

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

С. А. ДРОЗДОВ, В. Ф. САЛОХИН

(Москва)

Интегральным методом Кармана — Польгаузена рассматривается задача о нестационарном тепловом пограничном слое на изотермической пластинке при скачкообразном изменении условий обтекания, получены аналитические выражения для толщины теплового пограничного слоя. Найдена зависимость скорости движения границы между «стационарной» и «нестационарной» областями решения от числа Прандтля.

Для динамического слоя подобная задача решена в [1, 2]. В работе [3] рассмотрена более частная задача о нестационарном тепловом пограничном слое при стационарных условиях обтекания. В работе [4] рассмотрена задача в адекватной постановке, но, к сожалению, автором были допущены принципиальные ошибки при записи системы характеристических уравнений, что привело к абсолютно неверным результатам. К обсуждению преимуществ и недостатков рассматриваемого интегрального метода, данного в [4], необходимо только добавить, что метод неприменим к задачам, в которых начальные условия отличны от нулевых, так как в этом случае неправомочна аппроксимация профилей скорости и температуры полиномами.

Пусть на полубесконечную пластину набегает однородный поток несжимаемой жидкости, вязкой диссилиацией в которой, а также зависимостью вязкости и теплофизических характеристик от температуры будем пренебречь. Тогда интегральные соотношения Кармана для нестационарного ламинарного пограничного слоя будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\delta (u - u_0) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta u (u - u_0) dy = -v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta_T} T dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta_T} Tu dy = -\frac{v}{\sigma} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2)$$

Здесь принято, что температура набегающего потока жидкости равна нулю.

Для аппроксимации профилей скорости и температуры в пограничном слое используем параболы четвертой степени [5]

$$u = u_0(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) \quad (\eta = y / \delta) \quad (3)$$

$$T = T_0(1 - 2\eta_T + 2\eta_T^3 - \eta_T^4) \quad (\eta_T = y / \delta_T) \quad (4)$$

Подставляя (3) в (1) и интегрируя, получаем уравнение для толщины динамического пограничного слоя

$$\frac{3}{40v} \frac{\partial \delta^2}{\partial t} + \frac{37u_0}{1260v} \frac{\partial \delta^2}{\partial x} = 1 \quad (5)$$

Аналогично, используя (2) и (4) и вводя обозначение $\epsilon = \delta_T / \delta$, получаем уравнение для толщины температурного пограничного слоя

$$\frac{3\sigma}{40v} \frac{\partial \delta_T^2}{\partial t} + \frac{u_0\sigma}{4v} \left[f_i(\epsilon) + \epsilon \frac{df_i(\epsilon)}{d\epsilon} \right] \frac{\partial \delta_T^2}{\partial x} = 1 + \frac{u_0\sigma}{4v} \epsilon^3 \frac{df_i(\epsilon)}{d\epsilon} \frac{\partial \delta^2}{\partial x} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= \varepsilon^{2/15} - \frac{3}{140}\varepsilon^2 + \frac{1}{180}\varepsilon^3 \quad (\varepsilon \leq 1) \\ f_2(\varepsilon) &= \frac{3}{10} - \frac{3}{10}\varepsilon^{-1} + \frac{2}{15}\varepsilon^{-2} - \frac{3}{140}\varepsilon^{-3} + \frac{1}{180}\varepsilon^{-4} \quad (\varepsilon \geq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

Границные условия для δ и δ_t очевидны

$$\delta(0, t) = \delta_t(0, t) = 0 \quad (8)$$

В качестве начальных примем нулевые условия

$$\delta(x, 0) = \delta_t(x, 0) = 0 \quad (9)$$

Начальное нулевое условие для δ соответствует или импульсному приведению пластины в движение со скоростью u_0 из неподвижного состояния, или торможению от бесконечно большой скорости до u_0 . Его также можно интерпретировать как мгновенный переход от идеального обтекания пластины к вязкому. Нулевое начальное условие для δ_t означает скачкообразное изменение температуры поверхности пластины от температуры окружающей среды до T_0 .

Введем новые переменные, которые избавят дальнейшие вычисления от громоздких числовых коэффициентов

$$\psi = \frac{3}{40\nu} \delta^2, \quad \varphi = \frac{3\sigma}{40\nu} \delta_t^2, \quad z = \frac{189x}{74u_0} \quad (10)$$

В этих переменных уравнения (5) и (6) принимают вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{315}{37} \left[f_i(\varepsilon) + \frac{df_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \varepsilon \right] \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 1 + \frac{315\sigma}{37} \varepsilon^3 \frac{df_i(\varepsilon)}{d\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (12)$$

$(\varepsilon^2 = \varphi/\sigma\psi)$

Уравнение (11) для толщины динамического пограничного слоя, как уже отмечалось выше, рассмотрено в [1, 2]. Тем не менее проведем здесь его решение, так как оно входит в правую часть уравнения (12) и, кроме того, являясь точным решением (12) при $\sigma = 1$, может рассматриваться как предельное при анализе случаев $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$.

Уравнения характеристик для (11) имеют вид

$$d\psi = dt = dz$$

Решение этих уравнений выражается в виде общего интеграла

$$C\{\psi - t, z - t\} = 0$$

Используя нулевые начальные и граничные условия, получаем функциональные соотношения, которым должен удовлетворять общий интеграл

$$C\{-t, -t\} = 0, \quad C\{0, z\} = 0$$

Учитывая здесь (и в дальнейшем), что $t \geq 0$ и $z \geq 0$, получаем

$$\psi = z \quad \text{при } z \leq t, \quad \psi = t \quad \text{при } z > t \quad (13)$$

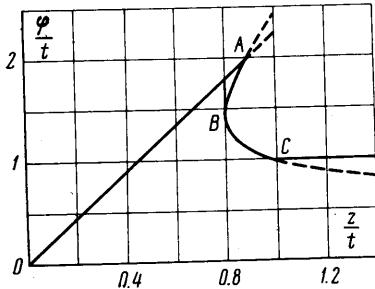
Из решения видно, что в области $z/t \leq 1$, назовем ее «стационарной», ψ зависит только от координаты z и совпадает с известным решением стационарной задачи [5], а в области $z/t \geq 1$ («нестационарной») ψ является функцией t . Скорость ω границы, разделяющей эти две области, равна $\omega = 1$.

В соответствии с видом решения уравнения (11), (12) имеют различные правые части в стационарной и нестационарной областях.

Рассмотрим первоначально случай $\sigma > 1$, что соответствует условию $\varepsilon < 1$, а затем $\sigma < 1$ ($\varepsilon > 1$). Будем решать задачу приближенно, отбросив в формуле (7), определяющей $f_1(\varepsilon)$, члены, содержащие ε в степени выше первой. Тогда система характеристических уравнений для стационарной области имеет вид

$$\frac{d\varphi}{1 + \gamma(\varphi/z)^{3/2}} = \frac{dt}{1} = \frac{dz}{2\gamma(\varphi/z)^{1/2}}$$

$$\left(\gamma = \frac{42}{37} \sigma^{-1/2} \right)$$



Фиг. 1

Общий интеграл в этой области можно записать

$$C_1 \{z [1 - \gamma(\varphi/z)^{3/2}]^{4/3}, t - \varphi_2 F_1(-^{2/3}, 1; ^{5/3}; \gamma(\varphi/z)^{3/2})\} = 0$$

где $F_1(a, b; \gamma; x)$ — гипергеометрическая функция.

Для нестационарной области соответственно

$$\frac{d\varphi}{1} = \frac{dt}{1} = \frac{dz}{2\gamma(\varphi/t)^{1/2}}$$

и

$$C_2 \{\varphi - t; z - 2\gamma t [(\varphi/t)^{1/2} + ((\varphi/t) - 1) \ln(\varphi^{1/2} - t^{1/2})]\} = 0$$

Используя условие (9) для общего интеграла C_2 , получаем соотношение $C_2 \{0; z\} = 0$. Отсюда для нестационарной области однозначно определяется решение

$$\varphi/t = 1 \quad (14)$$

В стационарной области условие (8) и требование непрерывности решения в точке $z/t = 1$ приводит к следующим соотношениям:

$$C_1 \{0; t\} = 0, \quad C_1 \{t(1 - \gamma)^{4/3}; t [1 - F_1(-^{2/3}, 1; ^{5/3}; \gamma)]\} = 0$$

Эти равенства определяют решение системы характеристик для стационарной области

$$\varphi/t = \gamma^{-2/3}(z/t) \quad \text{при } (\varphi/t) F_1(-^{2/3}, 1; ^{5/3}; \gamma(\varphi/z)^{3/2}) \leq 1 \quad (15)$$

$$\frac{\varphi}{t} = \frac{1 - (z/t) \Phi_1[\gamma(\varphi/z)^{3/2}]}{F_1(-^{2/3}, 1; ^{5/3}; \gamma(\varphi/z)^{3/2})} \quad \text{при } \gamma(\varphi/z)^{3/2} \leq 1$$

$$\Phi_1(x) = [1 - F_1(-^{2/3}, 1; ^{5/3}; \gamma)] [(1-x)/(1-\gamma)]^{4/3} \quad (16)$$

Комбинируя выражения (14) и (15), определяющие решения в обеих областях, можно получить непрерывное для всех $z/t \geq 0$ решение, которое качественно иллюстрируется на фиг. 1 (сплошная кривая). Это решение является неоднозначным, что с физической точки зрения абсурдно. Устранение неоднозначности неминуемо ведет к скачкообразному виду решения, причем положение скачка можно интерпретировать как фронт тепловой волны. Аналогично работе [3] определим границу волны как точку B , в которой касательная вертикальна. Для определения координаты

точки используем параметризацию решения (15) на дуге ABC

$$\begin{aligned}\varphi / t &= \left\{ {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, 1; \frac{5}{3}; \xi\right) + (\gamma / \xi)^{\frac{2}{3}} \Phi_1(\xi) \right\}^{-1} \\ z / t &= \left\{ (\xi / \gamma)^{\frac{2}{3}} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, 1; \frac{5}{3}; \xi\right) + \Phi_1(\xi) \right\}^{-1}\end{aligned}\quad (17)$$

где параметр $\xi \in [\gamma, 1]$, при этом точке A соответствует значение $\xi = 1$, а точке $C - \xi = \gamma$. По определению в точке B выполняется условие $d(z/t)/d\xi = 0$, поэтому, дифференцируя второе выражение (17) и приравнивая результат нулю, получаем уравнение, определяющее значение параметра $\xi = \xi_0$ в точке скачка

$$\begin{aligned}\left(\frac{\xi_0}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{3}{5} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, 2; \frac{8}{3}; \xi_0\right) - \frac{1}{\xi_0} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, 1; \frac{5}{3}; \xi_0\right) \right] + \\ + \frac{2}{1 - \xi_0} \Phi_1(\xi_0) = 0\end{aligned}\quad (18)$$

Теперь можно записать решение в полном виде

$$\begin{aligned}\varphi / t &= \gamma^{-\frac{2}{3}}(z/t) \quad \text{при } z/t \leq (z/t)_0 \\ \frac{\varphi}{t} &= \frac{1 - (z/t)\Phi_1[\gamma(\varphi/z)^{\frac{3}{2}}]}{{}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, 1; \frac{5}{3}; \gamma(\varphi/z)^{\frac{3}{2}}\right)} \quad \text{при } \begin{cases} 1 \geq z/t \geq (z/t)_0 \\ \varphi/t \leq (\varphi/t)_0 \end{cases} \\ \varphi / t &= 1 \quad \text{при } z/t \geq 1\end{aligned}\quad (19)$$

где $(\varphi/t)_0$ и $(z/t)_0$ — значения, получаемые из (17) при $\xi = \xi_0$. Из (19) видно, что при $z/t \leq (z/t)_0$ это решение совпадает с известным выражением для толщины теплового пограничного слоя в стационарном случае. Следовательно, $(z/t)_0$ определяет скорость границы установления стационарного распределения температуры.

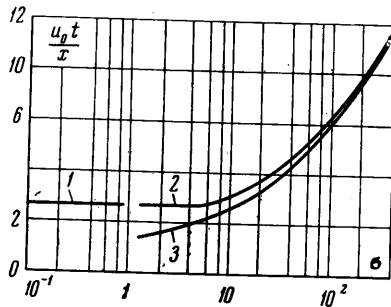
Однако необходимо отметить, что такое определение скорости справедливо лишь до тех пор, пока $\xi_0 \geq \gamma$. Действительно, как показывает анализ уравнения (18), существует такое критическое значение величины $\gamma = \gamma_0$, выше которого (18) определяет корень ξ_0 , выходящий из пределов области определения решения (17), т. е. $\xi_0 < \gamma_0$. Очевидно, что γ_0 подчиняется уравнению

$$\frac{3}{5} {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, 2; \frac{8}{3}; \gamma_0\right) - \frac{1 + \gamma_0}{\gamma_0(1 - \gamma_0)} {}_2F_1\left(-\frac{2}{3}, 1; \frac{5}{3}, \gamma_0\right) + \frac{2}{1 - \gamma_0} = 0 \quad (20)$$

численное решение которого дает значение $\gamma_0 \approx 0.5$. При этом $(z/t)_0 = 1$. Следовательно, среднее из равенств (19) для $\gamma > \gamma_0$ вырождается, а скорость границы ω при этом условии остается постоянной и равной единице. Таким образом, выражение для скорости ω границы между стационарной и нестационарной областями решения в случае нестационарного динамического пограничного слоя и $\sigma > 1$ имеет вид

$$\omega = (z/t)_0 \quad \text{при } \gamma < \gamma_0, \quad \omega = 1 \quad \text{при } \gamma \geq \gamma_0 \quad (21)$$

На фиг. 2 (кривая 2) представлена зависимость безразмерного времени перехода в стационарное состояние $u_0 t / x$ в точке с координатой x от чис-



Фиг. 2

ла σ , которая получается при возвращении к первоначальным координатам и вычисляется с помощью (21).

Перейдем к рассмотрению случая $\sigma < 1$ ($\epsilon > 1$). Из формулы (7) для $f_2(\epsilon)$ видно, что при значениях ϵ , близких к единице, два первых члена в скобках взаимно компенсируют друг друга, поэтому для сохранения достаточной точности решения и в этой области, необходимо принять во внимание по крайней мере три первых члена. В таком приближении система характеристических уравнений в стационарной области имеет вид

$$\frac{d\varphi}{1 + \frac{189}{74}\sigma^{\frac{1}{2}}[(\varphi/z)^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{9}\sigma^{\frac{1}{2}}]} = \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\frac{189}{74}[1 - \frac{4}{9}\sigma(z/\varphi)]}$$

а общий интеграл будет иметь вид

$$\begin{aligned} C_1\{z\pi; t + \frac{74}{189}\sigma^{-\frac{1}{2}}\pi\lambda\} &= 0 \\ \pi &= [(\varphi/z)^{\frac{1}{2}} - \chi_1\sigma^{\frac{1}{2}}]^{A_1} [(\varphi/z)^{\frac{1}{2}} - \chi_2\sigma^{\frac{1}{2}}]^{A_2} \\ \xi^* &= \int d\xi (\xi - \chi_1\sigma^{\frac{1}{2}})^{-A_1-1} (\xi - \chi_2\sigma^{\frac{1}{2}})^{-A_2-1} \xi, \quad [\xi^* = (\varphi/z)^{\frac{1}{2}}] \end{aligned}$$

Здесь χ_1 и χ_2 — соответственно положительный и отрицательный корни уравнения

$$\chi^2 - \chi + \frac{4}{9} - \frac{74}{189}\sigma^{-1} = 0, \quad A_i = \frac{2(\chi_i^2 - \frac{4}{9})}{\chi_i(2\chi_i - 1)}$$

Для нестационарной области система характеристик имеет вид

$$\frac{d\varphi}{1} = \frac{dt}{1} = \frac{dz}{\frac{189}{74}[1 - \frac{4}{9}\sigma(t/\varphi)]}$$

Общий интеграл в этом случае

$$\begin{aligned} C_2\{\varphi - t; z - t\Phi_2(\varphi/t)\} &= 0 \\ \Phi_2(x) &= \frac{189}{74}(1 - \frac{4}{9}\sigma) - \frac{42}{37}\sigma(x-1) \ln x / (1-x) \end{aligned}$$

Используя начальное условие (8), получим соотношение $C_1\{0; t\} = 0$, которое однозначно определит решение в области $z/t \leq 1$, а именно

$$\varphi/t = \chi_1^2\sigma(z/t) \quad (22)$$

Условие (9) и требование непрерывности решения на границе $z/t = 1$ дают

$$C_2\{0; z\} = 0, \quad C_2\{(\chi_1^2\sigma - 1)t; t[1 - \Phi_2(\chi_1^2\sigma)]\} = 0$$

Теперь можно записать окончательное решение

$$\begin{aligned} \varphi/t &= \chi_1^2\sigma(z/t) \quad \text{при } z/t \leq 1 \\ \frac{\varphi}{t} &= 1 + \frac{(\chi_1^2\sigma - 1)[(z/t) - \Phi_2(\varphi/t)]}{1 - \Phi_2(\chi_1^2\sigma)} \quad \text{при } 1 \leq z/t \leq \frac{189}{74}(1 - \frac{4}{9}\sigma) \\ \varphi/t &= 1 \quad \text{при } z/t \geq \frac{189}{74}(1 - \frac{4}{9}\sigma) \end{aligned} \quad (23)$$

Видно, что в этом случае граница между стационарной и нестационарной областями для теплового пограничного слоя совпадает с соответствующей границей для динамического слоя, поэтому $\omega = 1$. На фиг. 2 эта зависимость представлена кривой 1.

Отметим, что выражения (19) и (23) при $\sigma = 1$ близки к предельному решению (13), однако не совпадают с ним; это естественно объясняется тем, что в выражении для $f_1(\epsilon)$ пренебрегли малыми членами.

Частный случай восстановления теплового пограничного слоя при стационарном обтекании и числе $\sigma > 1$, рассмотренный в работе [3], легко получить, применяя условия (8) и (9) к интегралу C_1 . Получим

$$C_1\{0; t\} = 0, \quad C_1\{z; 0\} = 0$$

Тогда решение записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi / t &= \gamma^{-2/3}(z / t) \quad \text{при } (\varphi / t) {}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \gamma(\varphi / z)^{3/2}) \geqslant 1 \\ \varphi / t &= \{{}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \gamma(\varphi / z)^{3/2})\}^{-1} \quad \text{при } \gamma(\varphi / z)^{3/2} \leqslant 1\end{aligned}$$

Аналогично случаю нестационарного обтекания получается непрерывное, но многозначное решение. Выбирая из тех же соображений координату скачка и вводя параметризацию решения

$$\begin{aligned}\varphi / t &= \{{}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \xi)\}^{-1}, \quad z / t = (\gamma / \xi) {}^{2/3} \{{}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \xi)\}^{-1} \\ (\xi &\in [0, 1])\end{aligned}\quad (24)$$

получаем уравнение, аналогичное (18), определяющее $\xi = \xi_0$

$${}_2F_1(-2/\xi, 1; 5/3; \xi_0) - {}^{3/5}\xi_0 {}_2F_1(1/3, 2; 8/3; \xi_0) = 0 \quad (25)$$

Таким образом, решение имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi / t &= \gamma^{-2/3}(z / t) \quad \text{при } z / t \leqslant (z / t)_0 \\ \varphi / t &= \{{}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \gamma(\varphi / z)^{3/2})\}^{-1} \quad \text{при } z / t > (z / t)_0, \varphi / t \leqslant (\varphi / t)_0\end{aligned}\quad (26)$$

где $(\varphi / t)_0$ и $(z / t)_0$ — значения из (25) при $\xi = \xi_0$.

В рассматриваемом случае уравнение (25), а следовательно, и ξ_0 не зависят от γ . Это дает возможность в выражении для скорости границы между стационарной и нестационарной областями выделить явную зависимость от параметра γ

$$\omega = \gamma^{2/3}\xi_0^{-2/3} \{{}_2F_1(-2/3, 1; 5/3; \xi_0)\}^{-1} \quad (27)$$

Численное решение (25) дает значение $\xi_0 = 0.76$. Переходя к первоначальным переменным t и x , получаем, как и ранее, выражение для безразмерного времени установления стационарного состояния

$$u_0 t / x \approx 1.28 \sigma^{1/3} \quad (28)$$

Эта зависимость представлена на фиг. 2 (кривая 3).

Отметим, что уравнение (18) при $\sigma \gg 1$ ($\gamma \ll 1$) переходит в (25), поэтому асимптотический вид формулы (21), определяющей скорость границы для случая нестационарного обтекания пластины, совпадает с (27).

В заключение укажем на хорошее совпадение (28) с результатами работы [3], в которой для скорости набегающего стационарного потока жидкости вблизи пластины используется линейный профиль, а для аппроксимации профиля температуры в пограничном слое выбирается парабола третьей степени; с помощью численного интегрирования на ЦВМ для безразмерного времени перехода в стационарное состояние получена формула

$$u_0 t / x = 1.33 \sigma^{1/3}$$

Поступило 13 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., Гостехиздат, 1951.
2. Добрышман Е. М. Приближенное решение некоторых нестационарных задач пограничного слоя. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, стр. 402—410.
3. Goodman T. R. Effect arbitrary nonsteady wall temperature on incompressible heat transfer. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1962, vol. 84, No. 4, pp. 347—352.
4. Розеншток Ю. Л. Нестационарный тепловой ламинарный пограничный слой на полубесконечной пластинке, обтекаемой вязкой жидкостью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 6, стр. 20—26.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.