

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

В. В. АЛЕКСАНДРОВ

(Москва)

Рассматриваются автомодельные постановки задач о движении совершенного излучающе-поглощающего газа. Поле излучения предполагается квазистационарным, вклад излучения во внутреннюю энергию, давление и вязкость среды не учитывается. Предполагается наличие локального термодинамического равновесия. Коэффициент поглощения аппроксимируется степенной функцией давления и плотности. Рассеяние излучения не рассматривается. В этих предположениях существуют автомодельные постановки задач для одномерных нестационарных течений (сильный взрыв, задача о поршне, движение под действием источника излучения и др.) и двумерных стационарных течений (течение в диффузоре, гиперзвуковое обтекание клина и конуса). Показано, что существует нестационарное сферически симметричное течение, зависящее от четырех параметров, которое является адиабатическим, несмотря на наличие излучения.

Работа состоит из семи пунктов. В первом пункте показано, что наличие излучения приводит к появлению новых размерных констант, входящих в уравнения задачи. Второй пункт посвящен автомодельным нестационарным одномерным течениям. В третьем пункте подробно исследуется один из классов таких течений. В частном случае получены адиабатические течения излучающего газа. В четвертом и пятом пунктах анализируются начальные и граничные условия с точки зрения размерности. В шестом пункте описаны автомодельные двумерные стационарные течения излучающе-поглощающего газа. Седьмой пункт содержит замечания об аппроксимациях уравнения переноса.

1. Течения газа при высоких температурах описываются обычной системой уравнений движения газа с учетом выделения лучистого тепла и уравнением лучистого переноса.

В уравнения движения излучающего газа входит объемный коэффициент поглощения κ и постоянная Стефана — Больцмана σ . Если считать, что объемный коэффициент поглощения не зависит от термодинамических параметров, то величина κ^{-1} , равная средней длине пробега фотонов, имеет размерность длины. При этом автомодельная постановка задачи невозможна. Этот случай, однако, нереален. При достаточно высоких температурах и не слишком низких давлениях можно пользоваться степенной аппроксимацией коэффициента поглощения

$$\kappa = c p^\alpha \rho^\beta \quad (1.1)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность газа, α и β — безразмерные постоянные. Постоянная c имеет размерность

$$[c] = M^{-(\alpha+\beta)} L^{\alpha+2\beta-1} T^{2\alpha} \quad (1.2)$$

Входящие в (1.2) символы M , L , T означают размерности массы, длины и времени. Справедливость аппроксимации (1.1) зависит от конкретной задачи и здесь обсуждаться не будет.

Будем предполагать, что газ совершенный. Если величина $B = \alpha + \beta$ равна 0, то коэффициент поглощения

$$\kappa = c R_0^\alpha m_0^{-\alpha} T^\alpha \quad (1.3)$$

зависит только от температуры. В (1.3) через R_0 обозначена универсальная газовая постоянная, а через m_0 — молекулярный вес газа.

Уравнение лучистого переноса с учетом аппроксимации (1.1) для совершенного нерассеивающего газа в предположении локального термодинамического равновесия и квазистационарности поля излучения имеет форму

$$\Omega \operatorname{grad} I + c p^\alpha \rho^\beta I = \frac{ac}{\pi} p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (1.4)$$

Здесь $I(r, \Omega, t)$ — интенсивность излучения, зависящая от положения точки, описываемого радиус-вектором r , направления луча, описываемого единичным вектором Ω , и времени t . Постоянная a выражается через σ , R_0 и m_0 . Если через m обозначить численную величину молекулярного веса в г/мол, то

$$a = \sigma R_0^{-4} m_0^4 = m^4 1,185 \cdot 10^{-36} \text{ г} \cdot \text{см}^{-8} \cdot \text{сек}^5 \quad (1.5)$$

Если течение равновесное невязкое нетеплопроводное и вкладом излучения во внутреннюю энергию, давление и вязкость среды можно пренебречь, то уравнение движения и неразрывности не содержат размерных постоянных, отличных от координат, времени и искомым функций. В уравнение энергии входят дополнительно только постоянные a и c . Размерности величин a и c независимы при любых конечных значениях параметров α и β .

2. В принятых выше предположениях одномерные неустановившиеся движения описываются уравнениями неразрывности, движения, энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.1) \\ \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} - \gamma \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = c(\gamma - 1) p^\alpha \rho^\beta \left(\int_{4\pi} I d\Omega - 4ap^4 \rho^{-4} \right) \end{aligned}$$

и уравнением переноса (1.4), которое имеет различный вид в разных геометриях

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial I}{\partial r} + c p^\alpha \rho^\beta I &= \frac{ac}{\pi} p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (\nu = 1) \\ \sin \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} \right) + c p^\alpha \rho^\beta I &= \frac{ac}{\pi} p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (\nu = 2) \quad (2.2) \\ \cos \theta \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} + c p^\alpha \rho^\beta I &= \frac{ac}{\pi} p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (\nu = 3) \end{aligned}$$

Здесь v — скорость газа, γ — показатель адиабаты; под величиной r подразумевается расстояние от некоторой плоскости в случае плоской симметрии ($\nu = 1$), от оси симметрии в случае цилиндрической симметрии ($\nu = 2$), от центра симметрии в случае сферической симметрии ($\nu = 3$). В плоском и сферическом случаях интенсивность излучения зависит от r , t и угла θ между направлением луча и положительным направлением оси r . В цилиндрическом случае интенсивность зависит также от угла φ , который отсчитывается в плоскости, перпендикулярной к оси r . Интеграл, входящий в уравнение энергии в (2.1), берется по полному телесному углу.

Отвлечемся пока от начальных и граничных условий, которые будут рассмотрены ниже. Если коэффициент поглощения задан степенной функцией (1.1), то скорость, давление и плотность газа зависят только от четырех размерных параметров r , t , a , c и безразмерных параметров γ , ν , α , β . Интенсивность излучения зависит также от безразмерных параметров θ и φ .

Поскольку величины a и c независимы, то могут существовать решения системы (2.1), (2.2), зависящие от одной безразмерной переменной [1]. Вместо величины c удобно ввести такую величину b , что в размерность b символ массы не входит, а символ длины входит в первой степени. Это возможно, если не равна 0 величина

$$A = 7\alpha + 5\beta + 1$$

где A — основной параметр автомодельности.

Тогда

$$b = (a^{\beta}c)^{-1/A}, \quad [b] = LT^{-1+1/A}$$

Если $A = 1$, то размерность b совпадает с размерностью длины, и задача становится неавтомодельной. При $A = 0$ вместо величины b удобно ввести величину b_1 , имеющую размерность времени

$$b_1 = (a^{\beta}c)^{-1}$$

При $A \neq 0$ автомодельная переменная λ может быть введена следующим образом:

$$\lambda = b^{-1}rt^{-1+1/A} \quad (2.3)$$

При $A = 0$ автомодельная переменная τ зависит только от времени

$$\tau = t/b_1 \quad (2.4)$$

Искомые функции можно представить в форме

$$v = rt^{-1}V, \quad \rho = ar^{\beta}t^{-\beta}R, \quad p = ar^{\gamma}t^{-\gamma}P, \quad I = ar^{\delta}t^{-\delta}J \quad (2.5)$$

Здесь величины V, R, P, J безразмерны и зависят от безразмерного аргумента λ при $0 \neq A \neq 1$ или от τ при $A = 0$. Функция J зависит также от θ и φ .

Рассмотрим вначале случай $0 \neq A \neq 1$. Уравнения (2.1), (2.2) с учетом (2.3) и (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda \left[(\delta - V) \frac{dV}{d\lambda} - \frac{1}{R} \frac{dP}{d\lambda} \right] &= V^2 - V + \frac{7P}{R} \\ \lambda \left[-\frac{dV}{d\lambda} + (\delta - V) \frac{1}{R} \frac{dR}{d\lambda} \right] &= -5 + (v + 5)V \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\delta - V) \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{d\lambda} - \frac{\gamma}{R} \frac{dR}{d\lambda} \right) + (7 - 5\gamma)(1 - V) &= \\ &= \frac{(\gamma - 1)\lambda\xi}{P} \left(4 \frac{P^4}{R^4} - \int_{4\pi} J d\Omega \right) \end{aligned}$$

$$\cos \theta \frac{\partial J}{\partial \lambda} + \left(\xi + 8 \frac{\cos \theta}{\lambda} \right) J = \frac{\xi}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 \quad (v = 1) \quad (2.7)$$

$$\sin \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \frac{\sin \varphi}{\lambda} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \right) + \left(\xi + 8 \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\lambda} \right) J = \frac{\xi}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 \quad (v = 2)$$

$$\cos \theta \frac{\partial J}{\partial \lambda} - \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{\partial J}{\partial \theta} + \left(\xi + 8 \frac{\cos \theta}{\lambda} \right) J = \frac{\xi}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 \quad (v = 3)$$

$$\delta = 1 - \frac{1}{A}, \quad \xi = \lambda^{A-1} P^{\alpha} R^{\beta} \quad (2.8)$$

Отметим, что уравнения (2.7) по форме совпадают с соответствующими уравнениями (2.2). Поэтому их можно трактовать как уравнения переноса в среде, коэффициент поглощения которой в каждой точке пространства зависит от направления луча. Уравнения движения и неразрывности из (2.6) совпадают с соответствующими уравнениями для неизлучающего газа [4]. Правая часть уравнения энергии из (2.6) описывает изменение энергии за счет испускания и поглощения излучения газом.

Уравнения (2.6) с соответствующим уравнением из (2.7) и начальными и крайними условиями полностью описывают соответствующую автомодельную задачу.

Если $A = 0$, то уравнения движения, неразрывности и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \tau \frac{dV}{d\tau} + V^2 - V + \frac{7P}{R} &= 0, & \tau \frac{dR}{d\tau} - 5 + (\nu + 5)V &= 0 \\ \tau \left(\frac{\gamma}{R} \frac{dR}{d\tau} - \frac{1}{P} \frac{dP}{d\tau} \right) + (7 - 5\nu)(1 - V) &= \\ &= \frac{2(\gamma - 1)\zeta}{P} \left(4 \frac{P^4}{R^4} - \int_{4\pi} J d\Omega \right) & \zeta = 1/2\tau P^\alpha R^\beta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Уравнения переноса (2.2) переходят в уравнения

$$\begin{aligned} J &= \frac{\zeta}{\pi(\zeta + 4 \cos \theta)} \left(\frac{P}{R} \right)^4 & (\nu = 1) \\ -\sin \theta \sin \varphi \frac{\partial J}{\partial \varphi} + 2(\zeta + 4 \sin \theta \cos \varphi)J &= \frac{2\zeta}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 & (\nu = 2) \\ -\sin \theta \frac{\partial J}{\partial \theta} + 2(\zeta + 4 \cos \theta)J &= \frac{2\zeta}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 & (\nu = 3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Отметим, что в плоском случае уравнение переноса не содержит производной по автомодельной переменной. В плоском случае уравнение переноса вообще не содержит производных, и интенсивность излучения определяется из линейного алгебраического уравнения.

Интенсивность излучения по физическому смыслу является неотрицательной величиной. Вследствие (2.4), (2.5), (2.10) и положительности b_1 в плоском случае должно выполняться неравенство

$$|\zeta| > 4 \quad (2.11)$$

3. Исследуем более подробно случай, когда автомодельная переменная отличается от времени только размерным множителем. Граничные условия в этом случае отсутствуют, так как граница должна задаваться условием $\tau = \text{const}$, а переменная r в определении τ не входит. Поэтому движение происходит во всем пространстве. Рассмотрим последовательно случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

В плоском случае переменная r принимает положительные и отрицательные значения. Из (2.5) следует, что при $t > 0$ в силу положительности ρ , p и a должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} t^{-5}R(t/b_1) \geq 0, & \quad t^{-1}P(t/b_1) \geq 0 & (r > 0) \\ t^{-5}R(t/b_1) \leq 0, & \quad t^{-1}P(t/b_1) \leq 0 & (r < 0) \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует, что $R = P \equiv 0$. Другими словами, в плоском случае при $A = 0$ автомодельных движений не существует.

В цилиндрически симметричном случае ($\nu = 2$) уравнение (2.10) можно проинтегрировать

$$J = -\frac{2\zeta}{\pi \sin \theta} \left(\frac{P}{R}\right)^4 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi_1}{\sin \varphi_1} \exp \left\{ 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \left(4 \operatorname{ctg} \varphi_2 + \frac{\zeta}{\sin \theta \sin \varphi_2} \right) d\varphi_2 \right\} + \\ + J(\tau, \theta, \varphi_0) \exp \left\{ 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(4 \operatorname{ctg} \varphi_2 + \frac{\zeta}{\sin \theta \sin \varphi_2} \right) d\varphi_2 \right\} \quad (3.1)$$

Здесь φ_0 — некоторый угол, а $J(\tau, \theta, \varphi_0)$ — величина J , заданная при $\varphi = \varphi_0$. Вычисляя экспоненту, входящую в (3.1), получаем величину второго слагаемого в (3.1)

$$J(\tau, \theta, \varphi_0) \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right)^8 \left(\frac{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_0} \right)^{2l}, \quad l = \zeta \operatorname{csc} \theta \quad (3.2)$$

Учитывая (3.2) и применяя подстановку $x = \operatorname{ctg}^{1/2} \varphi$, сведем первый интеграл, входящий в (3.1), к интегралу от суммы степенных функций. Окончательно получим

$$J(\tau, \theta, \varphi) = J(\tau, \theta, \varphi_0) \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right)^8 \left(\frac{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_0} \right)^{2l} + \\ + \frac{2^{-8}\zeta}{\pi \sin \theta} \left(\frac{P}{R}\right)^4 (\sin \varphi)^8 (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi)^{2l} \times \\ \times \sum_{s=-4}^4 \binom{8}{s+4} \frac{(\operatorname{ctg}^{1/2} \varphi)^{2(s+l)} - (\operatorname{ctg}^{1/2} \varphi_0)^{2(s+l)}}{s+l}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{4\pi} J d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J(\tau, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \operatorname{csc}^8 \varphi_0 \int_0^{\pi} J(\tau, \theta, \varphi_0) \times \\ \times (\operatorname{ctg}^{1/2} \varphi_0)^{2l} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^8 \varphi (\operatorname{tg}^{1/2} \varphi)^{2l} d\varphi + \frac{2^{-8}\zeta}{\pi} \left(\frac{P}{R}\right)^4 \times \\ \times \sum_{s=-4}^4 \left\{ \binom{8}{s+4} \left[\int_0^{2\pi} \sin^8 \varphi (\operatorname{ctg}^{1/2} \varphi)^{2s} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{s+l} - \right. \right. \quad (3.3) \\ \left. \left. - (\operatorname{ctg}^{1/2} \varphi_0)^{2s} \int_0^{2\pi} \sin^8 \varphi d\varphi \int_0^{\pi} \frac{(\operatorname{tg}^{1/2} \varphi \operatorname{ctg}^{1/2} \varphi_0)^{2l}}{s+l} d\theta \right] \right\}$$

Вычислим последний интеграл, входящий в (3.3). Для этого проведем вначале интегрирование по θ , а потом по φ . Внутренний интеграл подстановкой $x = \operatorname{csc} \theta$ сводится к интегралу

$$2 \int_1^{\infty} \frac{e^{2\zeta x \ln y} dx}{x(s + \zeta x) \sqrt{x^2 - 1}} \quad y = \left| \frac{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_0} \right|$$

Этот интеграл сходится при условии, что

$$-1 \leq \operatorname{tg}^{1/2} \varphi \operatorname{ctg}^{1/2} \varphi_0 \leq 1$$

Так как φ изменяется от 0 до 2π , то никаким выбором φ_0 , кроме $\varphi_0 = \pi$, нельзя удовлетворить последнему неравенству. Если интегрировать сначала по φ , а потом по θ , то соответствующий внутренний интеграл будет сходиться при условии

$$\zeta < \frac{1}{2} \sin \theta \quad (3.4)$$

или, что то же самое, при $\zeta = 0$. При этом правая часть уравнения энергии тождественно равна 0, и излучение не влияет на движение. Поэтому положим $\varphi_0 = \pi$. Обозначим через j предел

$$j(\tau, \theta) = \lim_{\varphi_0 \rightarrow \pi} J(\tau, \theta, \varphi_0) (\sin \varphi_0)^{-8} (\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_0)^{2l}$$

Внутренний интеграл первого интеграла в (3.3) сходится при условии (3.4). Значит нужно положить $j = 0$. Учитывая это, получаем, что функция J равна

$$J = \frac{2^{-8} \zeta}{\pi \sin \theta} \left(\frac{P}{R} \right)^4 (\sin \varphi)^8 \sum_{s=-4}^4 \left\{ \binom{8}{s+4} \frac{(\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi)^{2s}}{s+l} \right\} \quad (3.5)$$

а в правой части (3.3) только второй интеграл отличен от нуля. Внутренний интеграл второго двойного интеграла в (3.3) подстановкой $x = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi$ сводится к интегралу

$$4 \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 1)(\zeta x^2 + 2sx + \zeta)} \quad (3.6)$$

Интеграл (3.6) сходится, если знаменатель подынтегральной функции имеет комплексные корни. Это требование выполняется при условии, что

$$|\zeta| > 4 \quad (3.7)$$

Неравенство (3.7) напоминает неравенство (2.11) для плоского случая. Интеграл (3.6) равен

$$\frac{\pi}{s} \left[1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \right) \right] \quad (s \neq 0),$$

$$2\zeta^{-1} \quad (s = 0)$$

Внешний интеграл вычисляется независимо от внутреннего. Та же подстановка сводит его к интегралу

$$2^{10} \int_0^{\infty} \frac{x^{2(s+4)} dx}{(x^2 + 1)^9}$$

который согласно [2] равен

$$(-1)^s \frac{2\pi}{8!} (49 - 4s^2)(25 - 4s^2)(9 - 4s^2)(1 - 4s^2) > 0 \quad \text{при } s = 0, \dots, 4$$

При вычислении последнего интеграла были использованы следующие соотношения для В- и Г-функций Эйлера [2]:

$$B(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1 + x_2)}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(1/2 + s)\Gamma(1/2 - s) = (-1)^s \pi$$

Окончательно получим

$$\int_{4\pi} J d\Omega = 4 \left(\frac{P}{R} \right)^4 \left(\frac{1225}{16384} + 2\zeta^2 \sum_{s=1}^4 \frac{a_s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \right) \quad (3.8)$$

$$a_s = \frac{(-1)^s}{s(4+s)!(4-s)!} \left(\frac{49}{4} - s^2 \right) \left(\frac{25}{4} - s^2 \right) \left(\frac{9}{4} - s^2 \right) \left(\frac{1}{4} - s^2 \right)$$

Учитывая (3.8), перепишем уравнение энергии (2.9)

$$\tau \left(\frac{\gamma}{R} \frac{dR}{d\tau} - \frac{1}{P} \frac{dP}{d\tau} \right) + (7 - 5\gamma)(1 - V) = \frac{8(\gamma - 1)\zeta P^3}{R^4} f(\zeta) \quad (3.9)$$

$$f(\zeta) = \frac{15\,159}{16\,384} - 2\zeta^2 \sum_{s=1}^4 \frac{a_s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \quad (3.10)$$

Функция (3.10) — четная. При $|\zeta| \rightarrow 4 + 0$ функция $f \rightarrow -\infty$ и при $|\zeta| \rightarrow \infty$ $f \rightarrow 0$. Производная функция f равна

$$\frac{df}{d\zeta} = 2\zeta \sum_{s=1}^4 \frac{a_s}{\zeta^2 - s^2} \left(\frac{2s^2 - \zeta^2}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\sqrt{\zeta^2 - s^2}} + s \right) \quad (3.11)$$

Можно показать, что каждый член суммы (3.11) положителен при $|\zeta| > 4$. Значит функция $f(\zeta)$ монотонно увеличивается при увеличении $|\zeta|$ от 4 до ∞ , и

$$-\infty < f(\zeta) < 0 \quad (3.12)$$

В сферически симметричном случае ($\nu = 3$) общее решение уравнения (2.10) выглядит следующим образом:

$$J = \frac{2\zeta}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu_1}{1 - \mu_1^2} \exp \left\{ -2 \int_{\mu_1}^{\mu} \frac{\zeta + 4\mu_2}{1 - \mu_2^2} d\mu_2 \right\} +$$

$$+ J(\tau, \mu_0) \exp \left\{ -2 \int_{\mu_0}^{\zeta} \frac{\zeta + 4\mu_2}{1 - \mu_2^2} d\mu_2 \right\} \quad (3.13)$$

$$\mu = \cos \theta, \quad \mu_0 = \cos \theta_0$$

Второе слагаемое в (3.13) равно

$$J(\tau, \mu_0) (\operatorname{ctg}^1/2\theta \operatorname{tg}^1/2\theta_0)^{2\zeta} (\sin \theta \operatorname{csc} \theta_0)^8 \quad (3.14)$$

Учитывая (3.14) и применяя подстановку $x = (1 - \mu_1) / (1 + \mu_1)$, сведем подынтегральное выражение первого интеграла к сумме степенных функций. Окончательно

$$J = \frac{\zeta}{\pi} \left(\frac{P}{R} \right)^4 (\operatorname{tg}^1/2\theta)^{2(\zeta-4)} \sum_{s=4}^4 \binom{8}{s+4} \frac{(\operatorname{ctg}^1/2\theta)^{2(s+\zeta)} - (\operatorname{ctg}^1/2\theta_0)^{2(s+\zeta)}}{s + \zeta} +$$

$$+ J(\tau, \mu_0) (\operatorname{ctg}^1/2\theta \operatorname{tg}^1/2\theta_0)^{2\zeta} (\sin \theta \operatorname{csc} \theta_0)^8 \quad (3.15)$$

Если $\zeta = q$ — целому числу — и если для некоторого s сумма $s + q$ равна нулю, то s -й член суммы в (3.15) равен

$$\binom{8}{s+4} \ln \left(\frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0} \right)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} J d\Omega = & 2\pi J(\tau, \mu_0) \operatorname{ctg}^{2\zeta} 1/2\theta_0 \operatorname{csc}^8 \theta_0 \int_0^\pi \operatorname{tg}^{2\zeta} 1/2\theta \sin^9 \theta d\theta + \\ & + 2^{-7\zeta} \left(\frac{P}{R} \right)^4 \sum_{s=-4}^4 \binom{8}{s+4} \frac{1}{s+\zeta} \left[\int_0^\pi \operatorname{ctg}^{2s} 1/2\theta \sin^9 \theta d\theta - \right. \\ & \left. - (\operatorname{ctg} 1/2\theta)^{2(s+\zeta)} \int_0^\pi \operatorname{tg}^{2\zeta} 1/2\theta \sin^9 \theta d\theta \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Все интегралы в (3.16) берутся указанной выше подстановкой. Второй интеграл равен

$$2^9 \int_0^\infty \frac{x^{4+s} dx}{(x+1)^{10}} = \frac{2^9}{9} \binom{8}{s+4}^{-1}$$

Первый и третий интегралы сводятся к интегралу

$$2^9 \int_0^\infty \frac{x^{4-\zeta} dx}{(x+1)^{10}} \quad (3.17)$$

который сходится при

$$|\zeta| < 5 \quad (3.18)$$

Интеграл (3.17) равен [2]

$$\frac{2^9 \pi}{9!} \zeta (\zeta^2 - 1) (\zeta^2 - 4) (\zeta^2 - 9) (\zeta^2 - 16) \operatorname{csc}(\pi \zeta)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} J d\Omega = & 2^{10} \pi^2 (9!)^{-1} \operatorname{ctg}^{2\zeta} 1/2\theta_0 \operatorname{csc}^8 \theta_0 \psi(\zeta) J(\tau, \mu_0) + \\ & + \frac{4}{9} \zeta \left(\frac{P}{R} \right)^4 \sum_{s=-4}^4 \frac{1}{s+\zeta} \left[1 - \frac{\pi \psi(\zeta) (\operatorname{ctg} 1/2\theta_0)^{2(s+\zeta)}}{(4-s)!(4+s)!} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\psi(\zeta) = \zeta (\zeta^2 - 1) (\zeta^2 - 4) (\zeta^2 - 9) (\zeta^2 - 16) \operatorname{csc} \pi \zeta, \quad \psi(\zeta) = \psi(-\zeta) \quad (|\zeta| < 5)$$

Используя (3.19), запишем уравнение энергии (2.9)

$$\begin{aligned} \tau \left(\frac{\gamma}{R} \frac{dR}{d\tau} - \frac{1}{P} \frac{dP}{d\tau} \right) + (7 - 5\gamma) (1 - V) = & 8(\gamma - 1) \zeta P^3 R^{-4} \times \\ \times [g(\mu_0, \zeta) - 2^8 \pi^2 (9!)^{-1} R^4 P^{-4} \psi(\zeta) \operatorname{ctg}^{2\zeta} 1/2\theta_0 \operatorname{csc}^8 \theta_0 J(\tau, \mu_0)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Функция g при нецелых значениях ζ равна

$$g(\mu_0, \zeta) = 1 - \frac{\zeta}{9} \sum_{s=-4}^4 \left\{ \frac{1}{s+\zeta} \left[1 - \frac{\pi}{(4-s)!(4+s)!} \left(\frac{1+\mu_0}{1-\mu_0} \right)^{s+\zeta} \psi(\zeta) \right] \right\}$$

При целых значениях $\zeta = q$ эта функция имеет устранимые особенности. Раскрывая возникающие неопределенности, получаем

$$g(\mu_0, q) = 1 - \frac{q}{9} \left\{ h_q + \ln \frac{1-\mu_0}{1+\mu_0} + \sum_{s=-4}^4 \frac{1}{s+q} \left[1 - \frac{(4+q)!(4-q)!}{(4+s)!(4-s)!} \left(\frac{1+\mu_0}{1-\mu_0} \right)^{s+q} \right] \right\}$$

$$h_1 = -\frac{9}{20}, \quad h_2 = -\frac{19}{20}, \quad h_3 = -\frac{223}{140}, \quad h_4 = -\frac{761}{280}$$

Индекс q у знака суммы означает, что в сумму не входит q -й член.

Отметим, что $g(\mu_0, -\zeta) = g(-\mu_0, \zeta)$. Поэтому функцию g достаточно исследовать только для положительных ζ . При $0 < \zeta < 5$ и $\mu_0 = -1$ функция g отрицательна, а при $\mu_0 \rightarrow 1 - 0$ она стремится к бесконечности.

Частная производная $\partial g / \partial \mu_0$ положительна для всех значений μ_0 . Значит уравнение $g(\mu_0, \zeta) = 0$ определяет однозначную функцию $\mu_0 = \mu_0(\zeta)$ такую, что

$$g[\mu_0(\zeta), \zeta] \equiv 0, \quad g(\mu_0, \zeta) \geq 0 \\ \text{при } \mu_0 \geq \mu_0(\zeta), \quad 0 < \zeta < 5$$

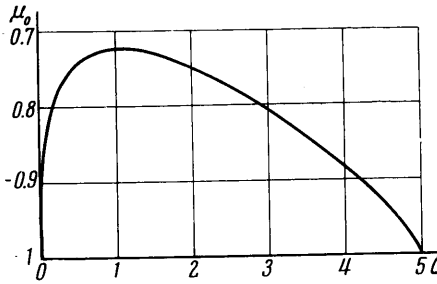


График функции $\mu_0(\zeta)$ представлен на фигуре.

Если газ не излучает, то правая часть уравнения (3.20) и исходного уравнения энергии в системе (2.1) равна 0. Л. И. Седовым найдено решение такой системы уравнений (2.1), зависящее от одной произвольной функции и трех произвольных постоянных. Эти решения содержат в качестве частного случая автомодельные движения, в которых автомодельная переменная не зависит от координаты r .

В рассматриваемом случае упомянутая выше произвольная функция определяется, и при $\nu = 3$ эти автомодельные решения имеют вид

$$d\tau = \pm \eta^{-2} [C_1 + C_2 \eta^{3(\nu-1)}]^{-1/2} d\eta, \quad R = 7C_3 \tau^5 \eta^8 \\ V = \mp \tau \eta [C_1 + C_2 \eta^{3(\nu-1)}]^{1/2}, \quad P = 3/2 (\nu - 1) C_2 C_3 \tau^7 \eta^{7+3\nu} \quad (3.21)$$

Здесь C_1, C_2, C_3 — постоянные, функцию η можно считать положительной.

По величинам P и R , определенным формулами (3.21), построим величину ζ

$$\zeta = 2^{-(1+\alpha)} 3^{\alpha} 7^{-1/\alpha} (7\alpha+1) (\nu-1)^\alpha C_2^\alpha C_3^{-1/\alpha} \tau^{2\alpha+1} \eta^{1/\alpha} [3\alpha(5\nu-7)-8] \quad (3.22)$$

Из (3.22) видно, что ζ не зависит явным образом от переменной τ . Если $\nu \neq 7/5$, то, полагая

$$\alpha = \frac{8}{3(5\nu-7)} \quad (3.23)$$

получим, что $\zeta = \text{const}$.

Положим

$$J(\tau, \mu_0) = \frac{9!}{2^8 \pi^2} \left(\frac{R}{P} \right)^4 \frac{g(\mu_0, \zeta)}{\psi(\zeta)} (1 + \mu_0)^{4-\zeta} (1 - \mu_0)^{4+\zeta} \quad (3.24)$$

Здесь под R и P понимаются величины, определенные формулами (3.21). Интенсивность излучения неотрицательна. Из (2.5) и положительности функции ψ следует, что величина μ_0 должна быть выбрана большей, чем $\mu_0(\zeta)$.

При выполнении условий (3.23) и (3.24) правая часть уравнения энергии тождественно равна 0. Это означает, что поток лучистого тепла не оказывает влияния на течение газа и решение дается формулами (3.21). При фиксированном значении показателя адиабаты решение зависит от четырех параметров: C_1, C_2, C_3 и μ_0 .

Такие движения являются адиабатическими, несмотря на передачу энергии излучением. Они характеризуются тем, что в каждой точке пространства в любой момент времени количество энергии, поглощенной элементом объема, равно количеству энергии, излученной этим элементом.

Из положительности давления и плотности и представления (2.5) следует, что

$$C_2 > 0, \quad C_3 > 0 \quad (3.25)$$

Из (3.25) при условии (3.23) следует, что величина ζ , определенная формулой (3.22), положительна. Условие (3.18) приводит к требованию

$$C_2^8 C_3^{1-3\gamma} < 2^{15\gamma-13} 3^{-8} 5^{3(5\gamma-7)} 7^{3\gamma+7} (\gamma-1)^{-8} \quad (3.26)$$

Постоянная C_1 может быть произвольной.

Таким образом, решение, определенное формулами (3.21) является решением уравнений, описывающих течение излучающего газа, при выполнении условий (3.23) — (3.26) и неравенства

$$\mu_0 \geq \mu_0(\zeta) \quad (3.27)$$

Согласно [1] при $C_1 > 0$ такое решение описывает разлет частиц из центра симметрии, а при $C_1 < 0$ — пульсирующее периодическое движение газа.

Отметим, что адиабатические течения возможны только в сферически симметричном случае, так как в случае плоской симметрии решение вообще не существует, а в цилиндрически симметричном случае правая часть уравнения энергии согласно (3.12) всегда отлична от нуля.

В общем случае систему уравнений (2.9) и (3.9) в цилиндрическом случае или (3.20) в сферическом случае можно свести к одному дифференциальному уравнению третьего порядка. Из (2.9) следует, что

$$V = \frac{1}{(\nu+5)R} \left(5R - \tau \frac{dR}{d\tau} \right) \quad (3.28)$$

$$P = \frac{1}{7(\nu+5)^2 R} \left[5\nu R^2 + 10\tau R \frac{dR}{d\tau} - (\nu+6)\tau^2 \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 + (\nu+5)\tau^2 R \frac{d^2 R}{d\tau^2} \right]$$

$$\zeta = {}^{1/2} 7^{-\alpha} (\nu+5)^{-2\alpha} \tau R^{-2\alpha} \left[5\nu R^2 + 10\tau R \frac{dR}{d\tau} - (\nu+6)\tau^2 \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 + (\nu+5)\tau^2 R \frac{d^2 R}{d\tau^2} \right]^\alpha$$

Подставляя V , P и ζ из (3.28) в (3.9) при $\nu = 2$ или в (3.20) при $\nu = 3$, получаем уравнение третьего порядка относительно функции R . При $\nu = 3$ константа μ_0 может изменяться от -1 до 1 , а функция $J(\lambda, \mu_0)$ должна быть выбрана положительной.

4. Рассмотрим вначале задачу с начальными условиями, заданными в момент времени $t = 0$, такую, что во все последующие моменты времени движение будет автомодельным. Начальные распределения функций v , p , ρ , I зависят только от величин a , b , r . Из соображений размерности следует, что при $t = 0$

$$\begin{aligned} v_0 &= d_1 (b^A r^{-1})^{1/(A-1)}, & \rho_0 &= d_2 a (b^A r^{-1})^{5/(A-1)} \\ p_0 &= d_3 a (b^A r^{-1})^{7/(A-1)}, & I_0 &= d_4 a (b^A r^{-1})^{8/(A-1)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где d_1, \dots, d_4 — безразмерные постоянные.

Пусть в рассматриваемую задачу входит величина с размерностью энергии при $\nu = 3$ или с размерностью энергии, рассчитанной на единицу длины при $\nu = 2$ или единицу площади при $\nu = 1$. Величину с этой размерностью, $ML^{\nu-1}T^{-2}$, можно составить из параметров a и b только в том случае, когда

$$A = 1 + 7/\nu \quad (4.2)$$

Нетрудно убедиться, что из a и b ни при каких значениях α и β нельзя образовать величин с размерностями плотности и давления. Если, однако, начальная плотность задана по закону $\rho = c_\rho r^{-\alpha}$, $c_\rho = \text{const}$, то задача будет автомодельной при условии

$$A = 1 + 5/\omega \quad (4.3)$$

Из a и b нельзя также образовать величин с размерностями скорости и интенсивности излучения. Но если задана скорость границы потока, зависящая от времени по степенному закону, $w = c_w t^n$, $c_w = \text{const}$, то задача будет автомодельна при условии

$$A = -1/n \quad (4.4)$$

Аналогично при наличии источника излучения с интенсивностью $I = c_I t^m$, $c_I = \text{const}$ автомодельность сохраняется при выполнении равенства

$$A = -8/m \quad (4.5)$$

Если существенно влияние гравитационных сил, то в качестве определяющего параметра появится гравитационная постоянная с размерностью $M^{-1}L^3T^{-2}$. Величину такой размерности можно образовать, если $A = 5/2$.

Если течение вязкое и теплопроводное, то к определяющим параметрам добавятся коэффициент вязкости μ и коэффициент теплопроводности k . Коэффициент теплопроводности войдет в уравнение энергии в комбинации $kt_0 R_0^{-1}$. Размерности этой комбинации и коэффициента вязкости равны $ML^{-1}T^{-1}$. Величину такой размерности можно образовать, если

$$A = 7$$

Если μ и k являются степенными функциями от давления и температуры

$$\mu = c_\mu p^{\alpha_1} \rho^{\beta_1}, \quad k = c_k p^{\alpha_2} \rho^{\beta_2} \quad (c_k, c_\mu, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 - \text{константы})$$

то автомодельные движения возможны при

$$A = -7\alpha_1 - 5\beta_1 + 7 = -7\alpha_2 - 5\beta_2 + 7 \quad (4.6)$$

Величину с размерностью расхода MT^{-1} можно образовать, если $A = 4$, а величину с размерностью массы — при условии, что $A = 8/3$.

5. Рассмотрим возможные автомодельные движения, исключая те, в которых начальные значения всех функций заданы формулами (4.1).

Так как из a и b нельзя образовать величину с размерностью давления, то в начальный момент времени распределение давления должно задаваться степенной функцией (4.1). Если $d_3 \neq 0$, то при $A < 1$ начальное давление в центре равно 0, а при $A > 1$ — бесконечности.

Другую возможность представляют течения, ограниченные сильной ударной волной, идущей по абсолютно холодному газу. Условия на сильной ударной волне совпадают с обычными и не содержат давления перед ударной волной. Излучение не будет влиять на газ, находящийся вне области, по которой уже прошла ударная волна при условии, что $\alpha > 0$. Это вытекает из (1.1) и уравнения состояния, так как при $\alpha > 0$ абсолютно холодный газ абсолютно прозрачен.

Задача о сильном взрыве. В начальный момент времени в покоящемся абсолютно холодном газе мгновенно выделяется энергия E_0 . Последующее движение будет автомодельным, если выполняется условие (4.2) и $\omega = 5\nu/7$.

Это означает, что начальная плотность газа должна убывать пропорционально $r^{-3/\nu}$, $r^{-10/\nu}$ и $r^{-15/\nu}$ в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях соответственно. Величина A должна быть равна

$$A = 8 \text{ при } \nu = 1, \quad A = 9/2 \text{ при } \nu = 2, \quad A = 10/3 \text{ при } \nu = 3$$

Учитывая (4.2), за автомодельную переменную можно принять величину

$$\lambda = \lambda_0 b^{-1} r t^{-7/(\nu+7)}$$

Здесь λ_0 — безразмерная постоянная, которую можно положить равной величине λ на ударной волне. Тогда закон распространения фронта сильной ударной волны будет задаваться формулой

$$r_s = b t^{7/(\nu+7)}$$

Скорость w_s распространения ударной волны равна

$$w_s = \frac{dr_s}{dt} = \frac{7b}{\nu+7} t^{-\nu/(\nu+7)}$$

Без потери автомодельности в задачу можно ввести поршень, выдвигающийся из центра со скоростью

$$w = c_0 t^{-\nu/(\nu+7)}$$

и источник излучения, интенсивность которого изменяется по закону

$$I = c_1 t^{-8\nu/(\nu+7)}$$

Известно, что для этой задачи существует интеграл энергии. Его легко получить методом, изложенным в книге [1]

$$\lambda^{\nu+7} \left[PV + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J(\lambda, \theta, \varphi) \sin \theta \cos \theta d\theta + \right. \\ \left. + \left(V - \frac{7}{\nu+7} \right) \left(\frac{RV^2}{2} + \frac{P}{\nu-1} \right) \right] = \text{const}$$

Задача о поршне. Из центра выдвигается поршень, скорость которого изменяется по закону $w = c_0 t^n$. Задача автомодельна при условии (4.4). Если газ абсолютно холодный, то для образования сильной ударной волны необходимо, чтобы n было отрицательно, или $A > 0$.

Начальная плотность должна быть задана по закону

$$\rho_0 = c_\rho r^{-5n/(n+1)}$$

Допустимо включение в задачу источника излучения, если $m = 8n$.

Движение газа под действием источника излучения. В момент времени $t = 0$ в центре включается источник излучения, интенсивность которого изменяется по закону $I = c_\rho t^m$. Движение автомодельно, если выполняется условие (4.5). Если вначале газ абсолютно холодный, то для образования сильной ударной волны необходимо, чтобы $A > 0$. Источник излучения будет испускать конечную энергию за конечное время, если $A > 8$.

Движение газа в поле собственной силы тяжести. Такое движение автомодельно, если $A = 5/2$. Начальная плотность газа должна быть задана по закону

$$\rho_0 = c_\rho r^{-10/3}$$

Истечение газа из центра. В момент времени $t = 0$ в центре включается точечный источник газа постоянной мощности. Движение автомодельно, если $A = 4$. Если истечение газа происходит не в вакууме, то начальная плотность газа должна быть задана по закону

$$\rho_0 = c_\rho r^{-5/3}$$

Очевидно, что можно также рассмотреть задачу, в которой интенсивность источника массы зависит от времени по степенному закону.

Разлет массы из центра. В начальный момент времени в начале координат возникает конечная масса газа, имеющая нулевой объем. Последующий разлет этого газа может быть автомодельным движением, если $A = 8/3$.

В рассмотренных выше задачах можно считать течение вязким и теплопроводным, если выполняются условия (4.6). При этом ударная волна не образуется и начальное давление должно быть задано по степенному закону (4.1), в котором постоянная d_2 может быть, в частности, равна 0.

Отметим также, что условия для интенсивности излучения на границах течения не должны содержать независимых от a и b размерных постоянных.

6. Рассмотрим плоские ($\nu = 1$) и осесимметричные ($\nu = 2$) движения невязкого нетеплопроводного совершенного газа. Они описываются системой уравнений газовой динамики с учетом лучистого тепловыделения.

$$\frac{\partial r^{\nu-1} \rho u}{\partial x} + \frac{\partial r^{\nu-1} \rho v}{\partial r} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (6.1)$$

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} - \gamma \frac{p}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = (\gamma - 1) c p^\alpha \rho^\beta \left(\int_{4\pi} I d\Omega - 4ap^4 \rho^{-4} \right)$$

и уравнением переноса излучения

$$\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial I}{\partial x} + c p^\alpha \rho^\beta I = \pi^{-1} a c p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (\nu = 1) \quad (6.2)$$

$$\sin \theta \left(\cos \varphi \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} \right) + \cos \theta \frac{\partial I}{\partial x} + c p^\alpha \rho^\beta I = \pi^{-1} a c p^{\alpha+4} \rho^{\beta-4} \quad (\nu = 2) \quad (6.3)$$

Здесь u и v — проекции вектора скорости на оси x и r ; θ — угол между вектором Ω и осью x ; φ — угол между осью r и проекцией вектора Ω на плоскость, перпендикулярную оси x ; остальные обозначения прежние.

Если $A \neq 1$, то автомодельная переменная χ равна

$$\chi = r/x \quad (6.4)$$

Искомые функции представляются в форме

$$\begin{aligned} u &= (a^{\beta} cr)^{1/(1-A)} U(\chi), & v &= (a^{\beta} cr)^{1/(1-A)} V(\chi) \\ \rho &= (a^{-2\alpha} c^5 r^5)^{1/(1-A)} R(\chi), & p &= (a^{2\beta} c^7 r^7)^{1/(1-A)} P(\chi) \\ I &= (a^{\alpha+3\beta} c^8 r^8)^{1/(1-A)} J(\chi, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Используя (6.4) и (6.5), запишем уравнения (6.1) — (6.3) в форме

$$\begin{aligned} \chi \left[-\frac{dV}{d\chi} + \chi \frac{dU}{d\chi} + (\chi U - V) \frac{1}{R} \frac{dR}{d\chi} \right] &= \frac{A(1-v) + 5 + v}{1-A} V \\ \chi \left[(\chi U - V) \frac{dU}{d\chi} + \frac{\chi}{R} \frac{dP}{d\chi} \right] &= \frac{UV}{1-A} \\ \chi \left[(\chi U - V) \frac{dV}{d\chi} - \frac{1}{R} \frac{dP}{d\chi} \right] &= \frac{1}{1-A} \left(V^2 + \frac{7P}{R} \right) \\ \chi(\chi U - V) \left(\frac{1}{P} \frac{dP}{d\chi} - \frac{\gamma}{R} \frac{dR}{d\chi} \right) - \frac{7-5\gamma}{1-A} V &= \\ &= (\gamma - 1) P^{\alpha-1} R^{\beta} \left(4P^4 R^{-4} - \int_{4\pi} J d\Omega \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \chi(\sin \theta \cos \varphi - \chi \cos \theta) \frac{\partial J}{\partial \chi} + \left(P^{\alpha} R^{\beta} + \frac{8 \sin \theta \cos \varphi}{1-A} \right) J &= \\ = \pi^{-1} P^{\alpha+4} R^{\beta-4} \quad (\nu = 1) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\chi(\sin \theta \cos \varphi - \chi \cos \theta) \frac{\partial J}{\partial \chi} - \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial J}{\partial \varphi} +$$

$$+ \left(P^{\alpha} R^{\beta} + \frac{8 \sin \theta \cos \varphi}{1-A} \right) J = \pi^{-1} P^{\alpha+4} R^{\beta-4} \quad (\nu = 2)$$

Отметим сходство уравнений (6.6) с уравнениями (2.6), полученными для нестационарных течений. Уравнения переноса (6.7) в отличие от нестационарного случая не совпадают по форме с исходными уравнениями.

Отметим две задачи, которые могут быть описаны системой (6.6), (6.7).

Течение в диффузоре. В центре или в бесконечности имеется источник газа с постоянным расходом. Газ течет внутри двугранного угла ($\nu = 1$) или внутри конуса ($\nu = 2$) с вершиной в центре. Задача автомодельна, если $A = 4$.

Гиперзвуковое обтекание клина и конуса. Абсолютно холодный газ, плотность и скорость которого являются степенными функциями от координаты r , движущийся с большой сверхзвуковой скоростью, набегаем под нулевым углом атаки на клин ($\nu = 1$) или конус ($\nu = 2$). Тело должно

быть достаточно тонким, чтобы ударная волна была присоединенной. Ударная волна будет плоской в плоском случае и конической в осесимметричном случае.

Условия для излучения на теле не должны содержать независимых размерных постоянных. Если течение вязкое и теплопроводное, то автомодельность сохраняется при условиях (4.6).

7. Выше всюду рассматривалось точное уравнение переноса. При использовании приближений объемного высвечивания или лучистой теплопроводности вместо пары параметров a и c остается только один параметр. Это расширяет класс возможных автомодельных решений за счет более грубого описания процесса излучения.

При аппроксимации уравнения переноса методом сферических гармоник задача содержит те же размерные величины, что и при наличии точного уравнения переноса.

Задача остается автомодельной при зависимости коэффициента поглощения от частоты излучения, если появляющиеся размерные величины можно выразить через постоянные a и c . Наличие характерной частоты, например, приводит к требованию $A = 0$.

Поступила 21 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 6. М., «Наука», 1967.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.