{*2}}} \frac{d\xi_+^*}{\xi_+^* - \xi_+}, \quad \int_{-1}^1 \frac{\theta_1 d\xi_+}{\sqrt{1-\xi_+^2}} = 0 \quad (6.7)$$

Как легко получить из выражения (6.4), величина θ_1 есть нечетная функция от ξ_- , а следовательно, и от ξ_+ , что и обеспечивает выполнение дополнительного условия, содержащегося в решении (6.7). Плотность сингулярного интеграла в выражении (6.7) имеет полюс порядка $1/2$ на концах отрезка интегрирования. Следовательно, сам интеграл или ограничен в этих

$\frac{b_0}{c_2}$	$\sigma_1 \backslash \sigma_0$	$-\infty$	-0.75	-0.50	-0.25	0
$\frac{0.2}{-0.334}$	0.25	0.082	0.079	0.076	0.071	0.062
	0.50	0.103	0.099	0.096	0.090	0.080
	1.00	0.083	0.081	0.078	0.072	0.064
	2.00	-0.166	-0.166	-0.167	-0.168	-0.170
$\frac{0.4}{-0.712}$	0.25	0.053	0.052	0.050	0.047	0.042
	0.50	0.038	0.037	0.036	0.034	0.031
	1.00	-0.098	-0.102	-0.102	-0.102	-0.099
	2.00	-0.811	-0.807	-0.802	-0.794	-0.779
$\frac{0.6}{-1.522}$	0.25	0.036	0.035	0.034	0.033	0.030
	0.50	-0.017	-0.017	-0.016	-0.016	-0.014
	1.00	-0.304	-0.302	-0.300	-0.295	-0.286
	2.00	-1.590	-1.583	-1.574	-1.559	-1.531
$\frac{0.8}{-1.935}$	0.25	0.021	0.020	0.020	0.020	0.020
	0.50	-0.080	-0.079	-0.078	-0.075	-0.069
	1.00	-0.567	-0.563	-0.559	-0.551	-0.535
	2.00	-2.648	-2.635	-2.627	-2.602	-2.562
$\frac{1.0}{-\infty}$	0.25	0.004	0.004	0.004	0.005	0.006
	0.50	-0.162	-0.161	-0.159	-0.153	-0.146
	1.00	-0.926	-0.920	-0.914	-0.903	-0.882
	2.00	-4.123	-4.092	-4.091	-4.045	-3.977

точках или имеет полюс, порядок которого меньше $1/2$. Таким образом, величина $\partial\lambda/\partial\varepsilon$ обращается в нуль на концах отрезка интегрирования, т. е. решение уравнения (6.6) справедливо на всем отрезке интегрирования.

Легко показать, что в силу равенства (6.5) уравнения для определения функций $(\partial^k\lambda/\partial\varepsilon^k)_{\varepsilon=0}$ при $k=2, 3, 4, \dots$ будут также сингулярными интегральными уравнениями первого рода, и эти функции могут быть получены точно так же, как определена функция $(\partial\lambda/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}$. Дифференцируя по ε соотношения (1.4) и (2.4), а также уравнения (3.2) и (3.3) и воспользовавшись найденными выше функциями $(\partial^k\lambda/\partial\varepsilon^k)_{\varepsilon=0}$, $k=0, 1, 2, \dots$, можно определить неизвестные $\xi_{\mp}$ и $\Psi_{\mp}$ системы (3.1) — (3.4) в виде рядов по степеням ε .

7. Для приложений рассматриваемой задачи наибольший интерес представляет определение асимптотического угла θ_D отходящей струи. Поскольку в точке D соответствует $\xi_- = -1$, из выражения (1.10) можно получить

$$\theta_D = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \varepsilon \lambda) d\xi_-}{\xi_- + 1} \quad (7.1)$$

Величина θ_D может быть определена из выражения (7.1) в виде ряда по степеням ε

$$\theta_D = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{kD} \varepsilon^k, \quad \theta_{kD} = \frac{1}{2\pi k!} \int_{-1}^1 \left[\frac{\partial^k \ln(1 - \varepsilon \lambda)}{\partial \varepsilon^k} \right]_{\varepsilon=0} \frac{d\xi_-}{\xi_- + 1} \quad (7.2)$$

$$\theta_{1D} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda d\xi_-}{\xi_- + 1}, \quad \theta_{2D} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial \lambda}{\partial \varepsilon} \frac{d\xi_-}{\xi_- + 1} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\lambda^2 d\xi_-}{\xi_- + 1}$$

Функция $\lambda(\varepsilon, \xi_-)$ и ее производные по ε обращаются в нуль на концах отрезка интегрирования. Поэтому несобственный интеграл, входящий в выражение (7.2), сходится при любом k .

Можно показать, что величина θ_{1D} совпадает с величиной θ_D , полученной в работе [6] приближенным методом. Таким образом, используемый там метод позволяет определить величину θ_D в первом приближении. Для вычисления величины θ_{1D} можно воспользоваться приведенной в этой работе таблицей. Определение величины θ_{2D} сводится к вычислению однократных и тройных интегралов. Результаты вычислений, соответствующие $\alpha = \pi/2$ и тем же соотношениям геометрических параметров σ_0 , σ_1 и σ_2 , что и в работе [6], приведены в таблице.

Поступило 27 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
2. Иванов Н. Н. Теоретическое исследование взаимодействия двух струй, вытекающих из каналов с прямолинейными стенками. В сб. «Кибернетика и управление», М., «Наука», 1967.
3. Cronin R. T. Hydrodynamic study of the free-jet class of fluid-jet amplifiers. Proc. Fluid Amplification Sympos, Harry Diamond Labs, Army Material Command, Washington D. C., May 1964, vol. 1, pp. 157—178.
4. Владимиров Ф. С. Соударение струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, Изд. 3. М., «Наука», 1965.
6. Белоцерковский П. М. Задача о столкновении двух струй, вытекающих из каналов с параллельными стенками при разных скоростях на свободных поверхностях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи, Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, Изд. 6. М., «Наука», 1966.