

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ОКОЛОЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ С РАЗРЫВОМ

И. БИЙБОСУНОВ, А. РЫСКУЛОВ

(Фрунзе)

Рассматривается плоскопараллельное околозвуковое течение со скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения, причем скачок считается искривленным. А впереди скачка уплотнения в сверхзвуковой зоне расположена линия разрыва. Задача решается методом неопределенных коэффициентов.

В 1955 году Ф. И. Франклем теоретически был построен пример плоского околозвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению, со скачком уплотнения [1]. Причем скачок считается прямым, а передняя половина линии тока, проходящая через конец скачка уплотнения, совпадает со звуковой линией. Впоследствии этот пример был обобщен И. Бийбосуновым [2]. Он построил течение, сверхзвуковая зона которого замыкается искривленным скачком уплотнения. При этом был применен метод малого параметра, что позволило преодолеть трудность, связанную с одновременным и точным удовлетворением всех условий на криволинейной ударной волне. Однако эти примеры имели некоторый недостаток, сущность которого состоит в том, что в сверхзвуковой области образуется небольшая полоса, где скорость становится трехзначной. Эта полоса ограничена двумя линиями L_1, L_2 , которые оканчиваются в конце скачка уплотнения и там соприкасаются с ним. Чтобы устранить эту местную трехзначность, нужно ввести дополнительную линию разрыва скоростей L , которую строим следующим образом.

Берется какая-либо линия тока $\psi = \text{const} < 0$. Каждая такая линия имеет по точке возврата на линиях L_1, L_2 , а между ними точку самопересечения. Геометрическое место точек самопересечения и есть линия L . Эта дополнительная линия разрыва будет не скачком уплотнения, а скачком разрежения. Строго говоря, это противоречит второму началу термодинамики. Но в данном приближении это обстоятельство не играет роли, если считать скачок нормальной скорости на линии L величиной первого порядка малости, то скачок энтропии будет третьего порядка малости.

Скачок разрежения L следует рассматривать как схематизацию узкого пучка непрерывных волн разрежения, и необходимо проверить выполнение на ней всех условий искривленного скачка, вытекающих из законов сохранения.

Однако в случае примера с прямым скачком уплотнения на линии разрыва условия совместности выполняются приближенно [3], с точностью порядка 1.2%.

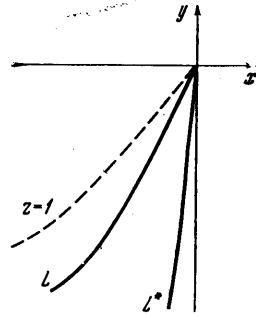
В данной работе построено плоскопараллельное течение искривленным скачком уплотнения L^* , а впереди него содержится линия разрыва, причем все условия искривленного скачка полностью выполняются на линии разрыва L и на скачке уплотнения L^* (см. фиг. 1).

Функция тока и потенциал скорости в отдельности удовлетворяют уравнениям [4]

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (1)$$

Здесь θ — угол наклона скорости, η — функция скорости, ψ — функция тока, ϕ — потенциал скорости.

Как отмечено выше, переменностью энтропии и, следовательно, вихрями за скачком уплотнения пренебрегается, что возможно вблизи критической скорости.



Фиг. 1

Функцию тока и потенциал скорости в дозвуковой области будем искать в виде

$$\psi = \psi_1 = \eta^4 [f(-\theta^2/\eta^3) + \varepsilon g(-\theta/\eta^3)] \quad (2)$$

$$\varphi = \varphi_1 = \eta^{9/2} [f^0(-\theta^2/\eta^3) + \varepsilon g^0(-\theta/\eta^3)] \quad (3)$$

Скачок уплотнения и линия разрыва L в плоскости $\theta\eta$ отображаются в виде следующих кривых:

соответственно на сверхзвуковой и дозвуковой сторонах скачка уплотнения

$$\frac{3}{2} \frac{\theta_1}{(-\eta)^{3/2}} = h_1, \quad \frac{3}{2} \frac{\theta_2}{\eta^{3/2}} = h_2 \quad (4)$$

соответственно на левой и правой сторонах линии разрыва L

$$\frac{3}{2} \frac{\bar{\theta}_1}{(-\bar{\eta}_1)^{3/2}} = K_1, \quad \frac{3}{2} \frac{\bar{\theta}_2}{(-\bar{\eta}_2)^{3/2}} = K_2 \quad (5)$$

На характеристике, исходящей из начала координат, имеем

$$-\frac{9}{4} \frac{\theta_2}{\eta^3} = 1 \quad (6)$$

Уравнения (2) и (3) имеют место также в точках плоскости $\theta\eta$, расположенных выше характеристики (6); ниже этой характеристики

$$\psi = \psi_2 = \eta^4 [\alpha f(-\theta^2/\eta^3) + \beta g(-\theta/\eta^3)] \quad (7)$$

$$\varphi = \varphi_2 = (-\eta)^{9/2} [\alpha f^0(-\theta^2/\eta^3) + \beta g^0(-\theta/\eta^3)]$$

в области между скачком уплотнения L^* и линией разрыва L

$$\psi = \psi_3 = \eta^4 [f(-\theta^2/\eta^3) + \varepsilon g(-\theta/\eta^3)] \quad (8)$$

$$\varphi = \varphi_3 = (-\eta)^{9/2} [f^0(-\theta^2/\eta^3) + \varepsilon g^0(-\theta/\eta^3)]$$

При прохождении через характеристику (6) функция тока должна меняться непрерывно, т. е.

$$\alpha f(1) + \beta g(1) = f(1) + \varepsilon g(1) \quad (9)$$

Здесь f и g , а также f^0 и g^0 — гипергеометрические функции, а именно (10.1)

$$f(z) = -F(-1, -4/3, 1/2, z), \quad f^0(z) = {}^3/3c(-z)^{1/2}F(-1/3, -1, 3/2, z)$$

$$g(z) = (-z)^{1/2}F(-1/2, -5/6, 3/2, z), \quad g^0(z) = {}^1/3cF(-3/2, -5/6, 1/2, z)$$

между скачком уплотнения L^* и линией разрыва L (10.2)

$$f(z) = -F(-2, -8/3, -11/6, m), \quad f^0(z) = -{}^5/9cF(-3, -5/3, -11/6, m)$$

$$g(z) = m^{17/6}F(1/6, 5/6, 23/6, m), \quad g^0(z) = -cm^{17/6}F(-1/6, 7/6, 23/6, m)$$

между характеристикой и линией разрыва L

$$\begin{aligned} f(z) &= -F(-1, -^{4/3}, ^{1/2}, z), & f^0(z) &= -^{8/3}cF(-^{1/3}, -1, ^{3/2}, z) \\ g(z) &= -\sqrt{3}F(-^{1/2}, -^{5/6}, ^{3/2}, z), & g^0(z) &= -^{1/3}\sqrt{3}cF(-^{3/2}, -^{5/6}, ^{1/2}, z) \end{aligned} \quad (10.3)$$

выше характеристики в сверхзвуковой зоне

$$\begin{aligned} f(z) &= -F(-1, -^{4/3}, ^{1/2}, z) \\ g(z) &= -AzF(-^{1/2}, -1, ^{4/3}, z^{-1}) + B(-z)^{1/3}F(-^{5/6}, -^{4/3}, ^{2/3}, z^{-1}) \\ f^0(z) &= ^{8/3}c(-z)^{1/2}F(-^{1/3}, -1, ^{3/2}, z) \\ g^0(z) &= ^{1/3}c[M(-z)^{3/2}F(-^{3/2}, -1, ^{1/3}, z^{-1}) + N(-z)^{5/6}F(-^{5/6}, -^{1/3}, ^{5/3}, z^{-1})] \end{aligned} \quad (10.4)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned} z &= -\frac{9}{4} \frac{\theta^2}{\eta^3}, & m &= \frac{-\lambda}{\mu - \lambda}, & A &= \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(-1/3)}{\Gamma(2)\Gamma(-5/6)} = 0.53820 \\ B &= \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/3)\Gamma(-1/2)} = -0.56253, & M &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2/3)}{\Gamma(2)\Gamma(-5/6)} = -0.35914 \\ N &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-2/3)}{\Gamma(4/3)\Gamma(-3/2)} = -3.37501, & c &= (\kappa + 1)^{1/3} [^{1/2}(\kappa + 1)]^{1/(\kappa-1)} \\ \lambda &= \theta - ^{2/3}(-\eta)^{3/2}, & \mu &= \theta + ^{2/3}(-\eta)^{3/2} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Здесь λ и μ — характеристические координаты; коэффициент $-\sqrt{3}$ взят для того, чтобы на характеристике значение $g(z)$ выше характеристики совпало со значением ниже характеристики. Знак минус в выражении $f(z)$ выбран для того, чтобы скачок уплотнения лежал правее нулевой линии гока [1].

Векторы скорости перед и за скачком уплотнения связаны условием [5]

$$\theta_2 - \theta_1 = \pm (\eta_2 - \eta_1) \sqrt{-^{1/2}(\eta_2 + \eta_1)} \quad (11)$$

Краевое условие для потенциала скорости и функции тока в общем случае вдоль скачка уплотнения имеет вид [5]

$$d\varphi_1 / d\psi_1 = d\varphi_2 / d\psi_2 = \pm c \sqrt{-^{1/2}(\eta_2 + \eta_1)} \quad (12)$$

При прохождении через скачок уплотнения потенциал скорости и функция тока остаются непрерывными

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \quad \psi_1 = \psi_2 = \psi \quad (13)$$

На основании этого и уравнений (10.1) и (10.2) получим

$$\alpha_1 f(h_1) + ^{1/3}\varepsilon g(h_1) = h^4 [f(-h_2^2) + \varepsilon g(-h_2^2)] \quad (h = -\eta_2 / \eta_1) \quad (14)$$

Определяем кривые условия для линии разрыва L , рассматривая ее как искривленный скачок разрежения, что допустимо в данном приближении.

Из теории косо́го скачка известно, что составляющие скорости перед и за скачком связаны уравнением

$$\left(\frac{v_2 - v_1}{u - u_2}\right)^2 = \frac{u_2 - a_*^2/u_1}{a_*^2/u_1 + 2u_1/(\kappa + 1) - u_2} \quad (15)$$

Здесь индекс 1 означает величины перед скачком, индекс 2 — за скачком. В первом приближении имеем

$$u_1 = W_1 = a_* \left[1 - \frac{\bar{\eta}_1}{(\kappa + 1)^{1/3}} \right], \quad v_1 = W_1 \sin \bar{\theta}_1 = a_* \bar{\theta}_1$$

$$u_2 = W_2 \cos(-\bar{\theta}_2) = a_* \left[1 - \frac{\bar{\eta}_2}{(\kappa + 1)^{1/3}} \right], \quad v_2 = W_2 \sin(-\bar{\theta}_2) = -a_* \bar{\theta}_2$$

с учетом, что угол наклона скорости за скачком равен $-\bar{\theta}_2$.

Отсюда

$$u_1 - u_2 = a_* \frac{\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1}{(\kappa + 1)^{1/3}}, \quad u_2 - a_*^2/u_1 = -a_* \frac{\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1}{(\kappa + 1)^{1/3}}$$

$$a_*^2/u_1 + 2u_1/(\kappa + 1) - u_2 = 2a_*/(\kappa + 1) + \dots, \quad v_2 - v_1 = -a_*(\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1)$$

так что

$$\bar{\theta}_2 + \bar{\theta}_1 = \mp (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \sqrt{-1/2(\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1)} \quad (16)$$

Нетрудно показать, что вдоль линии разрыва также имеет место соотношение

$$d\bar{\varphi}_1/d\bar{\varphi}_1 = d\bar{\varphi}_2/d\bar{\varphi}_2 = \pm c \sqrt{-1/2(\bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_1)} \quad (17)$$

Здесь индексы 1, 2 — соответственно перед и за линией разрыва L .

При прохождении через линии разрыва L функция тока остается непрерывной, т. е.

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = \bar{\psi} \quad (18)$$

или, учитывая уравнения (10.2), (10.3), получаем

$$k^4 [af(k_1^2) + \beta g(k_1^2)] = \alpha_1 f(k_2^2) + 1/3 \varepsilon g(k_2^2) \quad (k = \eta_2 / \eta_1) \quad (19)$$

На основании уравнений (10.1) — (10.5), обращая внимание на формулы (14), (19), (4), (5), из уравнений (11), (12), (16), (17) получаем

$$2/3 (h_2 h^{3/2} - h_1) = \pm (1 + h) \sqrt{1/2(1 - h)} \quad (20)$$

$$9\sqrt{2} [\alpha_1 f^0(h_1^2) + 1/3 \varepsilon g^0(h_1^2)] = \pm 8c \sqrt{1 - h} [\alpha_1 f(h_1^2) + 1/3 \varepsilon g(h_1^2)]$$

$$9\sqrt{2} h [f^0(-h_2^2) + \varepsilon g^0(-h_2^2)] = \pm 8c \sqrt{1 - h} [f(-h_2^2) + \varepsilon g(-h_2^2)]$$

$$\frac{2}{3} (k_2 + k_1 k^{3/2}) = \pm (k - 1) \sqrt{1/2(k + 1)}$$

$$9\sqrt{2} k [\alpha f^0(k_1^2) + \beta g^0(k_1^2)] = \pm 8c \sqrt{1 + k} [\alpha f(k_1^2) + \beta g(k_1^2)]$$

$$9\sqrt{2} [\alpha_1 f^0(k_2^2) + 1/3 \varepsilon g^0(k_2^2)] = \pm 8c \sqrt{1 + k} [\alpha_1 f(k_2^2) + 1/3 \varepsilon g(k_2^2)]$$

В этих формулах можно взять либо знак плюс, либо знак минус. Ограничимся в дальнейшем первым знаком.

Из уравнений (14) и (19) найдем α , β и α_1

$$\alpha = \Delta \{ h^4 [f(-h_2^2) + \varepsilon g(-h_2^2)] f(k_2^2) + {}^{1/3}\varepsilon [g(k_2^2) f(h_1^2) - g(h_1^2) f(k_2^2)] - k^4 E g(k_1^2) f(h_1^2) \} \quad (21)$$

$$\beta = \Delta \{ E k^4 f(k_1^2) f(h_1^2) - D h^4 [f(-h_2^2) + \varepsilon g(-h_2^2)] f(k_2^2) - {}^{1/3}\varepsilon D [g(k_2^2) f(h_1^2) - g(h_1^2) f(k_2^2)] \}$$

$$\Delta^{-1} = k^4 [f(k_1^2) + D g(k_1^2)] f(h_1^2)$$

$$\alpha_1 = \{ h^4 [f(-h_2^2) + \varepsilon g(-h_2^2)] - {}^{1/3}\varepsilon g(h_1^2) \} / f(h_1^2)$$

$$E = D + \varepsilon, \quad D = f(1) / g(1), \quad f(1) = {}^{11/3}, \quad g(1) = 1.28172$$

Таким образом, получаем соотношения (20), (21), которые дают возможность найти постоянные $h_1, h_2, h, k_1, k_2, k, \alpha, \beta, \alpha_1$.

Разлагая в ряды гипергеометрических функций, а также величины h_1, h_2, h, k_1, k_2, k по параметру ε , решаем систему уравнений (20), (21) методом неопределенных коэффициентов, причем, берем $\varepsilon = -0.1$ (см. [2]).

Тогда получим (22)

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.93190, & k_2 &= -0.85761, & k &= 0.97524 \\ h_1 &= 0.00269, & h_2 &= 0.01152, & h &= 0.99998 \\ \alpha &= 0.96324, & \beta &= 0.00518, & \alpha_1 &= 3.67059 \end{aligned}$$

Из уравнений (5) и (4) при значениях (22) имеем для линии разрыва L (23)

$$\bar{\theta}_1 = 0.62127 (-\bar{\eta}_1)^{3/2}, \quad \bar{\theta}_2 = -0.57174 (-\bar{\eta}_{21})^{3/2}$$

для скачка уплотнения L^*

$$\theta_1 = 0.00179 (-\eta_1)^{3/2}, \quad \theta_2 = 0.00769 \eta_2^{3/2} \quad (24)$$

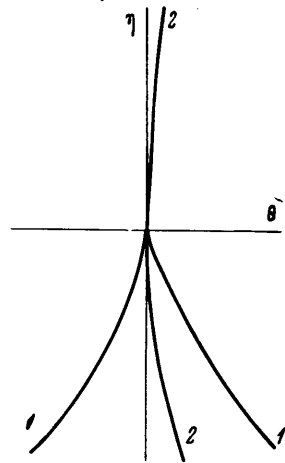
Расположение линии разрыва L и скачок уплотнения L^* в плоскости $\theta\eta$ показаны на фиг. 2.

Теперь находим x и y в зависимости от η на линии разрыва L и на скачке уплотнения L^* . Легко убедиться, что для линии разрыва L

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2 = -2.88779 \bar{\eta}^4, \quad \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = -0.00552 \bar{\eta}^{3/2} \quad (25)$$

для скачка уплотнения L^*

$$\psi = \psi_1 = \psi_2 = -1.00115 \eta^4, \quad \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = -5.49747 (-\eta)^{3/2} \quad (26)$$



Фиг. 2

Согласно формулам Чаплыгина имеем [2]

$$a_*x = \varphi + (\kappa + 1)^{-1/2} \int \eta d\varphi - [1/2(\kappa + 1)]^{1/(\kappa-1)} \int \theta d\psi + \dots$$

$$a_*y = [1/2(\kappa + 1)]^{1/(\kappa-1)} \psi + 1/2c \int \eta^2 d\psi + c \int \theta d\varphi + \dots$$

Отсюда согласно выражениям (23) — (26) получим для линии разрыва L

$$a_*x = -5.49747(-\bar{\eta})^{3/2} + 1.46530(-\bar{\eta})^{11/2},$$

$$a_*y = -4.55532\bar{\eta}^4 + 2.94444\bar{\eta}^6$$

для искривленного скачка уплотнения L^*

$$a_*x = -0.00552\eta^{3/2} - 0.00545\eta^{11/2}, \quad a_*y = 1.57925\eta^4 - 0.70458\eta^6$$

Звуковая линия и нулевая линия тока определяются аналогично работе [2].

Авторы благодарят С. В. Фальковича за ценные советы и обсуждения полученных результатов.

Поступило 17 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Пример околосзвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
2. Бийбосунов И. Б. Пример околосзвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1958, т. 22, № 3.
3. Бийбосунов И. Б. Уточнение одного примера околосзвукового течения. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3.
4. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. Франкль Ф. И. Обтекание профиля дозвуковым потоком с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся искривленным скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.