

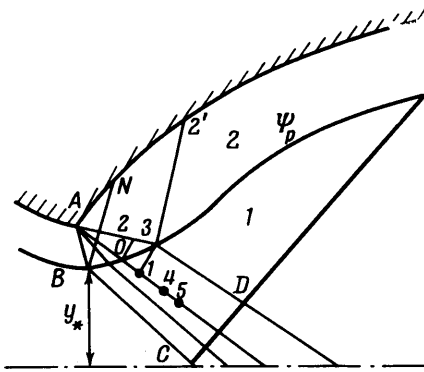
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В СВЕРХЗВУКОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ

У. Г. ПИРУМОВ

(Москва)

Описаны два метода расчета двухслойных течений. Первый представляет собой обобщение численного метода, решения обратной задачи [1] на случай двухслойных течений без учета смешения. Второй — метод характеристик для расчета двухслойного течения в сверхзвуковом сопле. При этом обычный метод характеристик видоизменен таким образом, что позволяет рассчитать точку на линии раздела слоев, имеющих различные показатели адиабаты, различные полные давления и температуры. В работе представлены также результаты расчета двухслойных течений в соплах с различными показателями адиабаты и отношениями расходов газа в слоях.

1. В работе [1] для расчета до- и сверхзвукового безвихревого, изэнтропического течения идеального газа использовалась система уравнений газовой динамики, записанная в переменных ψ (функция тока) и x (декартова координата в меридиальной плоскости). Поле течения определялось



Фиг. 1

в результате численного решения обратной задачи теории сопла. В координатах ψ, x удобно проводить расчеты многослойных течений с различными физическими свойствами. Такой расчет можно провести в рамках идеальной жидкости без учета смешения слоев, при этом полные температуры, полные давления и показатели адиабаты в слоях могут быть различными. Будем обозначать параметры ядра потока нижним индексом 1, а параметры пристеночного слоя — индексом 2 (фиг. 1). Пусть до некоторой линии тока $\psi = \psi_p$ газ имеет показатель адиабаты $k = k_1$ и полное давление p_{01} , а начиная с этой линии

тока — показатель адиабаты $k = k_2$ и полное давление p_{02} . На линии тока $\psi = \psi_p$ оба потока должны иметь одинаковые углы наклона скорости и одинаковые значения статического давления.

В связи с этим на линии тока $\psi = \psi_p$ должны быть выполнены следующие соотношения:

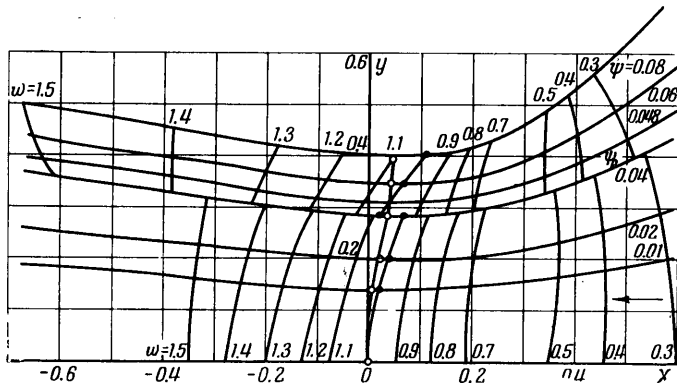
$$p_2 = \left(\frac{k_2 + 1}{2} \right)^{k_2 / (k_2 - 1)} \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} w_1^2 \right]^{k_1 / (k_1 - 1)} \quad \left(\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} \right) \quad (1.1)$$

$$v_2 = \frac{v_1}{w_1} \left[\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} - 2 \frac{p_2}{k_2 - 1} \right]^{1/2} \quad (w = \sqrt{u^2 + v^2}) \quad (1.2)$$

$$u_2 = u_1 \frac{v_2}{v_1}, \quad \rho_2 = p_2^{1/k_2} \quad (1.3)$$

Здесь u и v — проекции вектора скорости w на оси x и y декартовой системы координат, отнесенные к a_* — критической скорости звука; p , ρ — давление и плотность, отнесенные к давлению и плотности при $w = a_*$; p_0 — полное давление. После расчета поля течения по разностным формулам (1.2) — (1.5) работы [1] до линии тока с $\psi = \psi_p$ на этой линии по формулам (1.1) — (1.3) данной работы производятся определения параметров с индексом 2 по известным параметрам с индексом 1, а далее расчет продолжается по формулам (1.2) — (1.5) работы [1].

Результаты расчета двухслойного течения с распределением скорости по оси (3.2) работы [1] при $w_\infty = 0.1$, $\bar{w}_\infty = 1.9$, $1/b = 3.5$ и $k_1 = 1.14$, $k_2 = 1.4$, $\sigma = 1$ и $\psi_p = 0.04$ представлены на фиг. 2, на которой показаны



Фиг. 2

линии тока рассчитанного течения ($\psi = \text{const}$), линии $w = \text{const}$, линии $\theta = 0$ (светлые точки). Из фиг. 2 следует, что во втором слое звуковая линия $w = 1$ (черные точки) расположена ниже по течению, чем в первом слое. Из этой фигуры следует также, что значения w по обе стороны границы раздела довольно близки между собой в дозвуковой области, а начиная с трансзвуковой области заметно различаются.

2. Рассмотрим сверхзвуковое двухслойное течение в сопле с угловой точкой и заданным контуром. Пусть на начальной характеристике ABC параметры течения известны (фиг. 1). Представленные ниже расчеты были проведены при условии, что вектор скорости на начальной характеристике ABC параллелен оси x , при этом на характеристике AB задавалось значение β_{32} . Принималось, кроме того, что $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ на характеристике AB постоянно ($M = 1.01$) и равно значению β_{32} на линии раздела в области 2. На характеристике BC величина β также принималась постоянной и равной значению β_{31} на линии раздела в области 1. При этом значение β_{31} находилось из условия равенства статических давлений газа на линии раздела, из которого следует, что

$$\beta_{32} = \left\{ \frac{2}{k_2 - 1} \left[\sigma \left(\frac{k_1 + 1}{2} + \frac{k_1 - 1}{2} \beta_{31}^2 \right)^{k_1/(k_1 - 1)} \right]^{(k_2 - 1)/k_2} - \frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} \right\}^{1/2} \quad (2.1)$$

Так как значения β_{32} и β_{31} в точке B различаются, а углы наклона скорости θ_{31} и θ_{32} совпадают, то угол наклона характеристики AC в точке B имеет разрыв.

Выпишем формулы для расчета методом характеристик точки на линии раздела двух слоев. Формулы для расчета точек в поле угловой точки, точки на оси симметрии и на контуре в каждом слое подробно рассмотрены в работе [2]. Точка Z , лежащая на линии раздела, характеризуется пара-

метрами x , y , β_{32} , β_{31} , $\zeta = \operatorname{tg} \theta$, которые и требуется определить. Для их определения используются известные точки 0 , 2 , 4 , 5 и вспомогательная точка 1 , лежащая на характеристике второго семейства, положение которой не определено. Для определения параметров в точке 3 используются следующие очевидные условия: (1) точка 3 лежит на пересечении характеристики первого семейства, проходящей через точки 1 и 3 , и характеристики второго семейства, проходящей через точки 2 и 3 ; (2) точка 3 лежит на линии тока линии раздела 03 ; (3) статические давления в точке 3 по обе стороны линии раздела равны; (4) точка 1 лежит на характеристике второго семейства в области I , и если известна координата x этой точки, то остальные параметры в точке определяются квадратичным интерполированием по известным точкам 0 , 4 , 5 .

Перечисленные условия позволяют получить шесть уравнений для шести неизвестных функций, часть из которых получается в результате замены дифференциальных уравнений направления и совместности вдоль характеристик первого и второго семейства конечно-разностными соотношениями [2]. В зависимости от наклона характеристик первого и второго семейства при расчете точки на линии раздела, как и в случае однослойного течения [2], имеем четыре варианта формул для расчета неизвестных величин в точке на линии раздела. Для случая, когда наклоны характеристик первого и второго семейства близки к $1/2\pi$, эти формулы имеют вид

$$x_3 = [x_2 + n^\circ(y_0 - y_2) - 1/2(\zeta_3 + \zeta_0)x_0] / [1 - 1/2n^\circ(\zeta_3 + \zeta_0)] \quad (2.2)$$

$$y_3 = y_0 + 1/2(\zeta_3 + \zeta_0)(x_3 - x_0) \quad (2.3)$$

$$x_1 = \frac{y_3(m - n^\circ) - x_2 + n^\circ y_2 + mn_0 x_0 - n_0 y_0}{mn_0 - 1} \quad (2.4)$$

$$K\beta_{31} + J\beta_{32} = \zeta_1 - \zeta_2 + K\beta_1 + J\beta_2 - L(y_3 - y_1) - N^\circ(y_3 - y_2) \quad (2.5)$$

$$\beta_{32} = \left\{ \frac{2}{k_2 - 1} \left[\sigma \left(\frac{k_1 + 1}{2} + \frac{k_1 - 1}{2} \beta_{31}^2 \right)^{k_1/(k_1 - 1)} \right]^{(k_2 - 1)/k_2} - \frac{1}{\kappa_2} \right\}^{1/2} \quad (2.6)$$

$$\zeta_3 = \zeta_2 + J(\beta_{32} - \beta_2) + N^\circ(y_3 - y_2) \quad (2.7)$$

$$n^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_2 + \zeta_2}{\beta_2 \zeta_2 - 1} + \frac{\beta_{32} + \zeta_3}{\beta_{32} \zeta_3 - 1} \right), \quad n_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_0 \zeta_0 - 1}{\beta_0 + \zeta_0} + \frac{\beta_1 \zeta_1 - 1}{\beta_1 + \zeta_1} \right)$$

$$m = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_1 - \zeta_1}{1 + \beta_1 \zeta_1} + \frac{\beta_{31} - \zeta_3}{1 + \beta_{31} \zeta_3} \right) \quad \left(\kappa_v = \frac{k_v - 1}{k_v + 1}, v = 1, 2 \right)$$

$$K = - \frac{1}{k_1 + 1} \left[\frac{\beta_1^2(1 + \zeta_1^2)}{(1 + \beta_1^2)(1 + \kappa_1 \beta_1^2)} + \frac{\beta_{31}^2(1 + \zeta_3^2)}{(1 + \beta_{31}^2)(1 + \kappa_1 \beta_{31}^2)} \right]$$

$$J = - \frac{1}{k_2 + 1} \left[\frac{\beta_2^2(1 + \zeta_2^2)}{(1 + \beta_2^2)(1 + \kappa_2 \beta_2^2)} + \frac{\beta_{32}^2(1 + \zeta_3^2)}{(1 + \beta_{32}^2)(1 + \kappa_2 \beta_{32}^2)} \right]$$

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{\zeta_1(1 + \zeta_1^2)}{y_1(1 + \beta_1 \zeta_1)} + \frac{\zeta_3(1 + \zeta_3^2)}{y_3(1 + \beta_{31} \zeta_3)} \right]$$

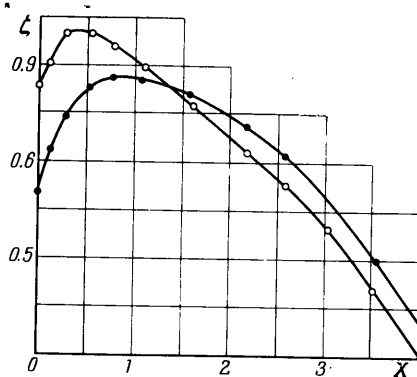
$$N^\circ = \frac{1}{2} \left[\frac{\zeta_2(1 + \zeta_2^2)}{y_2(\beta_2 \zeta_2 - 1)} + \frac{\zeta_3(1 + \zeta_3^2)}{y_3(\beta_{32} \zeta_3 - 1)} \right]$$

Система (2.2) — (2.7) решается методом последовательных приближений. В первом приближении, полагая в коэффициенте n° второй член равным первому, из (2.2) — (2.3) определяем x_3 и y_3 . Далее из (2.4) определяем x_1 , полагая в коэффициентах m и n_0 второй член равным первому и параметры с нижним индексом 1 равными параметрам с нижним индексом 0. По значению x_1 путем квадратичной интерполяции определяем y_1 , β_1 и ζ_1 . Параметры β_{32} и β_{31} определяются из соотношений (2.5) и (2.6), которые сводятся к одному трансцендентному уравнению с одним неизвестным β_{31} , при этом в первом приближении в коэффициентах K, J, L, N° вторые члены полагаем равными первым. Решая трансцендентное уравнение методом Ньютона, определяем β_{31} , и затем β_{32} и ζ_3 — из соотношений (2.6) и (2.7). В последующих итерациях при расчете вторых членов в коэффициентах m, n°, n_0, K, L, J и N используются значения $\beta_{31}, \beta_{32}, \zeta_3, y_3, y_1, \zeta_1$ и β_1 , полученные в предыдущем приближении. Аналогично могут быть получены соответствующие формулы для остальных трех вариантов.

3. Методом характеристик, описанным выше, были проведены расчеты двухслойного течения в сопле с угловой точкой. Сначала рассчитывался веер волн разрежения, возникающий при обтекании угловой точки, а затем течение в заданном контуре. Во всех рассчитанных вариантах принималось, что $k_1 = 1.14$, а $k_2 = 1.4$, и варьировалось соотношение расходов в слоях путем варьирования величины y_* (фиг. 1). Во всех вариантах полные температуры и полные давления в слоях принимались равными.

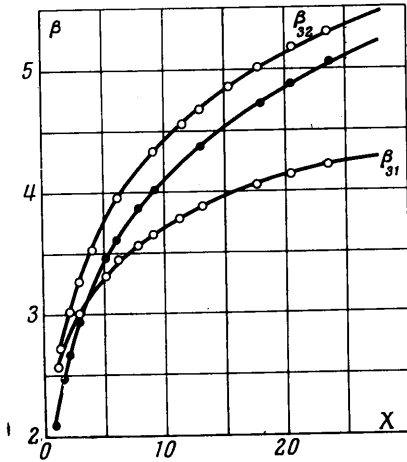
Отметим, что отношение полных температур не входит в соотношения (2.2) — (2.7), и в связи с этим полученные результаты могут быть использованы и при различных соотношениях полных температур. При этом изменяется лишь соотношение расходов между слоями.

Двухслойное осесимметричное сверхзвуковое течение исследовалось в сопле с угловой точкой, рассчитанном на равномерное и параллельное однослойное течение с числом Маха на выходе $M_0 = 4.6$ и $k = 1.14$. Остановимся сначала на результатах расчета параметров в веере волн разрежения. В результате расчетов было показано, что распределение чисел M по оси сопла при двухслойном течении с $k_1 = 1.14$ и $k_2 = 1.4$ незначительно отличается от распределения чисел M по оси в однослой-

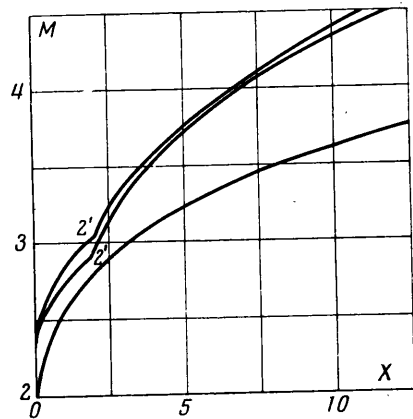


Фиг. 3

ном течении с $k = 1.14$ даже при больших до 50% расходах в пристеночном слое. Из результатов расчетов следует, что изменение угла θ на характеристиках второго семейства происходит немонотонно и максимум угла θ лежит в окрестности первой отраженной от оси характеристики CD . Отметим, что аналогичные результаты получены и при расчете характеристик веера волн разрежения в однослойном течении, начинающемся от равномерного потока [3]. Из результатов расчета следует, что сначала в веере волн разрежения изменение числа M вдоль характеристик второго семейства от линии раздела до оси симметрии происходит монотонно, однако от угловой точки до линии раздела изменение числа M происходит немонотонно и имеет максимум числа M , который располагается вблизи отраженной от линии раздела характеристики BN . Однако на последних характеристиках веера волн разрежения немонотонный характер изменения числа M от угловой точки до линии раздела сохраняется лишь при



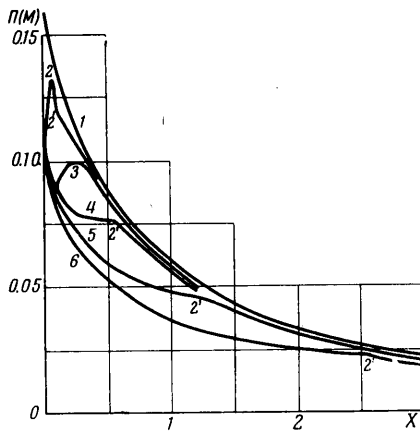
Фиг. 4



Фиг. 5

малых расходах газа через пристеночный слой (меньших 10%), а при больших расходах изменение числа M происходит монотонно. Естественно, что на линии раздела число M терпит разрыв.

Рассмотрим изменение параметров потока вдоль линии раздела и сравним их с параметрами на контуре. На фиг. 3 и 4 представлены зависимости величины $\zeta = \operatorname{tg} \theta$ и $\beta = \sqrt{M^2 - 1}$ от длины на линии раздела и на контуре при $y_* = 0.8$, $k_1 = 1.14$, $k_2 = 1.4$. Из фиг. 3 и 4 и из результатов следует, что значения ζ и β на линии раздела (светлые кружочки) и на контуре (темные кружочки) отличаются при $x > 1.5$ незначительно даже при больших расходах через пристеночный слой до 50%. Однако значения β_{32} и β_{31} на линии раздела отличаются довольно значительно. На фиг. 3—6 за единицу длины принят радиус минимального сечения.



Фиг. 6

Рассмотрим теперь изменение параметров на контуре при больших расходах в пристеночном слое. На фиг. 5 приведена зависимость числа M для однослойного течения (нижняя кривая $k = 1.14$) и двухслойных течений с $k_1 = 1.14$, $k_2 = 1.4$; $y_* = 0.7$ (верхняя кривая) и с $k_1 = 1.14$, $k_2 = 1.4$, $y_* = 0.8$ (средняя кривая), из которых видно, что число M для двухслойного течения больше числа M для однослойного. При этом число M несколько больше для более толстого пристеночного слоя. Характеристика второго семейства AB (фиг. 1) отражается от линии раздела и приходит в точку N . Для расходов в пристеночном слое, больших 10%, вблизи точки N число Маха изменяется монотонно. Однако в точке $2'$ имеется разрыв производной, при этом с увеличением расхода через пристеночный слой эта точка смещается вниз по потоку. Точка $2'$ на контуре, в которой производная dM/dx терпит разрыв, расположена вблизи характеристики первого семейства, отраженной от линии раздела и выходящей из точки пересечения линии раздела и последней характеристики второго семейства.

На фиг. 6 приведено распределение давления вдоль контура сопла с угловой точкой для двухслойных течений с $k_1 = 1.14$ и $k_2 = 1.4$ с различными значениями y_* (т. е. с различными расходами в пристеночном слое), а также распределения давления на этом же контуре в однослойном течении с $k = 1.14$. На этой фигуре кривая 1 соответствует однослойному течению, остальные кривые — двухслойному течению, при этом кривые 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям $y_* = 0.99, 0.95, 0.9, 0.8, 0.7$. Из этой фигуры следует, что при расходах в пристеночном слое, больших 10%, давление вдоль сопла уменьшается. При расходах, меньших 10%, в окрестности угловой точки имеется положительный градиент давления, который возникает вблизи точки N (фиг. 1). От точки N течение в пристеночном слое начинает чувствовать наличие внутреннего слоя. Возникновение положительного градиента давления связано с тем, что при одном и том же угле поворота потока в течении Прандтля — Мейера давление в потоке с большим k уменьшается сильнее, чем в потоке с меньшим k . При относительно больших толщинах пристеночного слоя влияние внутреннего слоя начинает сказываться в основном после точки $2'$, так как от точки $2'$ производная давления терпит разрыв и начинает уменьшаться более интенсивно, а давление приближается к давлению в однослойном течении, так как, начиная с этой точки, течение в пристеночном слое определяется в основном внутренним слоем (фиг. 6). До точки $2'$ возмущения, вносимые внутренним слоем, ослабляются веером волн разрежения. Однако при малых толщинах пристеночного слоя влияние внутреннего слоя чувствуется в непосредственной окрестности угловой точки и давление в пристеночном слое стремится сравняться с давлением во внутреннем слое, и так как последнее при повороте на один и тот же угол больше, то возникает положительный градиент давления. Величина положительного градиента давления увеличивается при уменьшении толщины пристеночного слоя. Естественно, что по мере уменьшения толщины слоя различие между статическими давлениями в однослойном и двухслойном течениях на стенке сопла уменьшается, однако при этом числа Маха в этих течениях различаются заметно. Отметим, что положительный градиент давления при обтекании угловой точки возникает лишь тогда, когда показатель адиабаты в пристеночном слое больше показателя адиабаты в ядре потока. Напомним, что в данной работе все расчеты проведены при $\sigma = 1$, для $\sigma \neq 1$ требуется еще специальное исследование влияния двухслойности на обтекание угловой точки.

Помимо представленных в п. 1 расчетов двухслойного течения в сопле без угловой точки методом сеток, были проведены специальные расчеты в сопле со скруглением угловой точки. В результате этих расчетов показано, что при наличии скругления угловой точки даже при относительно небольших радиусах скругления, составляющих 0.3—0.5 радиуса критического сечения, положительного градиента давления на контуре сопла не возникает.

Составление программ и проведение представленных расчетов осуществлено Г. Д. Владимировой и М. Ф. Тамаровским, которым автор выражает благодарность.

Поступило 16 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавалья. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
2. Кацкова О. Н., Наумова И. П., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнин А. П. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. М., ВЦ АН СССР, 1961.
3. Пирумов У. Г., Суворова В. Н. Об одном примере расчета сверхзвукового течения газа вблизи оси симметрии. Сб. работ ВЦ МГУ, 1965, № 4, стр. 52—61.