№ 5 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1970

ИЗЛУЧЕНИЕ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

В. Н. КОЖИН

(Ленинград)

Теория излучения звука сферой в идеальной среде подробно изложена в работах [1–3]. Поступательное колебательное движение сферы в вязкой несжимаемой жидкости рассмотрено в работах [4, 5]. Приводится точное решение задачи об излучении звука шаром, колеблющимся в вязкой среде.

Поместим шар радиуса a в безграничную однородную вязкую сжимаемую среду с плотностью ρ и с кинематической вязкостью ν и предположим, что центр шара колеблется (осциллирует) с частотой ω со скоростью $\operatorname{Re}\{V_0 \exp(i\omega t)\}$, являющейся гармонической функцией времени t. Для определения возникающего при этом движения вязкой среды введем сферические координаты r, θ, ψ с полярной осью вдоль направления колебаний.

Будем предполагать, что скорость колебаний шара мала по сравнению со скоростью распространения звука в вязкой среде, что эквивалентно предположению о малости амплитуды колебаний шара по сравнению с длиной продольной звуковой волны, создаваемой шаром. Это условие позволяет линеаризовать общие уравнения гидродинамики для случая распространения звуковых волн в вязкой среде. Кроме этого, амплитуда колебаний шара предполагается также малой и по сравнению с радиусом шара. Это условие позволяет вблизи поверхности колеблющегося шара пренебречь нелинейным инерционным членом $(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}$ в уравнении движения вязкой среды по сравнению с членом $\partial\mathbf{V} / \partial t$ (при этом следует заметить, что число Рейнольдса для рассматриваемой задачи отнюдь не должно быть малым).

Легко показать, что линеаризованные при сделанных выше предположениях основные уравнения гидродинамики: уравнения движения вязкой сжимаемой среды, непрерывности и физического состояния — будут удовлетворены, если колебательную скорость частиц вязкой среды $\mathbf{V}$ и давление p взять в виде

$$\mathbf{V} = -\operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}, \qquad p = p_0 + i\omega\rho\varphi - {}^4/_3\nu\rho\Delta\varphi \tag{1}$$

где p_0 есть давление в невозмущенном (равновесном) состоянии, а скалярный потенциал скоростей φ и векторный потенциал вихрей $\mathbf{\Phi}$ являются решениями уравнений

$$(\Delta + k^2)\varphi = 0, \qquad (\Delta + h^2)\mathbf{\Phi} = 0 \tag{2}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{4i\omega\nu}{3c^2}\right)^{-1}, \quad h^2 = -\frac{i\omega}{\nu}, \quad h = (1-i)\beta, \quad \beta = \left(\frac{\omega}{2\nu}\right)^{1/2} \tag{3}$$

Здесь и далее k — волновое число продольных волн в вязкой среде, c — скорость звука в отсутствие вязкости, h — волновое число поперечных (вязких) волн, β^{-1} — толщина вязкого пограничного слоя, i — мнимая единица.

В силу симметрии рассматриваемой задачи функции φ и $\Phi = \Phi_\psi = \Phi$ не будут зависеть от азимутального угла ψ и тангенциальная составляющая колебательной скорости по оси ψ всюду будет равна нулю.

Общие решения уравнений (2) в случае волн, расходящихся от поверхности сферы, имеют вид (временной множитель $\exp(i\omega t)$ здесь и далее подразумевается)

$$\varphi = A_n f_n(kr) P_n(\cos\theta), \qquad \Phi = B_n f_n(hr) P_n^{(1)}(\cos\theta) \tag{4}$$

Здесь f_n — сферическая функция Ханкеля второго рода порядка n, $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра первого рода, $P_n^{(1)}(\cos\theta)$ — присоединенный полином Лежандра первого рода, A_n, B_n — неизвестные постоянные.

Для определения неизвестных постоянных напишем граничные условия, заключающиеся в равенстве скоростей шара и вязкой среды на поверхности шара

$$\vartheta_r(a) = V_0\cos\theta, \qquad \vartheta_\theta(a) = -V_0\sin\theta$$

где ϑ_r, ϑ_θ — соответственно радиальная и тангенциальная составляющие колебательной скорости вязкой среды.

Нетрудно видеть, что граничные условия будут удовлетворены, если в выражениях (4) положить $n = 1$; тогда для φ и Φ с учетом найденных значений неизвестных постоянных будем иметь

$$\varphi = A_1 f_1(kr)\cos\theta, \qquad \Phi = B_1 f_1(hr)\sin\theta \tag{5}$$

$$A_1 = -Q\{haf_1'(ha) - f_1(ha)\}V_0 a, \qquad B_1 = Q\{kaf_1'(ka) - f_1(ka)\}V_0 a$$

$$Q^{-1} = kaf_1'(ka)\{haf_1'(ha) + f_1(ha)\} - 2f_1(ha)f_1(ka)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по аргументу.

Так как

$$f_1(z) = \left(-\frac{1}{z} + \frac{i}{z^2}\right)e^{-iz}, \qquad f_1'(z) = \left(\frac{i}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{2i}{z^3}\right)e^{-iz}$$

то, используя эти формулы для вычисления значений A_1 и B_1, получаем

$$A_1 = -Y(-3i + 3iha + ih^2a^2)k^2a^3V_0e^{iha},$$

$$B_1 = Y(-3i + 3ka + ik^2a^2)h^2a^3V_0e^{iha} \tag{6}$$

$$Y^{-1} = k^2a^2(1 + iha) + (2 + 2ika - k^2a^2)h^2a^2$$

Для давления и колебательной скорости найдем из (1)

$$p = p_0 - YV_0a^3r^{-2}(i - kr)(i\omega\rho + {}^4/{}_3\nu\rho k^2)(ih^2a^2 + 3ha - 3i)e^{-i(kr-ka)} \tag{7}$$

$$\vartheta_r = YV_0a^3r^{-3}\cos\theta[(ih^2a^2 + 3ha - 3i)(ik^2r^2 + 2kr - 2i)e^{-i(kr-ka)} + $$
$$+ 2(ik^2a^2 + 3ka - 3i)(i - hr)e^{-i(hr-ha)}]$$

$$\vartheta_\theta = YV_0a^3r^{-3}\sin\theta\,[(ih^2a^2 + 3ha - 3i)(i - kr)e^{-i(kr-ka)} -$$
$$- (ik^2a^2 + 3ka - 3i)(ih^2r^2 + hr - i)e^{-i(hr-ha)}]$$

Отсюда легко видеть, что члены в выражениях (7), содержащие $\exp(-ihr)$, будут заключать в себе множитель $\exp(-\beta r)$ и, следовательно, будут очень малы на расстояниях r, больших по сравнению с линейной величиной β^{-1}. Движение вязкой среды поэтому практически будет свободно от вихрей, т. е. потенциальным, уже на расстоянии, равном сравнительно небольшому кратному толщины вязкого пограничного слоя.

Учитывая сказанное выше, на больших расстояниях от шара, т. е. при $|kr| \gg 1$, получаем

$$
\begin{aligned}
p &= p_0 + YV_0ka^3r^{-1}\cos\theta(i\omega\rho + {}^4/_3\nu\rho k^2)(ih^2a^2 + 3ha - 3i)e^{-i(kr-ka)} \\
\vartheta_r &= YV_0k^2a^3\cos\theta(ih^2a^2 + 3ha - 3i)r^{-1}e^{-i(kr-ka-{}^1/_2\pi)} \\
\vartheta_\theta &= -YV_0ka^3\sin\theta(ih^2a^2 + 3ha - 3i)r^{-2}e^{-i(kr-ka)}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из формул (8) следует, что тангенциальная составляющая колебательной скорости v_θ уменьшается с расстоянием, как r^{-2}, и на больших расстояниях от шара становится весьма малой по сравнению с радиальной составляющей v_r.

Дальнейший расчет звукового поля, т. е. отделение действительных частей в выражениях (8), не представляет особого интереса и в случае необходимости выполняется без затруднений.

Обратимся поэтому к определению обеих компонент полного сопротивления излучения шара. По определению, сопротивление излучения есть отношение интегральной реакции среды, взятой с обратным знаком, к скорости колебаний шара.

Интегральная реакция среды X равна силе, действующей со стороны вязкой среды на колеблющийся шар. Очевидно, что эта сила направлена противоположно скорости колебаний шара, а ее абсолютная величина найдется суммированием по поверхности шара составляющих напряжений, параллельных полярной оси, т. е. выразится интегралом

$$X = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (-p\cos\theta + \sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)_{r=a}\sin\theta\, d\theta \tag{9}$$

где компоненты тензора вязких напряжений σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ даются формулами [5]

$$\sigma_{rr} = \nu\rho\left\{2\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}v_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\right)\right\}.$$

$$\sigma_{r\theta} = \nu\rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

Выполнив интегрирование (9), получим

$$X = -{}^1/_3\pi\rho a^2 i\omega\{A_1f_1(ka) - 2B_1f_1(ha)\} \tag{10}$$

Если действительную часть выражения (10), взятого с обратным знаком, домножить на действительную часть скорости колебаний шара и взять среднее значение, то получим энергию, которая должна быть израсходована в единицу времени, для того чтобы поддерживать заданное колебательное движение шара.

Очевидно, что часть этой энергии будет попеременно переходить от шара в среду и наоборот (эта энергия называется связанной); остальная часть энергии необратимо расходуется на создание акустического возмущения, распространяющегося от поверхности шара в виде энергии продольных и поперечных (вязких) волн. При этом следует заметить, что поперечные волны возникают в результате трения вязкой среды о поверхность колеблющегося шара, так что энергия вязких волн равна работе, затрачиваемой на преодоление сил внутреннего трения.

В случае распространения звуковых волн в вязкой жидкости отношение $\omega\nu/c^2$ чрезвычайно мало вплоть до частот порядка сотен килогерц, так что с большим приближением получим из (3), что

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{2}{3}i\omega\nu/c^2\right)$$

и даже по этой же причине будем считать k действительным и равным ω / c. Заметим также, что отношение $ka / \beta a$, приблизительно равное $(\nu\omega / 2c^2)^{1/2}$, следует считать малым.

Для акустики наиболее интересен случай, когда радиус шара велик по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя, т. е. когда $\beta a \gg 1$. Подставляя в этом случае формулу (6) в (10) и удерживая только высшие степени βa, получаем приближенно

$$X = -\frac{4}{3}\frac{\pi\rho a^3 i\omega V_0}{16+4k^4a^4}\{8+4k^2a^2+\beta^{-1}a^{-1}(36+8k^2a^2-8k^3a^3+8k^4a^4)+ \\ +\beta^{-2}a^{-2}(-18k^2a^2-8k^3a^3+4k^4a^4)-i[4k^3a^3+\beta^{-1}a^{-1}(36+12k^2a^2+ \\ +12k^3a^3+4k^4a^4)+\beta^{-2}a^{-2}(36+12k^2a^2-18k^3a^3+4k^4a^4)]\} \tag{11}$$

Рассмотрим два случая.

1°. Пусть $ka \ll 1$, т. е. радиус шара меньше длины волны излучаемого звука (случай длинных волн). Удерживая в (11) только низшие степени ka, для сопротивления излучения z_R будем иметь приближенно

$$z_R = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\omega\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{4\beta a}\right)i+\frac{1}{4}k^3a^3\left(1+\frac{3}{\beta a}\right)+\frac{9}{4\beta a}\right\} \tag{12}$$

Для идеальной жидкости $\nu = 0$ и, следовательно, $\beta a = \infty$. В этом случае сопротивление излучения из (12) примет вид

$$z_R = {}^1/_3\pi\rho a^6k^3\omega + i\omega^2/_3\pi\rho a^3 \tag{13}$$

т. е. точно такой, как если бы пренебречь вязкостью с самого начала [1–3].

Из сравнения (13) и (12) видим, что сопротивление излучения в вязкой жидкости, кроме членов присутствующих, как если бы излучение происходило в идеальную среду, содержит дополнительные члены, зависящие от вязкости.

Первый член в (12) определяет собой соколеблющуюся массу, которая при излучении в вязкую жидкость по величине составляет $^1/_2+^9/_4\beta a$ часть вытесненной шаром жидкости вместо $^1/_2$, как это имело место в идеальной жидкости.

Увеличение соколеблющейся массы физически объясняется тем, что удерживаемые вблизи поверхности шара силами внутреннего трения частицы вязкой жидкости ускоряется синфазно с ускорением шара; инерциальная реакция этих частиц проявляется как некоторая дополнительная соколеблющаяся масса.

Исходя из вязкостной поправки к вытесненной шаром жидкости, нетрудно показать, что практически все частицы вязкой жидкости в пределах $^3/_2$ толщины вязкого пограничного слоя колеблются вместе с шаром, т. е. эффективный инерциальный радиус шара при излучении в вязкую жидкость на длинных волнах равен $a+(^3/_2)\beta^{-1}$.

Второй член в (12) представляет собой сопротивление излучения продольных волн; он, как и в случае идеальной жидкости, есть член высшего порядка по ka.

Увеличение активной части сопротивления излучения продольных волн в вязкой жидкости по сравнению с идеальной физически можно объяснить тем, что вследствие прилипания к жесткой поверхности шара частиц вязкой жидкости, радиус шара как бы увеличивается. Исходя из вязкостной поправки в активной части сопротивления излучения продольных волн в вязкой жидкости, можно сделать вывод, что практически «жестко» прилипают к поверхности шара только те частицы, которые расположены в пределах $^1/_2$ толщины вязкого пограничного слоя, т. е. эффективный излучающий радиус шара на длинных волнах равен $a+(^1/_2)\beta^{-1}$.

Третий член в (12), отсутствующий при излучении в идеальную жидкость, представляет собой активную часть сопротивления излучения поперечных (вязких) волн, но его можно понимать и как сопротивление трения, поскольку вязкая волна существует только вблизи поверхности шара.

В самом деле комплексная скорость распространения вязких волн c_t, определяемая из равенства $(\omega / c_t)^2 = h^2$, связана с фазовой скоростью c_p и амплитудным коэффициентом затухания вязких волн α соотношением $1 / c_t = 1 / c_p - i\alpha / \omega$.

Отсюда следует, что

$$c_p = (2\nu\omega)^{1/2} = \omega / \beta, \qquad \alpha = (\omega / 2\nu)^{1/2} = \beta$$

Таким образом, видим, что амплитуда вязкой волны, распространяющейся от поверхности шара со скоростью ω / β, очень быстро убывает, уменьшаясь на протяжении одной длины волны в отношении $e^{-2\pi}$, т. е. $1/535$. Это, кстати, подтверждает ранее сделанные выводы о потенциальности звукового поля шара за пределами вязкого пограничного слоя.

Легко видеть, что сопротивление излучения вязких волн, равное $3\pi a^2 \rho c_p$, прямо пропорционально волновому удельному сопротивлению среды для вязких волн и квадрату радиуса шара.

Отношение первого члена ко второму и третьему в (12) порядка величины $(ka)^{-3}$ и βa соответственно. Отсюда следует, что на длинных волнах вся энергия, сообщаемая шару, в основном расходуется на перемещение жидкости, вытесняемой шаром, с одной его стороны на другую.

2°. Пусть теперь $ka \gg 1$, т. е. радиус шара больше длины волны излучаемого звука (случай коротких волн). Удерживая в (11) только высшие степени ka, для полного сопротивления излучения получаем приближенно

$$z_B = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\omega \left\{\left(\frac{1}{k^2a^2} + \frac{1}{\beta a}\right)i + \frac{1}{ka}\left(1 + \frac{3}{\beta a}\right) + \frac{1}{\beta a}\right\} \tag{14}$$

Для идеальной жидкости эта формула перепишется в виде

$$z_R = \frac{4}{3}\pi a^2 \rho c + i\omega \frac{4\pi\rho a^3}{3k^2a^2} \tag{15}$$

Сравнивая (14) и (15), видим, что на коротких волнах в вязкой жидкости к соколеблющейся массе, появляющейся благодаря сжимаемости жидкости и пропорциональной $a\omega^{-1}$, добавляется масса жидкости, присоединенная силами вязкого трения и пропорциональная $a^2\omega^{1/2}$. Таким образом, с увеличением частоты колебаний и радиуса шара значение вязкого трения, как и следовало ожидать, возрастает; при этом, однако, нужно следить, чтобы отношение $\omega\nu / c^2$ оставалось малым.

Определить, какая из упомянутых выше соколеблющихся масс больше, невозможно до тех пор, пока не заданы числовые значения определяющих их параметров. Приравняв эти массы, найдем, что на частоте ω_0, определяемой из уравнения

$$\omega_0 = c\left(\frac{c}{2a^2\nu}\right)^{1/3}$$

они равны. На частоте, ниже чем ω_0, больше соколеблющаяся масса, обусловленная сжимаемостью, а на частоте, выше чем ω_0, больше масса, присоединенная вязким трением. Для оценки порядка граничной частоты приведем следующий пример. Для шара радиуса 5 *см*, осциллирующего в касторовом масле ($c = 1.5 \cdot 10^5$ *см/сек*, $\nu = 10$ *см²/сек*) и в воде ($c = 1.5 \cdot 10^5$ *см/сек*, $\nu = 0.018$ *см²/сек*) граничная частота ω_0 соответственно равна 10^6 *гц* и $8 \cdot 10^6$ *гц*. Соответствующие отношения $\omega\nu / c^2$ при этом равны $4 \cdot 10^{-4}$ и $7 \cdot 10^{-6}$, т. е. достаточно малы.

Второй член в (14) представляет собой активную часть сопротивления излучения продольных волн. Увеличение сопротивления излучения продольных волн в вязкой жидкости по сравнению с идеальной было объяснено раньше. Здесь же мы заметим, что эффективный излучающий радиус шара в случае коротких волн равен $a + (3/2)\beta^{-1}$.

Наконец, последний член в (14) дает активную часть сопротивления излучения вязких волн. Легко видеть, что отношение второго члена ко всем остальным много больше единицы. Отсюда следует, что вся энергия, сообщаемая шару, в этом случае в основном расходуется на излучение продольных волн.

Остается рассмотреть случай, когда радиус шара мал по сравнению с толщиной вязкого пограничного слоя, т. е. когда $\beta a \ll 1$ (случай очень медленных колебаний или когда радиус шара очень мал). При этом следует заметить, что в тех случаях, когда значение βa невелико, значение ka необходимо должно быть мало.

Если βa мало, то приближенный способ вычислений силы реакции вязкой жидкости становится утомительным, но, очевидно, малость ka означает, что движение жидкости, возмущаемой колеблющимся шаром, будет происходить практически так, как если бы она была несжимаемой ($ka = 0$). Для несжимаемой жидкости вычисления значительно упрощаются, при этом из (10) при произвольном значении βa получаем

$$X = -\frac{4}{3}\pi\rho a^3 i\omega V_0 \left\{\frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a} - \frac{9i}{4\beta a}\left(1 + \frac{1}{\beta a}\right)\right\} \tag{16}$$

что находится в соответствии с результатами работ [4, 5].

Нетрудно заметить, что если в выражении (11) положим $ka = 0$, то воспроизведем результат (16) с той оговоркой, что им можно пользоваться лишь при $\beta a \gg 1$. После введения временного множителя выражение (16) равносильно следующему: (17)

$$X = -\frac{4}{3}\pi\rho a^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a}\right)\frac{d}{dt} V_0 e^{i\omega t} - 3\pi\rho a^3\omega \left(\frac{1}{\beta a} + \frac{1}{\beta^2 a^2}\right) V_0 e^{i\omega t}$$

Первый член дает поправку на инерцию шара, второй — пропорциональный скорости колебаний — определяет результирующую силу трения. Если период колебаний шара $2\pi / \omega$ сделается бесконечно большим ($\omega = 0$), то формула (17) приведется к виду

$$X = -6\pi\rho a \nu V_0$$

так как $\beta = (\omega / 2\nu)^{1/2}$, этот результат совпадает с известной формулой Стокса для силы сопротивления, испытываемой шаром, медленно движущимся в вязкой несжимаемой жидкости с постоянной скоростью V_0, т. е. при малых числах Рейнольдса. Действительно, число Рейнольдса для рассматриваемой задачи есть $R = \omega\xi a / \nu$, где ξ — амплитуда колебаний шара, скорость шара порядка величины $\omega\xi$. Тогда из условия, что $\beta a \ll 1$ (а следовательно, и $\beta^2 a^2 \ll 1$) и $\xi \ll a$ следует, что $R \ll 1$. Заметим, кстати, что в случае, когда $\beta a \gg 1$ и $\xi \ll a$ число Рейнольдса, вообще говоря, может принимать любые значения.

При очень высоких частотах отношение $\omega\nu / c^2$ уже нельзя считать малым, и волновое число продольных волн k будет комплексным. Однако и в этом случае следует ожидать, что все полученные результаты в основном останутся в силе, а комплексность волнового числа больше всего скажется в том, что давление и колебательная скорость на больших расстояниях от шара будут изменяться по законам затухающих колебаний.

Когда длина волны звука почти одинакова с радиусом шара, возникают сложные явления интерференции, и анализ волнового движения вязкой среды, возмущаемой колеблющимся шаром, становится затруднительным.

Поступило 5 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Морз Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
2. Рэлей. Теория звука, т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
3. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
5. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.