

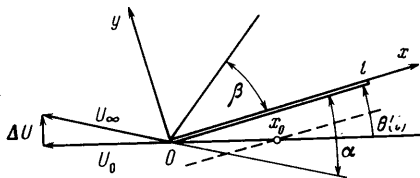
## УСКОРЕННОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ПРИ КОНЕЧНОМ УГЛЕ АТАКИ

О. Г. ГОМАН

(Днепропетровск)

Рассматривается сверхзвуковое нестационарное движение пластины при конечном (не бесконечно малом) угле атаки с присоединенной ударной волной в идеальном газе. Законы изменения скорости и угла наклона пластины предполагаются произвольными, а числа Струхала — малыми. При последнем предположении в числах Маха в возмущенной области, не слишком близких к единице, предыстория движения достаточно хорошо характеризуется мгновенными значениями параметров нестационарности и их производных. Этот факт дает возможность значительно упростить систему уравнений, описывающую возмущенное нестационарное движение, и получить ее аналитическое решение.

Пластина, составляющая угол  $\theta(t)$  с некоторым фиксированным направлением, движется в совершенном газе со сверхзвуковой скоростью  $U_\infty(t)$ . Будем использовать связанную систему координат  $xOy$  с осью  $x$ , направленной вдоль хорды пластины, и рассматривать только ту область течения, где реализуется присоединенная ударная волна (фиг. 1). Амплитуды изменения величин  $U_\infty$  и  $\theta$  могут быть произвольно большими при условии, что ударная волна присоединена и течение за ней сверхзвуковое. Функции  $U_\infty(t)$  и  $\theta(t)$  в рассматриваемом промежутке времени  $0 \leq t \leq T$  предполагаются монотонными и непрерывно дифференцируемыми, а числа Струхала и, следовательно, безразмерное поступательное ускорение и угловая скорость малы, т. е.



Фиг. 1

$$(\max |M_\infty^\cdot|, \max |\theta^\cdot|) \sim \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

$$M_\infty^\cdot = \frac{dM_\infty}{d\tau}, \quad \theta^\cdot = \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}, \quad \tau = \frac{a_\infty t}{l}$$

Здесь  $a_\infty$  — скорость звука в невозмущенной среде,  $l$  — длина хорды пластины, выбранная в качестве масштаба длин.

При таких предположениях и при числах Маха в возмущенной области, не слишком близких к единице, предыстория движения достаточно хорошо характеризуется значениями параметров нестационарности и их производных [1]. В этом случае искомые параметры нестационарного относительного движения газа за ударной волной можно представить в виде

$$c_v(s(\tau) + S), \quad \rho_\infty(\rho(\tau) + R), \quad \rho_\infty a_\infty^2(p(\tau) + P), \quad a_\infty(v + U) \quad (2)$$

где  $s(\tau)$ ,  $\rho(\tau)$ ,  $p(\tau)$  и  $v(\tau)$  — энтропия, плотность, давление и относительная скорость стационарного потока, соответствующего мгновенной скорости  $U_\infty(t)$  и мгновенному углу поворота (фиг. 1) потока на пластинке

$$\alpha = \theta + \arctg \frac{\Delta U}{U_0}$$

Величины  $S, R, P$  и  $U$  означают возмущения за счет нестационарности. Производные по  $\tau$  от величин  $s, \rho, p$  и  $v$  имеют порядок  $\varepsilon$ , так как, например

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial s}{\partial M_\infty} M_\infty \dot{\phantom{x}} + \frac{\partial s}{\partial \alpha} \dot{\alpha}$$

а для стационарного течения (при числах Маха в возмущенной области больших единицы) производные от газодинамических параметров по  $M_\infty$  и  $\alpha$  ограничены.

Если считать  $S, R, P$  и  $U$  порядка  $\varepsilon$ , то такого же порядка будут и их производные по пространственным переменным; производные же по  $\tau$  имеют порядок  $\varepsilon^2$ . Действительно, вводя вместо  $\tau$  переменную  $M_\infty(\tau)$ , получаем

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial M_\infty} M_\infty \dot{\phantom{x}}, \quad \frac{\partial S}{\partial M_\infty} \sim \frac{S(\tau) - S(0)}{M_\infty(\tau) - M_\infty(0)} \sim \varepsilon$$

т. е.  $\partial S / \partial \tau \sim \varepsilon^2$  и то же самое для других параметров.

Введем обозначения

$$q_1 = \frac{U_0}{a_\infty}, \quad q_2 = -\frac{\Delta U}{a_\infty}, \quad q_3 = \theta$$

Тогда для движения с малым ускорением и малой угловой скоростью малыми кинематическими параметрами будут

$$q_1 \dot{\phantom{x}} = \frac{dq_1}{d\tau}, \quad q_2 \dot{\phantom{x}} = \frac{dq_2}{d\tau}, \quad q_3 \dot{\phantom{x}} = \frac{d\theta}{d\tau}$$

(Отметим, что в отличие от принятого в теории коэффициентов вращательных производных здесь удобно относить кинематические параметры к скорости  $a_\infty$ , а не к скорости  $U_0$ , которая изменяется с течением времени.)

Подставляя разложения (2) в уравнения относительного движения газа и сохраняя только члены порядка  $\varepsilon$ , получаем следующую систему для возмущенного движения:

$$v \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \text{grad } P = f(\tau), \quad v \frac{\partial S}{\partial x} = f_4(\tau) \quad (f = f_1 x^\circ + f_2 y^\circ)$$

$$v \frac{\partial R}{\partial x} + \rho \text{div } U = f_3(\tau), \quad P = a^2 R + pS \quad (3)$$

Функции  $f, f_3$  и  $f_4$  определяются соотношениями

$$f_1 = q_1 \dot{\phantom{x}} \cos \theta + q_2 \dot{\phantom{x}} \sin \theta - v \dot{\phantom{x}}, \quad f_3 = -\rho \dot{\phantom{x}}$$

$$f_2 = -(q_1 \dot{\phantom{x}} \sin \theta - q_2 \dot{\phantom{x}} \cos \theta + 2v\theta \dot{\phantom{x}}), \quad f_4 = -s \dot{\phantom{x}}$$

Здесь точка в позиции штриха означает дифференцирование по  $\tau$ .

Из (3) имеем

$$(1 - M^2) P_{xx} + P_{yy} = 0 \quad (M = v/a)$$

и, следовательно,

$$P = \varphi_1(x - y \text{ctg } \mu) + \varphi_2(x + y \text{ctg } \mu), \quad (\text{ctg } \mu = \sqrt{M^2 - 1})$$

а также

$$U_x = -\frac{1}{\rho v} (\varphi_1(x - y \text{ctg } \mu) + \varphi_2(x + y \text{ctg } \mu)) + \frac{f_1}{v} x + g_1(y) \quad (4)$$

$$U_y = -\frac{\text{ctg } \mu}{\rho v} (-\varphi_1(x - y \text{ctg } \mu) + \varphi_2(x + y \text{ctg } \mu)) + \frac{f_2}{v} x + g_2(y) \quad (5)$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $g_1$  — произвольные функции, а

$$g_2(y) = \frac{1}{a^2 \rho} \left( -p' - a^2 \rho \frac{f_1}{v} \right) y$$

Условие на поверхности пластины  $U_y|_{y=0} = 0$  дает

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) - (\rho f_2 \operatorname{tg} \mu) x \quad (6)$$

Отсюда

$$P = \varphi_2(x - y \operatorname{ctg} \mu) + \varphi_2(x + y \operatorname{ctg} \mu) - \rho \operatorname{tg} \mu f_2(x - y \operatorname{ctg} \mu) \quad (7)$$

$$U_y = \frac{\operatorname{ctg} \mu}{\rho v} (\varphi_2(x - y \operatorname{ctg} \mu) - \varphi_2(x + y \operatorname{ctg} \mu)) + g_2(y) + \operatorname{ctg} \mu \frac{f_2}{v} y \quad (8)$$

Уравнение ударной волны представим в форме

$$y = x \operatorname{tg} \beta(\tau) + F(x, \tau)$$

где  $\beta(\tau)$  — угол наклона волны для мгновенного стационарного движения, а  $F(x, \tau)$  — нестационарное возмущение ее формы порядка  $\epsilon$ . Соотношения на ударной волне для возмущенного движения получаются путем линеаризации точных соотношений по параметру  $\epsilon$  и имеют вид

$$P = a_1 D, \quad R = a_2 D, \quad U_n = a_3 D - a_4 x, \quad U_s = a_5 \frac{\partial F}{\partial x} \quad (9)$$

Здесь

$$D = a_6 \frac{\partial F}{\partial x} + a_7 x, \quad a_6 = -M_{\infty s} \cos^2 \beta, \quad a_7 = \frac{\theta' + \beta'}{\cos \beta}$$

$$a_1 = \frac{4}{\kappa + 1} M_{\infty n}, \quad a_2 = \frac{(\kappa + 1) M_{\infty n}}{[1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) M_{\infty n}^2]^2}$$

$$a_3 = \frac{2}{\kappa + 1} \left( 1 + \frac{1}{M_{\infty n}^2} \right), \quad a_4 = \frac{\theta'}{\cos \beta}, \quad a_5 = -M_{\infty} \sin \alpha \cos \beta$$

Индексы  $n$  и  $s$  означают проекции на внешнюю нормаль и касательную к «старой» волне  $y = x \operatorname{tg} \beta$ , на которую в принятом приближении следует отнести условия (9). (Производная  $\partial F / \partial \tau$  в условиях (9) отсутствует по той же причине, что и производные по  $\tau$  от функций  $S$ ,  $R$ ,  $P$  и  $U$  в уравнениях (3).)

Из выражений (9) следует, что

$$U_y = a_1 P - a_2 x|_{y=x \operatorname{tg} \beta}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1} \left( a_3 \cos \beta + \frac{a_5}{a_6} \sin \beta \right), \quad \alpha_2 = a_4 \cos \beta + \frac{a_5 a_7}{a_6} \sin \beta$$

Отсюда и из (7) и (8) имеем уравнение для  $\varphi_2(x)$

$$\varphi_2(x) = \lambda \varphi_2(\delta x) + Kx$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{ctg} \mu - \rho v \alpha_1}{\operatorname{ctg} \mu + \rho v \alpha_1}, \quad \delta = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \mu}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \mu}$$

$$K = \frac{\rho v}{(\operatorname{ctg} \mu + \rho v \alpha_1) (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \mu)} \times$$

$$\times \left[ \alpha_2 + \alpha_1 \rho f_2 \operatorname{tg} \mu (1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \mu) + \frac{f_2}{v} \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \mu + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{a^2 \rho} \left( a^2 f_3 + p f_4 - a^2 \rho \frac{f_1}{v} \right) \operatorname{tg} \beta \right]$$

Обозначив  $P$  на поверхности пластины через  $\Phi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ , из последнего уравнения и выражения (7) получим уравнение для  $\Phi$

$$\Phi(x) = \lambda\Phi(\delta x) + (2K - (1 - \lambda\delta)\rho f_2 \operatorname{tg} \mu)x \quad (10)$$

Это уравнение имеет простой физический смысл: оно характеризует интенсивность возмущения давления, приходящего в точку  $x^*$  из точки  $\delta x^*$ , распространяясь вдоль характеристики первого семейства  $x - y \operatorname{ctg} \mu = \delta x^*$  с последующим отражением от ударной волны по характеристике второго семейства  $y \operatorname{ctg} \mu + x = x^*$ . Величина  $\lambda$  есть коэффициент отражения возмущения от ударной волны и, как показал Г. Г. Черный [2], для условий присоединенной волны  $|\lambda| < 1$ .

Решением уравнения (10) будет функция

$$\Phi(x) = \left( \frac{2K}{1 - \lambda} - \rho f_2 \operatorname{tg} \mu \right) x \quad (11)$$

Встречающиеся в формулах производные  $p^*$ ,  $v^*$  и  $\beta^*$  легко найти из соотношений косоого скачка. Пусть последние заданы в виде функций от числа  $M_\infty$  и угла поворота набегающего потока  $\alpha$ . Так как

$$M_\infty = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \alpha = \theta - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(q_2 / q_1)$$

то будем иметь

$$p^* = \left( \frac{\partial p}{\partial M_\infty} \frac{q_1}{M_\infty} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{q_2}{M_\infty^2} \right) q_1^* + \left( \frac{\partial p}{\partial M_\infty} \frac{q_2}{M_\infty} - \frac{\partial p}{\partial \alpha} \frac{q_1}{M_\infty^2} \right) q_2^* + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \theta^* = p^{q_1} q_1^* + p^{q_2} q_2^* + p^{\alpha} q_3^*$$

и аналогичные выражения для  $v^*$  и  $\beta^*$ .

В результате (11) можно записать в форме

$$\Phi(x) = (P^{q_1} q_1^* + P^{q_2} q_2^* + P^{\alpha} q_3^*) x \quad (12)$$

$$P^{q_1} = \alpha_3 \left[ \alpha_4 \beta^{q_1} - \alpha_5 \sin \theta + \frac{\operatorname{tg} \beta}{v} (v^{q_1} - \cos \theta) - \frac{\operatorname{tg} \beta}{a^2 \rho} p^{q_1} \right] + \rho \operatorname{tg} \mu \sin \theta$$

$$P^{q_2} = \alpha_3 \left[ \alpha_4 \beta^{q_2} + \alpha_5 \cos \theta + \frac{\operatorname{tg} \beta}{v} (v^{q_2} - \sin \theta) - \frac{\operatorname{tg} \beta}{a^2 \rho} p^{q_2} \right] - \rho \operatorname{tg} \mu \cos \theta$$

$$P^{\alpha} = \alpha_3 \left[ 1 + (1 + \beta^{q_3}) \alpha_4 - 2\alpha_5 v + \frac{\operatorname{tg} \beta}{v} v^{q_3} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{a^2 \rho} p^{q_3} \right] + 2\rho v \operatorname{tg} \mu$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho v}{\rho v \alpha_1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg}^2 \mu}, \quad \alpha_4 = \frac{a_5}{a_6} \operatorname{tg} \beta$$

$$\alpha_5 = \rho \alpha_1 \operatorname{tg} \mu + \frac{\operatorname{tg} \beta}{v} (\operatorname{ctg} \mu - \alpha_1 \rho v)$$

Таким образом, в принятой постановке возмущение давления на поверхности пропорционально параметрам нестационарности  $q_1^*$ ,  $q_2^*$  и  $q_3^*$  и вдоль поверхности пластины распределено по линейному закону. Остальные газодинамические параметры могут быть также легко получены.

Сразу же отметим, что выражение (12) согласуется с результатами линейной теории нестационарного движения тонкого профиля. Действительно, при  $\theta \rightarrow 0$ ,  $q_2 \rightarrow 0$ ,  $q_1 = M_\infty = M$

$$P^{q_1} = 0, \quad P^{q_2} = \operatorname{tg}^3 \mu, \quad P^{\alpha} = (1 - \operatorname{tg}^2 \mu) / \cos \mu$$

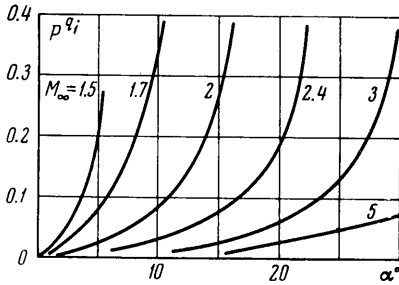
и для перепада давления между верхней и нижней стороной пластины (ввиду антисимметрии потока при  $\theta = 0$ ) получим

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_1 = \frac{4}{M_\infty^2} \left(-\operatorname{tg}^3 \mu q_2 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{\cos \mu} \theta^*\right) x, \quad q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \quad (13)$$

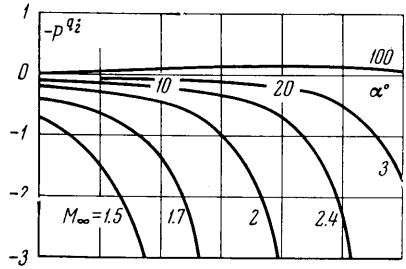
Кроме того, для мгновенного стационарного течения

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_2 = -4 \operatorname{tg} \mu \left(\theta - \frac{q_2}{q_1}\right) \quad (14)$$

так что общий перепад  $(\Delta p / q_\infty)$  равен сумме выражений (13) и (14).



Фиг. 2

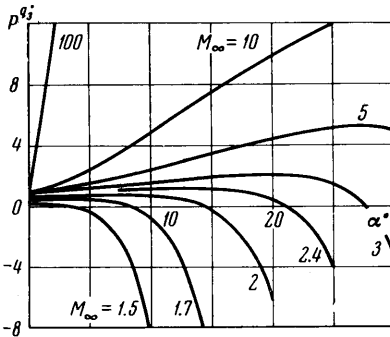


Фиг. 3

Если рассматривать только вращение пластины вокруг оси  $x_0$  (фиг. 1), то тогда  $q_2 = x_0 \theta^*$

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right) = -4 \operatorname{tg} \mu \left[ \theta + \frac{1}{M_\infty} (x - x_0) \theta - \frac{1}{M_\infty} \operatorname{tg}^2 \mu \theta^* x \right] \quad (15)$$

(Здесь член, содержащий  $q_2$  как более высокого порядка малости, опущен.) С другой стороны, по линейной теории для профиля нулевой толщины, колеблющегося по закону



Фиг. 4

$$y = (x - x_0) \theta, \quad \theta = a e^{ikM_\infty \tau}, \quad k = \frac{\omega l}{U_\infty}$$

при малых частотах  $k$  перепад давления равен (см. [3], § 5, 3)

$$q_\infty^{-1} \Delta p = -4 \operatorname{tg} \mu [1 + ik(x - x_0) - ik \operatorname{tg}^2 \mu x] \theta \quad (16)$$

Если движение не гармоническое, но медленно меняющееся, то в выражении (16) оператор  $ik$  можно заменить на  $M_\infty^{-1} \partial / \partial \tau$  (известная гипотеза гармоничности), в результате чего придем к выражению (15).

Средний член в этом выражении определяет квазистационарное демпфирование, а последний (добавок за счет нестационарности) дает антидемпфирование [3], если  $x_0 < 2/3$ .

На фиг. 2–4 приведены зависимости (12) коэффициентов  $P_{q_1}^*$ ,  $P_{q_2}^*$ ,  $P_{q_3}^*$  от  $M_\infty$  и  $\alpha$  при  $q_2 = 0$ .

Величина  $P_{q_1}^*$  во всем расчетном диапазоне чисел  $M_\infty$  и углов  $\alpha$  положительная, т. е. продольное ускорение ( $q_1^* > 0$ ) приводит к возрастанию давления по сравнению с давлением, соответствующим мгновенному стационарному течению.

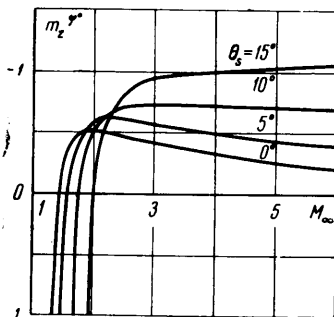
Величины  $-P^{q_2}$  и  $P^{q_3}$  в большой области чисел  $M_\infty$  и углов  $\alpha$  имеют отрицательное значение, и в этом случае эффект нестационарности приводит к понижению давления при  $q_2 < 0$  и  $\theta > 0$ . Резкое возрастание абсолютных величин  $P^{q_1}$ ,  $P^{q_2}$  и  $P^{q_3}$ , вычисленных согласно (12), на фиг. 2—4 имеет место при тех условиях, когда число Маха в возмущенной области приближается к единице.

Используя полученное решение (11), определяем аэродинамические характеристики клинзев с углом полураствора  $\theta_s$ , у которых на обеих сторонах реализуется присоединенная ударная волна. Оказалось, что приращение коэффициента силы сопротивления за счет продольного ускорения

$$\Delta c_x = \frac{1}{M_\infty^2} P^{q_1} q_1$$

при реальных для современных летательных аппаратов значениях  $q_1$  заметно только в том случае, если местное число Маха на поверхности клина близко к единице. Этот факт можно рассматривать как некоторое обобщение известного положения Франкля о том, что для тонких тел продольное ускорение сказывается на сопротивлении только при трансзвуковых скоростях.

На фиг. 5 в качестве примера приведены значения коэффициентов демпфирующих моментов клинзев  $m_z^{\varphi^*}$  при вращении их относительно вершины в момент времени, когда угол отклонения  $\varphi = 0$  ( $m_z^{\varphi^*}$  отнесен к скоростному напору площади в плане, длине клина  $L$  и  $\varphi^* = LU_\infty^{-1} d\varphi / dt$ ). Для  $\theta_s = 0$   $m_z^{\varphi^*}$  определялся по линейной теории [3]. При малых сверхзвуковых скоростях у всех клинзев наступает антидемпфирование (положительные значения  $m_z^{\varphi^*}$ ), которое стремительно возрастает по мере приближения числа Маха за ударной волной к единице. Число  $M^*$ , при котором коэффициент  $m_z^{\varphi^*}$  меняет знак, возрастает с увеличением угла  $\theta_s$ . Антидемпфирование сохраняется и при других положениях центра вращения. Кроме того, антидемпфирование может наступить и при больших числах  $M_\infty$ , если только амплитуда колебаний и угол  $\theta_s$  таковы, что хотя бы на одной стороне клина число Маха становится достаточно близким к единице.



Фиг. 5

Поступило 23 I 1969

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полянскй О. Ю. О некоторых особенностях нестационарного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
2. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
3. Майлс Дж. У. Потенциальная теория неустановившихся сверхзвуковых течений. М., Физматгиз, 1963.