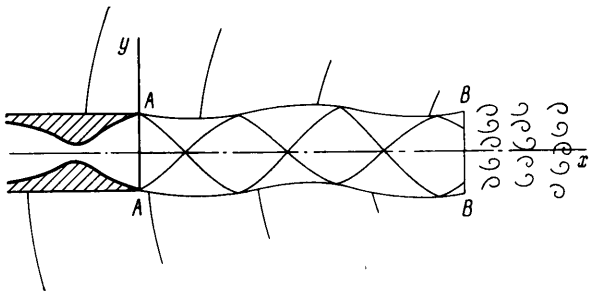
ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

М. Г. ЛЕБЕДЕВ, Г. Ф. ТЕЛЕНИН

(Москва)

Изучается явление пульсаций сверхзвуковой струи, истекающей из сопла в затопленное пространство. На основе анализа экспериментальных данных предложена схема этого явления и дано математическое описание задачи, соответствующей предложенной схеме. Обзор основных экспериментальных результатов по данному вопросу можно найти в [1]. При анализе явления за основу будет взята работа [2], где приведены систематические данные. Общая картина явления состоит в следующем. Для заданных числа M сопла и давления в окружающей среде p_e существует диапазон изменения давления в ресивере p_0, при котором струя начинает пульсировать с некоторой определенной частотой $f = \omega / 2\pi$ и распадается на некотором расстоянии от среза сопла (значительно раньше, чем при отсутствии колебаний). Одновременно в окружающей среде возникают распространяющиеся к срезу сопла акустические волны той же частоты. Равенство частот говорит о том, что источник волн неподвижен в пространстве, так как отсутствует эффект Допплера. Излучение акустических волн в основном происходит из области распада струи. Волны эти по форме близки к сферическим, причем колебания по разные стороны от струи находятся в противофазе. Схематически эта картина изображена на фиг. 1.



Фиг. 1

Пульсации сверхзвуковой струи с «дискретной» частотой были обнаружены Пауэллом [3] еще в 1953 году; им же дана первая схема, объясняющая это явление. Хотя основная идея обратной связи через внешнее акустическое поле безусловно верна, модель Пауэлла обладает рядом недостатков и не является единственно возможной.

1. Схема явления. Если течение жидкости или газа неоднородное, то при некоторых условиях оно может потерять устойчивость; создается механизм, переводящий часть энергии поступательного движения в пульсации. Как правило, возникающие колебания обладают широким спектром по частоте и имеют сложный хаотический характер. Однако при наличии плохо обтекаемых тел и других причин, создающих сложную структуру потока, в результате нелинейного развития возмущений после потери устойчивости иногда возникают достаточно регулярные колебания с определенной частотой.

Простейшую схему таких явлений дает обтекание тела с открытой полостью, работающей как резонатор. Для простоты рассмотрим резонатор Гельмгольца (фиг. 2). За счет потери устойчивости поверхности раздела ABC в устье резонатора возникают пульсации давления. Пусть ξ — смещение массы m газа, заключенного в узком канале BD. Тогда уравнение колебаний примет вид

$$\xi^{\cdot\cdot} + 2\eta\xi^{\cdot} + \omega_0^2\xi = m^{-1}S\Delta p \qquad (\omega_0 = c(S / LV)^{1/2}) \tag{1.1}$$

Здесь η — коэффициент затухания резонатора, ω_0 — собственная частота, S и L — площадь поперечного сечения и эффективная длина канала, V — объем полости

резонатора и c — скорость звука в ней, Δp — переменное возмущающее давление, действующее извне в устье канала. Пусть возмущение давления представляет собой гармоническое колебание

$$\Delta p = P \cos \omega t \tag{1.2}$$

Предполагая, что сжатие газа в резонаторе происходит адиабатически, для возмущения давления в полости имеем

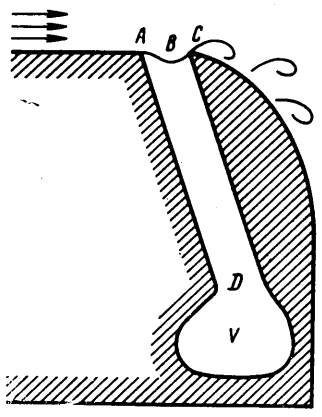
$$\delta p = P\omega_0^2 |H(i\omega)| \cos \omega t, \qquad H(i\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 + i2\eta\omega)^{-1} \tag{1.3}$$

Здесь $H(i\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика колебательной системы (1.1), а $\omega_0 |H(i\omega)|$ — коэффициент усиления возмущений. На самом деле возмущение давления Δp в устье резонатора представляет собой не гармоническое колебание с заданной частотой, а случайный процесс с широким спектром, характеризуемым спектральной плотностью $w_{\Delta p}(\omega)$. Спектральная плотность пульсаций в полости согласно (1.3) дается формулой

$$w_{\delta p}(\omega) = \omega_0^4 \, | H(i\omega) |^2 w_{\Delta p}(\omega) \tag{1.4}$$

Итак, если колебательная система обладает высокой добротностью ($\omega_0 / 2\eta \gg 1$), то резонатор представляет собой узкополосный фильтр, отбирающий колебательную энергию возмущений в малом интервале частот около ω_0.

Если имеется обратная связь между колебаниями в резонаторе и интенсивностью пульсаций давления в устье резонатора в интервале частот около ω_0, а также механизм ограничения роста интенсивности пульсаций, то система «резонатор — внешний поток» будет автоколебательной.



Фиг. 2

В некотором смысле колеблющуюся сверхзвуковую струю на участке от среза сопла до области распада можно уподобить резонатору. Рассмотрим на фиг. 1 участок струи AB. Волны, бегущие по поверхности струи

$$\Delta p = \cos (\omega t + 2\pi x / l) = \cos (\omega t + \omega x / a_e) \tag{1.5}$$

(l, ω, a_e — длина волны, угловая частота и скорость звука во внешней среде), совершают работу, передавая колебательную энергию струе. Роль рассеяния энергии играет вынос колебательной энергии через сечение BB и излучение во внешнюю среду акустических волн колеблющейся струей с поверхности AB. Учитывая квазипериодичность по x геометрической структуры струи, а также характер распространения возмущений в сверхзвуковом потоке, естественно ожидать, что в общем случае возмущения в струе, вызванные периодической волной на поверхности AB, также будут квазипериодическими по x. Тогда, выбирая длину волны $l = l_*$ или частоту $\omega = \omega_*$, можно так синхронизировать волну на поверхности с распространением возмущений в струе, чтобы как положительные, так и отрицательные возмущения давления в струе нарастали вдоль струи к области распада, превышая возмущения в волне на поверхности, так что в струе происходит усиление возмущений. Струя будет играть роль фильтра (или резонатора), отбирающего из внешнего акустического поля колебательную энергию в малом интервале частот около ω_*.

В реальных условиях струя на выходе из сопла может быть нерасчетной (недорасширенной или перерасширенной). Избыточный или недостающий перепад давления в основном срабатывается в начальном участке струи, а дальше ее средний поперечный размер определяется полным перепадом давления $p_0 - p_e$ между ресивером и внешней средой. Введем средние диа-

метр D и число M струи, определяющие ее размеры и геометрическую структуру за начальным участком. Пусть D_m — диаметр критического сечения сопла; по теории одномерных течений газа M и $D / D_m = F(M)$ выражаются через отношение давлений p_e / p_0. Согласно рассматриваемой схеме явления из условия синхронизации волны, бегущей по поверхности, имеем

$$\frac{l_*}{D_m} = F_1\left(M, \frac{a}{a_e}\right), \qquad S_* = \frac{\omega_* D}{2\pi a_e} = \frac{D}{D_m}\frac{D_m}{l_*} = F_2\left(M, \frac{a}{a_e}\right) \tag{1.6}$$

где a — средняя скорость звука в струе, S_* — критическое число Струхаля. Если температуры газа в ресивере и внешней среде фиксированы, то отношение a / a_e при переменном p_0 зависит только от M. Эксперименты с холодными струями, проведенные при различных значениях M_A — геометрического числа Маха, вычисляемого по отношению площадей на выходе из сопла и в критическом сечении,— показывают, что в соответствии с (1.6) S_* в основном определяется параметром M (см. фиг. 12 в [2]). Так как при фиксированном p_0 / p_e и переменном M_A изменяется нерасчетность струи, то из этих результатов также следует, что S_* слабо зависит от интенсивности скачков. Далее, экспериментально показана зависимость S_* от степени подогрева струи и, следовательно, от отношения a / a_e, что также согласуется с (1.6).

Из общих соображений и экспериментальных данных (частота внешних акустических волн равна частоте пульсаций в струе) кажется естественным, что интенсивность волн, излучаемых во внешнюю среду из области распада струи, связана с интенсивностью пульсаций в струе, т. е. колебательная энергия излучается в основном в интервале частот около ω. Один из мыслимых механизмов, ограничивающих рост пульсаций, состоит в следующем. С увеличением интенсивности внешних волн и колебаний струи все больше нарушается квазипериодический по x характер геометрической структуры струи и, как следствие этого, ее фильтрующие свойства, так что рост возмущений по направлению к области распада приостанавливается. В рамках рассматриваемой схемы явления естественно предположить, что интенсивность скачков и процессы, связанные с вязкостью и теплопроводностью, должны влиять на нелинейный механизм излучения акустической энергии из области распада струи (а возможно, и из областей пересечения скачков со свободной поверхностью). Эти соображения согласуются с экспериментальными данными, показывающими влияние нерасчетности струи, степени подогрева и, по-видимому, числа Рейнольдса на интенсивность узкополосных пульсаций во внешнем поле [1]. Отметим, что экспериментальные данные о влиянии дозвукового спутного потока также не противоречат данной схеме.

Резюмируя приведенные соображения, можно сказать, что рассмотренная схема возникновения и поддержания узкополосных пульсаций при истечении одиночной сверхзвуковой струи в общих чертах согласуется с известными экспериментальными данными. Естественно, это не является доказательством ее справедливости. Вопрос о выяснении механизма узкополосных пульсаций требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований.

2. Постановка математической задачи. В данной работе оставим в стороне вопросы, связанные с нелинейным механизмом излучения акустической энергии из области распада струи, и сосредоточим внимание на изучении амплитудно-частотной характеристики струи, определяющей основную частоту узкополосных пульсаций. Для этого рассмотрим взаимодействие сверхзвуковой струи с заданным внешним акустическим полем. В целях упрощения математической задачи будем рассматривать идеализированную схему явления. Внешние акустические волны будем считать плоскими. Согласно экспериментальным данным колебания в них носят статистический характер и в случае осесимметричной струи поле возмуще-

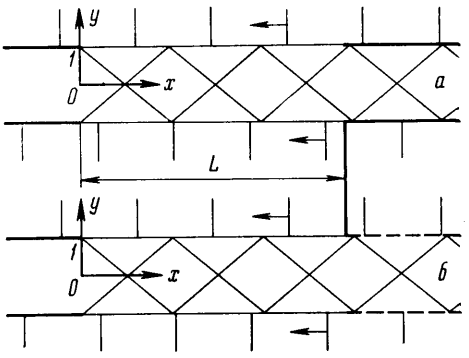
ний давления в цилиндрической системе координат x, y, ψ может быть представлено в виде

$$p' = A(t)\cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{l}x + B(t)\right]\cos[\psi + C(t)] \qquad (2.1)$$

где A, B, C — случайные функции, законы которых еще требуют дальнейшего изучения. Чтобы иметь возможность определить взаимодействие случайного акустического поля (2.1) со струей, достаточно рассмотреть ее взаимодействие с детерминированным полем

$$p' = P\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{l}x\right)\cos\psi \qquad (2.2)$$

где P — постоянная величина. Решение этой задачи аналогично определению амплитудно-частотной характеристики резонатора в автоколебательной системе с разомкнутой обратной связью (см. выше). Так как интенсивность скачков не влияет на основную частоту узкополосных пульсаций, будем рассматривать расчетную струю, а возмущения во внешнем акустическом поле и струе полагать малыми. Это позволяет считать течение потенциальным и решать задачу в линейной постановке. Если ввести отдельно для струи и внешней среды потенциалы Φ и Φ_e возмущений скорости $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}_e'$ по формулам



Фиг. 3

$$\mathbf{V}' = a\,\mathrm{grad}\,\Phi, \qquad \mathbf{V}_e' = a_e\,\mathrm{grad}\,\Phi_e$$

то они будут подчиняться уравнениям

$$\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\psi^2} - \frac{1}{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{2M}{a}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_e}{\partial y^2} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial\psi^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial\Phi_e}{\partial y} - \frac{1}{a_e^2}\frac{\partial^2\Phi_e}{\partial t^2} = 0 \qquad (\beta^2 = M^2 - 1) \qquad (2.3)$$

При этом возмущения давления в струе и во внешней среде определяются соотношениями

$$p' = -\gamma p\frac{R}{a}\frac{d\Phi}{dt} = -\gamma p\frac{R}{a}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + aM\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$$

$$p_e' = -\gamma_e p\frac{R}{a_e}\frac{d\Phi_e}{dt} = -\gamma_e p\frac{R}{a_e}\frac{\partial\Phi_e}{\partial t}$$

где p — невозмущенное давление, одинаковое в струе и во внешней среде, γ и γ_e — показатели адиабаты, R — характерный линейный размер. Простейшая постановка задачи изображена на фиг. 3. Из полубесконечного жесткого цилиндра ($-\infty \leqslant x < 0$) единичного радиуса вытекает полубесконечная цилиндрическая сверхзвуковая струя ($0 < x \leqslant \infty$). Из $x = \infty$ вдоль поверхности струи по направлению к цилиндру излучаются

плоские волны (2.2). Решение ищется в области $-\infty \leqslant x \leqslant \infty, 0 \leqslant y \leqslant \leqslant \infty$. Граничными условиями являются условия непротекания на внешней и внутренней поверхностях цилиндра

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } -\infty \leqslant x < 0, \qquad y = 1 \tag{2.4}$$

и условия равенства давлений и смещений поверхности раздела между струей и внешней средой

$$\frac{\gamma}{a}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + aM\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\gamma_e}{a_e}\frac{\partial \Phi_e}{\partial t}, \qquad \frac{1}{a_e}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} = \left(\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \tag{2.5}$$

при $0 < x \leqslant \infty$, $y = 1$ и, наконец, условие излучения, требующее, чтобы при $y \gg 1$ решение представляло собой уходящие волны.

Сформулированная краевая задача может быть решена, например, методом Винера — Хопфа. Однако в результате решения такой задачи смещение поверхности струи не только не убывает, но может и возрастать. Поэтому взаимодействие струи с внешним акустическим полем на участке $x > L$, вызовет конечные возмущения в области $x < L$. В действительности же эффективное взаимодействие между струей и внешней акустической волной происходит только на участке от среза сопла до области распада струи (участок AB на фиг. 1 и $0 \leqslant x \leqslant L$ на фиг. 3). Таким образом, решение в области $x < L$, представляющее наибольший интерес, даст искаженный результат. Для устранения этого недостатка нужно изменить постановку задачи так, чтобы при $x > L$ смещение поверхности струи быстро убывало до нуля. При этом граничные условия (2.5) действуют на интервале $0 < x \leqslant L$, а для оставшегося участка граничные условия принимают вид

$$\partial \Phi_e / \partial y = \varphi(x) \qquad \text{при } L < x \leqslant \infty, \qquad y = 1 \tag{2.6}$$

где $\varphi(x)$ — достаточно быстро убывающая до нуля с ростом функция (пунктирный участок на фиг. 3, *б*). Прочие граничные условия остаются в силе. Наличие трех областей по x с различными граничными условиями приводит к тому, что задача не может быть решена аналитически и ее приходится решать численно.

Если пренебречь излучением акустической энергии от поверхности струи в окружающее пространство и, следовательно, взаимодействием струи с внешней средой, то получим упрощенную постановку задачи, сохраняющую, однако, ее основные свойства. В этой постановке из полубесконечного цилиндра $(-\infty \leqslant x < 0)$ вытекает полубесконечная сверхзвуковая струя $(0 < x \leqslant \infty)$, на поверхности которой задана бегущая волна давления

$$\Delta p = P\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{l}x\right)\cos\psi \tag{2.7}$$

Так как взаимодействие с внешней средой отсутствует и, следовательно, передачи возмущений вверх по потоку нет, то можно искать решение для всей бесконечной струи. Граничные условия принимают вид

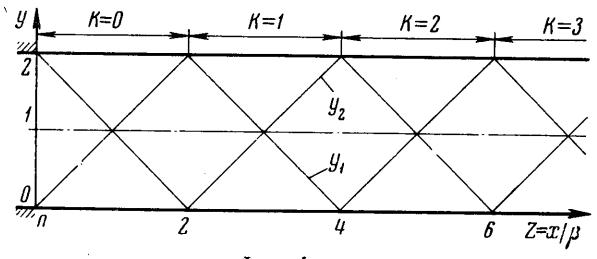
$$\begin{aligned} &\partial \Phi / \partial y = 0 \qquad \text{при } -\infty \leqslant x < 0, \qquad y = 1 \\ &p' = \Delta p \qquad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \infty, \qquad y = 1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Простой анализ показывает, что решение сформулированной задачи в плоском и осесимметричном случаях обладает одними и теми же свойствами. Поэтому будем решать плоскую задачу. Для получения более общих результатов рассмотрим как антисимметричные, так и симметричные относительно средней линии струи возмущения давления $p' = \Delta p$ на верхней и нижней границах струи.

3. Построение линейного решения. Уравнение для возмущения потенциала в плоском случае можно записать в виде

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь введено безразмерное время $\tau = aR^{-1}t$; будем также пользоваться безразмерной частотой $\nu = a^{-1}R\omega$; за характерный линейный размер R вы-



Фиг. 4

берем половину ширины струи и будем считать, что $y = 0$ на ее нижней границе (фиг. 4). Условия на границах струи имеют вид

$$p'_{y=0} = -\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + M \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y=0} = P \cos(\nu\tau + \nu_e x)$$

$$p'_{y=2} = -\gamma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + M \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y=2} = jP \cos(\nu\tau + \nu_e x) \tag{3.2}$$

где $\nu_e = \nu a / a_e$, а j равно 1 или -1 в симметричном или антисимметричном случаях соответственно.

Решение уравнения (3.1) будем искать в виде

$$\Phi = F_1(x, y)\cos(\nu\tau - \sigma x) + F_2(x, y)\sin(\nu\tau - \sigma x) \tag{3.3}$$

Подставив (3.3) в (3.1) и подобрав σ так, чтобы коэффициенты при $\partial F_1 / \partial x$ и $\partial F_2 / \partial x$ обратились в нуль, получим, что функции F_1, F_2 удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\beta^2 \frac{\partial^2 F_k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F_k}{\partial y^2} + \lambda^2 F_k = 0 \qquad \left(\sigma = \frac{M\nu}{\beta^2},\ \lambda = \frac{\nu}{\beta},\ k = 1, 2 \right) \tag{3.4}$$

Граничные условия при $y = 0$ запишутся в виде

$$-\gamma \left[M \frac{\partial F_1}{\partial x} + (\nu - \sigma M) F_2 \right] = P \cos(\sigma x + \nu_e x),$$

$$\gamma \left[M \frac{\partial F_2}{\partial x} - (\nu - \sigma M) F_1 \right] = P \sin(\sigma x + \nu_e x) \tag{3.5}$$

При $y = 2$ правые части (3.5) следует умножить на j.

Для решения системы (3.4) применим к каждому из ее уравнений преобразование Лапласа [4] по переменной x

$$G_k(p, y) = \int_0^\infty F_k(x, y) e^{-px} dx \tag{3.6}$$

где p — комплексная величина. Функции G_k удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2G_k}{dy^2} - \mu^2 G_k = 0 \qquad (\mu^2 = p^2\beta^2 + \lambda^2) \tag{3.7}$$

Решением (3.7) является

$$G_k = A_k(p)e^{\mu y} + B_k(p)e^{-\mu y} \tag{3.8}$$

Граничные условия для системы (3.7), из которых можно определить константы A_k, B_k, получим, применив преобразование Лапласа к (3.5). Определив полностью функции $G_k(p, y)$, можно найти их прообразы $F_k(x, y)$ при помощи обратного преобразования Лапласа

$$F_k(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} G_k(p, y)e^{px}dp \tag{3.9}$$

где s — произвольное положительное число. В развернутом виде решение (3.9) запишется так:

$$F_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} G_{k0}\left[\frac{je^{2\mu}-1}{e^{4\mu}-1}e^{\mu y} + \frac{e^{2\mu}-j}{e^{4\mu}-1}e^{-\mu y}\right]e^{\zeta x/\beta}\,d\zeta \tag{3.10}$$

где функции G_{k0} связаны с граничными условиями и имеют вид

$$G_{10} = \frac{P\beta}{\gamma M}\frac{1}{d^2+\zeta^2}\frac{cd-\zeta^2}{c^2+\zeta^2}, \qquad G_{20} = \frac{P\beta}{\gamma M}\frac{1}{d^2+\zeta^2}\frac{\zeta(c+d)}{c^2+\zeta^2} \tag{3.11}$$

$$\zeta = p\beta, \qquad c = \beta(\sigma + \nu_e), \qquad d = \lambda / M = \nu / \beta M$$

Подынтегральные функции в (3.10) не имеют особенностей в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta < s$, кроме простых полюсов в точках

$$\zeta = \pm id, \qquad \zeta = \pm ic, \qquad \zeta = \pm i[\lambda^2 + \pi^2(n + (j+1)/4)^2]^{1/2} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

Применяя лемму Жордана и теорему Коши о вычетах [4], вычисляем интегралы (3.10) и получаем решение системы (3.4).

$$F_1 = \frac{P\beta}{\gamma M}\left\{\frac{1}{c-d}\left[\frac{e^{Dy}+je^{D(2-y)}}{1+je^{2D}}\sin\frac{dx}{\beta} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{(1+j)\cos C(1-y)+(1-j)\sin C(1-y)}{(1+j)\cos C+(1-j)\sin C}\sin\frac{cx}{\beta}\right] +$$
$$\left. + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(cd+\Lambda^2)\pi N\sin\pi Ny}{(c^2-\Lambda^2)(d^2-\Lambda^2)\Lambda}\sin\Lambda\frac{x}{\beta}\right\}$$

$$F_2 = \frac{P\beta}{\gamma M}\left\{\frac{1}{c-d}\left[\frac{e^{Dy}+je^{D(2-y)}}{1+je^{2D}}\cos\frac{dx}{\beta} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{(1+j)\cos C(1-y)+(1-j)\sin C(1-y)}{(1+j)\cos C+(1-j)\sin C}\cos\frac{cx}{\beta}\right] +$$
$$\left. + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+d)\pi N\sin\pi Ny}{(c^2-\Lambda^2)(d^2-\Lambda^2)}\cos\Lambda\frac{x}{\beta}\right\}$$

$$C = (c^2-\lambda^2)^{1/2}, \quad D = (\lambda^2-d^2)^{1/2}, \quad N = n + (j+1)/4, \quad \Lambda = (\lambda^2+\pi^2N^2)^{1/2} \tag{3.12}$$

По известным F_1, F_2 могут быть вычислены возмущения потенциала Φ, продольной и поперечной составляющих скорости u' и v' и давления p'

$$\Phi_1 = F_1 \cos \sigma x - F_2 \sin \sigma x, \qquad \Phi_2 = F_1 \sin \sigma x + F_2 \cos \sigma x$$

$$u_1 = \partial\Phi_1 / \partial x, \quad u_2 = \partial\Phi_2 / \partial x, \quad v_1 = \partial\Phi_1 / \partial y, \quad v_2 = \partial\Phi_2 / \partial y \qquad (3.13)$$

$$p_1 = -\gamma(M\partial\Phi_1 / \partial x + \nu\Phi_2), \qquad p_2 = -\gamma(M\partial\Phi_2 / \partial x - \nu\Phi_1)$$

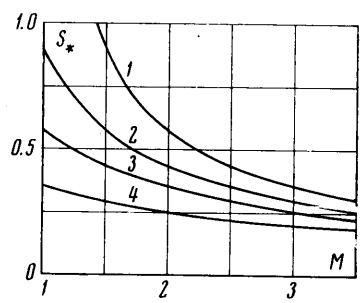
$$\Phi = \Phi_1 \cos \nu\tau + \Phi_2 \sin \nu\tau \ldots$$

Для вычисления F_1, F_2 по формулам (3.12) и величин, определяемых в (3.13), была составлена программа для ЭЦВМ. В рядах, входящих в выражения для F_1, F_2 удерживалось до 175 членов, что обеспечивало высокую точность. Заметим, что эти ряды сходятся неравномерно, и поэтому вычисление производных от функций F_1, F_2 посредством почленного дифференцирования рядов сталкивается с трудностями. В связи с этим вычисление производных проводилось численно по схеме второго порядка. В программе вычислялись также амплитудные значения возмущений потенциала, скоростей и давления

$$K_\Phi = P^{-1}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^{1/2}, \qquad K_p = P^{-1}(p_1^2 + p_2^2)^{1/2}, \ldots$$

Величина K_p представляет собой коэффициент усиления возмущений давления в той или иной точке внутри струи.

Для использования теорем и методов операционного исчисления, при помощи которых были получены в явном виде выражения для функций F_1, F_2, последние должны удовлетворять ряду условий. Без проверки удовлетворения этим условиям решение (3.12) является чисто формальным. Проще, однако, вместо проведения такой проверки подставить выражения для F_1, F_2 (3.12) в уравнения (3.4) и граничные условия (3.5) и непосредственно проверить, являются ли эти функции искомыми решениями. С этой целью в программу для ЭЦВМ был включен оператор, проверяющий выполнение (3.4), (3.5); вычисления показали, что (3.4), (3.5) удовлетворяются с высокой точностью.



Фиг. 5

Определим критические частоты ν_* решения (3.12), при которых наблюдается максимальное усиление возмущений внутри струи по сравнению с заданными возмущениями на ее границе. Естественно предположить, что критическими будут такие частоты, при которых решение (3.12) обладает особенностью. Возвращаясь к решению в комплексной плоскости (3.10), (3.11), замечаем, что при определенных условиях полюсы подынтегральных функций

$$\zeta = ic, \qquad \zeta = i(\lambda^2 + \pi^2 N^2)^{1/2}$$

совпадают, образуя полюс второго порядка. Из этого условия находим выражение для частот ν_*, в антисимметричном случае ($j = -1$)

$$\nu_* = \pi n \left[\left(\frac{M}{\beta} + \frac{a}{a_e}\beta\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\right]^{-1/2} \qquad (3.14)$$

в симметричном случае ($j = 1$)

$$\nu_* = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{M}{\beta} + \frac{a}{a_e}\beta\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}\right]^{-1/2} \qquad (3.15)$$

где $n = 1, 2, \ldots$ Анализ решения (3.12) показывает (см. п. 4), что частоты, определяемые соотношениями (3.14) или (3.15) действительно являются критическими. На фиг. 5 построена зависимость критического числа Струхаля, вычисленного по скорости звука во внешней среде a_e, ширине струи и частоте $\omega / 2\pi$ ($S_* = \nu_* a / \pi a_e$) от числа M невозмущенного течения в струе (кривые *1, 2, 3, 4* соответствуют значениям $a / a_e = \infty$, 2, 1, 0.5) для антисимметричного случая при $n = 1$.

Решение (3.12) упрощается в предельном случае, когда отношение скоростей звука в струе и во внешней среде $a / a_e = \infty$; физически это соответствует сильно нагретой струе. Введем обозначение $\alpha = \nu / \nu_*$ ($n = 1$) и перейдем к пределу в (3.12); ряды в (3.12) при этом превратятся в ряды Фурье, которые легко просуммировать. Окончательно получим (для антисимметричного случая)

$$\begin{aligned} F_1 &= P\beta(\gamma M)^{-1}(\alpha\pi \sin \alpha\pi)^{-1}(-\sin \alpha\pi z \sin \alpha\pi(1-y) + \varphi_1) \\ F_2 &= P\beta(\gamma M)^{-1}(\alpha\pi \sin \alpha\pi)^{-1}(-\cos \alpha\pi z \sin \alpha\pi(1-y) + \varphi_2) \end{aligned} \tag{3.16}$$

при $0 \leqslant z - 2k \leqslant y$

$$\varphi_1 = \sin \alpha\pi(z-2k) \sin \alpha\pi(1-y), \qquad \varphi_2 = \cos \alpha\pi(z-2k) \sin \alpha\pi(1-y)$$

при $y \leqslant z - 2k \leqslant 2 - y$

$$\varphi_1 = \sin \alpha\pi(1-z+2k) \sin \alpha\pi y, \qquad \varphi_2 = -\cos \alpha\pi(1-z+2k) \sin \alpha\pi y + \sin \alpha\pi$$

при $2 - y \leqslant z - 2k \leqslant 2$

$$\varphi_1 = -\sin \alpha\pi(2-z+2k) \sin \alpha\pi(1-y),$$

$$\varphi_2 = \cos \alpha\pi(2-z+2k) \sin \alpha\pi(1-y)$$

Здесь $z = x / \beta$, а параметр k, равный целой части величины $z / 2$, представляет собой номер «ячейки» струи (фиг. 4).

Дифференцируя (3.16) по x и y и используя (3.13), найдем зависимости от координат давления и составляющих скорости.

Выпишем здесь выражение для коэффициента усиления возмущений давления K_p

$$K_p = \begin{cases} |\vartheta(k)| & (0 \leqslant z - 2k < y) \\ [1 - \vartheta(k)\vartheta(k+1) \sin \alpha\pi y (\sin \alpha\pi(1-y))^{-1}]^{1/2} & (y < z - 2k < 2 - y) \\ |\vartheta(k+1)| & (2 - y < z - 2k \leqslant 2) \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\vartheta(k) = 2 \sin \alpha\pi k \sin \alpha\pi(1-y) (\sin \alpha\pi)^{-1}$$

Имея решение (3.12), можно определить форму возмущенной струи. Если уравнение нижней границы есть $Y = Y(x, t)$ и решение ищется в виде

$$Y = Y_1 \cos \nu\tau + Y_2 \sin \nu\tau$$

то из условия (линеаризованного) равенства скорости перемещения свободной поверхности и нормальной к ней составляющей скорости течения, получим систему уравнений для Y_1, Y_2

$$M dY_1 / dx + \nu Y_2 = (\Phi_{1y})_{y=0}, \qquad M dY_2 / dx - \nu Y_1 = (\Phi_{2y})_{y=0} \tag{3.18}$$

где Φ_{1y}, Φ_{2y} — функции, известные из (3.12), (3.13). Граничные условия очевидны: $Y_1(0) = Y_2(0) = 0$. В предельном случае решение этой системы

легко найти в явном виде; выражения для Y_1, Y_2 получаются, вообще говоря, довольно громоздкими, поэтому приведем их только для случая целых и полуцелых α.

При $\alpha = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\begin{aligned} Y_1^\circ &= (\pi\gamma M^2 / P\beta^2) Y_1 = n^{-1}(2k+1)\sin n\pi z \\ Y_2^\circ &= n^{-1}(2k+1)(\cos n\pi z - 1) \\ K_Y &= [(Y_1^\circ)^2 + (Y_2^\circ)^2]^{1/2} = n^{-1}(2k+1)\,|\sin {}^1/_2 n\pi z| \end{aligned} \tag{3.19}$$

При $\alpha = n - {}^1/_2$

$$\begin{aligned} Y_1^\circ &= (n - {}^1/_2)^{-1}(-1)^k \sin(n - {}^1/_2)\pi z \\ Y_2^\circ &= (n - {}^1/_2)^{-1}[(-1)^k \cos(n - {}^1/_2)\pi z - (2k+1)] \\ K_Y &= (n - {}^1/_2)^{-1}[1 + (2k+1)^2 + 2(2k+1)(-1)^k \cos(n - {}^1/_2)\pi z]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

4. Анализ результатов. Численное исследование решения (3.12), (3.13) и исследование предельного решения (3.16) показывает, что возмущения скоростей и давления, т. е. величины u_1, u_2, p_1 и т. д., являются кусочно-непрерывными функциями координат x, y, претерпевающими разрыв непрерывности на характеристиках $y_1 = x/\beta - 2k$ и $y_2 = 2 - x/\beta - 2k$ (фиг. 4). Разрывы этих функций соответствуют изменению параметров возмущенного течения в волнах сжатия и разрежения, которые в линейной постановке изображаются указанными характеристиками.

В предельном случае зависимость возмущений газодинамических параметров от координат x, y на участках непрерывности является синусоидальной; зависимость их от x является периодической, если α — рациональное число, причем если представить α в виде несократимой дроби $\alpha = a/b$, то период равен $2b$. При иррациальном α функции F_1, F_2 (3.16) и их производные принадлежат к классу квазипериодических функций. При $a/a_e < \infty$ зависимость возмущений скоростей и давления от x близка к периодической, а зависимости от x и y на участках непрерывности близка к синусоидальной [1].

Перейдем к исследованию коэффициента усиления возмущений давления K_p. В предельном случае, как видно из (3.17), зависимость K_p от числа M струи и частоты ν внешних акустических волн сводится к зависимости от одного параметра α. На участках непрерывности K_p не зависит от координаты z (или x). Детальный анализ показывает, что величина K_p при заданном значении k и для любого значения координаты y ограничена величиной

$$K_p \leqslant \begin{cases} 2k & (0 \leqslant z - 2k < y) \\ 2k+1 & (y < z - 2k < 2 - y) \\ 2(k+1) & (2 - y < z - 2k \leqslant 2) \end{cases} \tag{4.1}$$

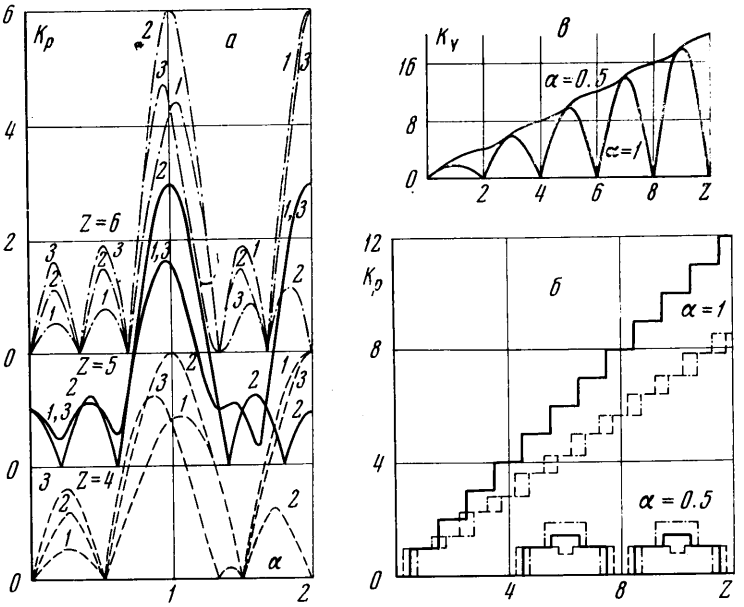
При $k > 1$ максимально возможное значение K_p (4.1) достигается только при целых значениях параметра α (причем не при всех y). Таким образом, максимальное усиление возмущений в струе получаем при совпадении частоты внешних акустических волн с одной из критических частот (3.14).

Зависимость коэффициента усиления K_p от частоты α представлена на фиг. 6, *а* для значений $z = x/\beta = 4, 5, 6$ и $y = 0.25, 0.5, 0.75$ (кривые *1*, *2*, *3* соответственно).

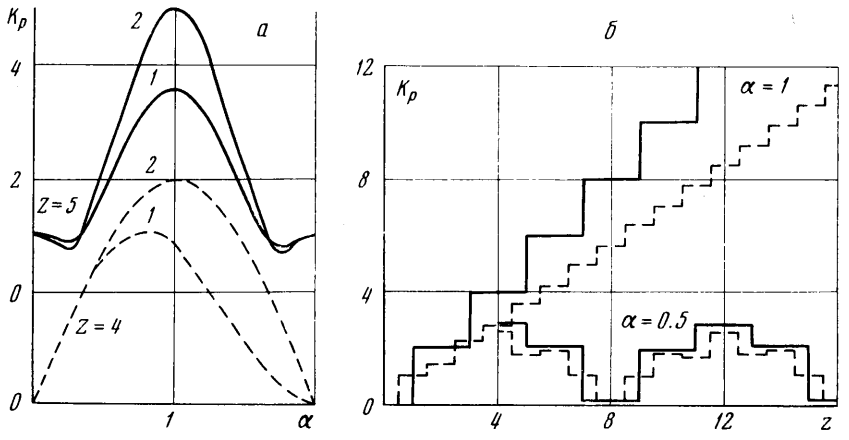
С удалением от среза сопла растет максимальное по α значение K_p, причем резкое возрастание K_p в районе критических частот осуществляется на все более узком

[1] Сделанные выводы справедливы только для таких значений частоты ν (или α), при которых решения (3.12) или (3.16) не имеют особенностей.

интервале частот $\Delta\alpha$, а при всех других частотах возмущения давления внутри струи имеют тот же порядок, что и на границе. При $\alpha = 1$ кривая $K_p(\alpha)$ для $y = 0.5$ достигает максимально возможного значения; кривые для $y = 0.25$ и $y = 0.75$ в районе $\alpha = 1$ имеют локальный максимум. Функции $K_p(\alpha)$ периодические с периодом



Фиг. 6



Фиг. 7

$T_\alpha = 2$ при $y = 0.5$ и $T_\alpha = 4$ при $y = 0.25$ и $y = 0.75$. Зависимость K_p от координаты $z = x / \beta$ построена на фиг. 6, *б* для $y = 0.25$, 0.5, 0.75 (штриховая, сплошная и штрих-пунктирная линии) при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.5$ (для последнего α, чтобы не загромождать фигуру, только при $z \geqslant 4$).

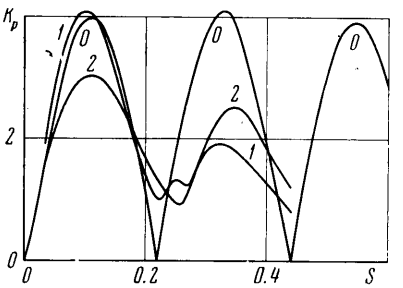
Многочисленные расчеты по формулам (3.12), (3.13) в диапазоне $2 \leqslant M \leqslant 4$, $0.5 \leqslant a / a_e \leqslant \infty$ показали, что зависимость коэффициента

усиления возмущений давления K_p от частоты ν, числа Маха струи M и отношения скоростей звука a / a_e можно свести (с точностью в 1—2%) к зависимости от единственного параметра $\alpha = \nu / \nu_*$. Поэтому все выводы относительно поведения K_p, сделанные для предельного случая $a / a_e = \infty$, переносятся на общий случай. Следует, однако, иметь в виду, что такое положение имеет место только для амплитудных значений возмущений давления, в то время как величины p_1, p_2, входящие в выражение для возмущения давления

$$p' = p_1 \cos \nu\tau + p_2 \sin \nu\tau$$

зависят от a / a_e довольно сильно.

Исследуя выражения для границы струи в предельном случае (3.19), (3.20), замечаем, что при критической частоте ($\alpha = 1$) точки границы струи, соответствующие целым четным значениям координаты z, остаются неподвижными, а максимальный размах колебаний границы имеет место при целых нечетных z; с удалением от среза сопла эти колебания становятся все интенсивнее. Иной тип колебаний осуществляется при $\alpha = 0{,}5$; в этом случае величина Y_1 мала по сравнению с Y_2, а зависимость $Y_2(z)$ близка в среднем к линейной; таким образом, струя совершает периодические колебания вокруг своего невозмущенного положения как единое целое. Зависимость амплитуды колебаний границы струи K_Y от координаты z при $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.5$ приведена на фиг. 6, *в*.



Фиг. 8

Для симметричного случая ($j = 1$) были проведены расчеты в диапазоне $2 \leqslant M \leqslant 4$, $0.5 \leqslant a / a_e \leqslant 2$. Численные исследования позволили установить, что и здесь зависимость коэффициента K_p от определяющих параметров сводится к зависимости от параметра $\alpha = \nu / \nu_*$, где ν_* вычисляется по (3.15) при $n = 1$. Зависимость $K_p(\alpha)$ при $z = 4$ и 5 и $y = 0.5$ и 1 построена на фиг. 7, *а* (по расчету для $M = 3$, $a / a_e = 1$), а на фиг. 7, *б* построена зависимость $K_p(z)$ при тех же y для $\alpha = 1$ и 0.5. Можно видеть, что максимально возможные значения K_p здесь совпадают с соответствующими значениями для антисимметричного случая (4.1). Однако если в антисимметричном случае эти значения достигались в точках, находящихся на периферии струи ($y = 0.5$ при $\alpha = 1$, $y = 0.25$ при $\alpha = 2$), то в симметричном случае это имеет место только для точек средней линии струи $y = 1$. Зависимость $K_p(z)$, как и в антисимметричном случае, является ступенчатой, причем при критической частоте ($\alpha = 1$) с удалением от среза сопла K_p неограниченно растет, а при $\alpha = 0.5$ зависимость $K_p(z)$ близка к периодической.

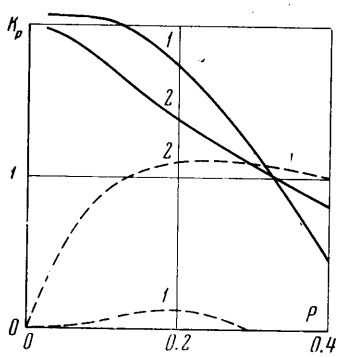
Помимо исследования линейного решения было проведено решение нелинейной задачи о взаимодействии струи с акустическими волнами. При этом полные уравнения газовой динамики решались на ЭЦВМ численным методом. Использованная разностная схема, как показали методические расчеты и сравнение с точными решениями, в среднем удовлетворительно описывает течения газа с поверхностями разрыва при небольших перепадах давления в последних (примерно до 40%).

На фиг. 8 проведено сравнение величины K_p для линейного и нелинейного решений в симметричном случае при $M = 3$, $a / a_e = 0.6$ для $z = 4$, $y = 1$. На границах струи задавалось граничное условие (3.2) с $j = 1$, причем величина P была взята равной $P = 0.1p$, где p — невозмущенное давление в струе. При больших значениях времени t решение становилось периодическим по t и не зависело от начальных данных при $t = 0$. Программа отбирала максимальные и минимальные по времени значения давления в заданных точках струи и вычисляла по ним коэффициенты усиления

$$(K_p)_1 = P^{-1}(p_{\max} - p); \qquad (K_p)_2 = P^{-1}(p - p_{\min}) \tag{4.2}$$

В линейной постановке $(K_p)_1 = (K_p)_2 = K_p$. Для нелинейного решения эти величины заметно отличаются друг от друга (кривые *1* и *2* на фиг. 8). Как и в линейном решении, зависимость K_p от частоты имеет пики в районе критических частот, причем для первой критической частоты ($S = 0.11$) линейное (кривая 0) и нелинейное решение довольно близки. При второй критической частоте ($S_* = 0.33$) для нелинейного решения наблюдается заметное понижение максимума величины K_p по сравнению с первой частотой.

Нелинейное решение дает возможность исследовать зависимость коэффициента усиления возмущений от амплитуды P возмущающего воздействия. Результаты такого исследования представлены на фиг. 9 для антисимметричного случая при $M = 4$, $a / a_c = 0.5$, $S = 1.15 S_* = 0.195$. Построены зависимости $(K_p)_1$ и $(K_p)_2$ (кривые *1* и *2*) от P для $z = 4$, $y = 0.4$ и 1 при $0.025 \leqslant P \leqslant 0.4$. При $y = 0.4$ (сплошная линия), т. е. на периферии струи, с увеличением P значения K_p уменьшаются и даже становятся меньше 1, т. е. в струе происходит не усиление, а ослабление возмущений. Эти результаты подтверждают сделанное в п. 1 предположение о механизме ограничения роста пульсаций в струе. При $y = 1$, т. е. на средней линии струи (пунктир на фиг. 9), величины K_p малы при малых P (в линейном решении они равны нулю в силу антисимметрии). При увеличении P коэффициенты усиления возрастают, а затем, достигнув максимума, начинают убывать. Тот факт, что газодинамические параметры на средней линии струи являются возмущенными, объясняется неэквивалентностью изменения этих параметров в волнах сжатия и разрежения.



Фиг. 9

Поступило 16 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ануфриев В. М., Комаров В. В., Купцов В. М., Мельников Д. А., Сергиенко А. А. Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, вып. 5.
2. Merle M. Emissions acoustiques associees aux jets d'air supersoniques. Journal de Mecanique, 1965, vol. 4, No. 3,
3. Powell A. On the mechanism of choked jet noise. Proc. Phys. Soc., 1953, vol. 66, pt 9, No. 408.
4. Диткин В. В., Кузнецов Н. И. Справочник по операционному исчислению. М., Гостехиздат, 1951.