

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВДУВА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ РАСХОДА ВДУВАЕМОГО ГАЗА ВДОЛЬ ТЕЛА, ОБТЕКАЕМОГО ПОТОКОМ СО СТЕПЕННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ СКОРОСТИ

А. А. ФРОЛОВ

(Москва)

Выводятся формулы, позволяющие определить линейные поправки к коэффициентам трения и теплообмена при вдуве в пограничный слой различных газов с малым по величине, но произвольно изменяющимся вдоль тела расходом.

Исследован случай числа Маха, равного нулю, и температурного фактора, равного единице. При этом предполагается, что приведение относительного коэффициента теплообмена к зависимости от безразмерного вдува делает возможным, как и при вдуве, допускающем автомоделное решение, применение полученных результатов для произвольных значений этих параметров [1].

Предлагаемый метод решения основан на применении в линейном приближении интеграла Дюамеля для произвольного закона изменения расхода вдоль тела, если известно решение при скачкообразном его изменении. Для скачкообразного изменения расхода решение ищется с помощью преобразования Лапласа, и в этом смысле предлагаемый метод сходен с методом работы [5].

1. Система уравнений, описывающая пограничный слой смеси двух газов при числе Маха, равном нулю и температурном факторе, равном единице, в случае отсутствия химических реакций имеет вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{\rho_e}{\rho} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\mu}{\rho_e} \frac{\rho}{\rho_e} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y_1} &= 0, \quad u \frac{\partial c}{\partial x} + V \frac{\partial c}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 D \frac{\partial c}{\partial y_1} \right] \\ C_p \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\lambda}{\rho_e} \frac{\rho}{\rho_e} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \right) + D \left(\frac{\rho}{\rho_e} \right)^2 (C_{p_i} - C_{p_e}) \frac{\partial c}{\partial y_1} \frac{\partial \theta}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} y_1 &= \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy, \quad u = \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \\ V &= \frac{1}{\rho_e} \left(\rho v + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} \right), \quad \theta = \frac{T - T_e}{T_w - T_e} \quad (T_w, T_e = \text{const}) \\ u(0) &= 0, \quad c(0) = c_w, \quad \theta(0) = 1, \quad u(\infty) = u_e, \quad c(\infty) = 0, \quad \theta(\infty) = 0 \\ V(0) &= \frac{\rho_w v_w}{\rho_e} = - \left(\frac{\rho_w}{\rho_e} \right)^2 \frac{D}{1 - c_w} \frac{\partial c}{\partial y_1}(0) \\ \rho &= \rho_e \left[1 + c \left(\frac{M_e}{M_i} - 1 \right) \right]^{-1}, \quad c_p = c_{pe} \left[1 + c \left(\frac{c_{pi}}{c_{pe}} - 1 \right) \right] = \\ &= c_{pe} \left\{ 1 + c \left[\left(\frac{M_e}{M_i} - 1 \right) + \frac{M_e}{M_i} \left(\frac{n_i}{n_e} - 1 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Здесь c — концентрация вдуваемого газа, $n - 2$ — число степеней свободы однородного газа, e — внешний газ, i — вдуваемый.

При малом вдуве, чему соответствует и малое значение концентрации вдуваемого газа, переносные коэффициенты бинарной газовой смеси в линейном приближении можно представить в виде

$$\mu = \mu_e(1 + a_1c), \quad \lambda = \lambda_e(1 + b_1c)$$

Аналогично

$$\rho = \rho_e[1 - c(M_e/M_i - 1)]$$

Ограничиваясь линейным по величине расхода вдуваемого газа приближением, решение системы (1.1) ищем в виде

$$u = u_0 + u_1, \quad \theta = \theta_0 + \theta_1, \quad c = c_1$$

Здесь 0 — для непроницаемой стенки, 1 — для линейного приближения. В случае $u_e \sim x^m$ и скачкообразного изменения расхода вдуваемого газа

$$G^\circ(x < a) = 0, \quad G^\circ(x \geq a) = \text{const}, \quad \left(G^\circ = \frac{Gc\rho_0}{\alpha_0}\right)$$

Здесь G — размерный расход, α — коэффициент теплообмена; предполагая, как и в работах [2, 3], что при этом уравнения пограничного слоя не теряют смысла, решение можно искать в виде

$$u_0 = u_e f_0', \quad u_1 = u_e G^\circ \frac{\partial F_\tau}{\partial \xi}, \quad \theta_1 = G^\circ F_q(X, \xi), \quad c_1 = G^\circ F_c(X, \xi) \quad (1.2)$$

Здесь $X = x/a - 1$, а штрих означает производную по переменной

$$\xi = y_1 \left[\frac{u_e(m+1)}{2\nu_e x} \right]^{1/2}$$

Если известны функции F_τ , F_q и F_c , то в линейном приближении в случае произвольного изменения расхода $G^\circ(x)$ с помощью интеграла Дюамеля найдем

$$\begin{aligned} u_1 &= u_e \left[G^\circ(0) \frac{\partial F_\tau}{\partial \xi}(\infty, \xi) + \int_0^\infty \frac{\partial F_\tau}{\partial \xi} \left(\frac{x}{a} - 1, \xi \right) \frac{dG^\circ}{da} da \right] = \\ &= u_e \int_0^\infty \frac{\partial^2 F_\tau}{\partial X \partial \xi}(X, \xi) G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX \\ \theta_1 &= \int_0^\infty \frac{\partial F_q}{\partial X}(X, \xi) G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX \\ c_1 &= \int_0^\infty \frac{\partial F_c}{\partial X}(X, \xi) G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX \quad \left(X = \frac{x}{a} - 1 \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Применим (1.3) к случаю $G^\circ \sim x^p$, исследованному в работе [4], тогда

$$u_1 = u_e G^\circ H_\tau'(\xi, p), \quad \theta_1 = G^\circ H_q(\xi, p), \quad c_1 = G^\circ H_c(\xi, p)$$

Здесь

$$H(p) = \int_0^\infty \frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{(1+X)^p}$$

есть преобразованная по Лапласу функция

$$F(e^t - 1) \quad (t = \ln(1+X))$$

Для функций H имеем [4] (1.4)

$$H_\tau = \frac{S\theta_0'(0)}{p\sigma_0'(0, p)} f_1(\xi, p), \quad H_q = \frac{S\theta_0'(0)}{p\sigma_0'(0, p)}, \quad \theta_1(\xi, p)$$

$$H_c = \frac{S\theta_0'(0)}{p\sigma_0'(0, p)} \sigma_0(\xi, p)$$

где f_1 , θ_1 и σ_0 определяются уравнениями

$$f_0''' + f_0 f_0'' + \beta(1 - f_0'^2) = 0 \quad \left(\beta = \frac{2m}{m+1} \right)$$

$$P^{-1}\theta_0'' + f_0\theta_1' = 0 \quad \left(P = \frac{c_{pe}\mu_e}{\lambda_e} \right)$$

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = 1, \quad \theta_0(0) = 1, \quad \theta_0(\infty) = 0$$

$$L_\tau f_1 = -\frac{1}{S} \sigma_0'(0) f_0'' - \left[a_1 + \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) \right] (\sigma_0 f_0'')' + \beta \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) \sigma_0$$

$$L_q \theta_1 = -\theta_0' \left\{ \frac{\sigma_0'(0)}{S} + [1 + p(2 - \beta)] f_1 \right\} - \left[b_1 + \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) \right] \left(\frac{\sigma_0 \theta_0'}{P} \right)' +$$

$$+ \left(\frac{c_{pi}}{c_{pe}} - 1 \right) \left(\frac{1}{P} \sigma_0 \theta_0'' - \frac{1}{S} \sigma_0' \theta_0' \right) \left(S = \frac{\mu_e}{\rho_e D} \right)$$

$$L_c \sigma_0 = 0 \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения для операторов

$$L_\tau f_1 = f_1''' + f_1 f_1'' + f_0'' f_1 [1 + p(2 - \beta)] - f_0' f_1' [2\beta - p(2 - \beta)]$$

$$f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(\infty) = 0$$

$$L_q \theta_1 = P^{-1} \theta_1'' + f_0 \theta_1' - p(2 - \beta) f_0' \theta_1, \quad \theta_1(0) = \theta_1(\infty) = 0$$

$$L_c \sigma_0 = S^{-1} \sigma_0'' + f_0 \sigma_0' - p(2 - \beta) f_0' \sigma_0, \quad \sigma_0(0) = 1, \quad \sigma_0(\infty) = 0$$

Так как уравнения системы (1.5) линейны, то можно в явном виде выделить влияние различных физических параметров вдуваемого газа на профили скорости и температуры. Полагая

$$f_1 = \frac{\sigma_0'(0)}{S} f_{10} + \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) f_{11} + a_1 f_{12}$$

$$\theta_1 = \frac{\sigma_0'(0)}{S} \theta_{10} + \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) \theta_{11} + a_1 \theta_{12} + b_1 \theta_{13} + \frac{M_e}{M_i} \left(\frac{n_i}{n_e} - 1 \right) \theta_{14}$$

получаем для f_{1j} и θ_{1j} соответствующие уравнения, уже не содержащие характерные физические параметры газа, кроме чисел P и S .

Численное решение системы (1.5) позволяет найти коэффициенты вдува, определяющие в линейном приближении влияние вдува на коэффициенты трения и теплообмена при различных p

$$\gamma_\tau = \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0 G^\circ}, \quad \gamma_q = \frac{q - q_0}{q_0 G^\circ} \quad (1.6)$$

При этом, выделяя в явном виде влияние различных физических параметров, можно представить

$$\gamma_\tau = \gamma_{\tau_0} + \gamma_{\tau 1} \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) + \gamma_{\tau 2} a_1 \quad (1.7)$$

$$\gamma_q = \gamma_{q_0} + \gamma_{q 1} \left(1 - \frac{M_e}{M_i} \right) + \gamma_{q 2} a_1 + \gamma_{q 3} b_1 + \gamma_{q 4} \frac{M_e}{M_i} \left(\frac{n_i}{n_e} - 1 \right)$$

Значения коэффициентов γ_j для некоторых значений p представлены в [4].

Задача нахождения функций $F(X, \xi)$ сводится, таким образом, к исследованию системы (1.5) при различных p и обращению преобразования Лапласа.

2. Поведение функций $F(X, \xi)$ при малых X задается поведением функции $H(\xi, p)$ при больших p [3].

Исследование системы (1.5) для больших p проводилось методом пограничного слоя [6], когда решение ищется в виде гладких и локальных функций, удовлетворяющих поставленным граничным условиям. Введение локальных функций обусловлено тем, что большой параметр p стоит в операторах L множителем при членах с низшими производными и отбрасывание старших производных для гладких функций при $p \rightarrow \infty$ не позволяет удовлетворить всем граничным условиям.

Для иллюстрации всех особенностей решения приведено исследование функции f_{10} , задающей линейную поправку к профилю скорости при вдуве однородного газа. Из системы (1.5) для определения f_{10} можно получить

$$\begin{aligned} f_{10}''' + f_0 f_{10}'' + f_0'' f_{10} [1 + p(2 - \beta)] - f_0' f_{10}' [2\beta + p(2 - \beta)] = \\ = - \frac{\sigma_0'(0)}{S} f_0'' \\ f_{10}(0) = f_{10}'(0) = f_{10}'(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вблизи стенки представляем f_{10} в виде локальной функции

$$f_{10} = \frac{\sigma_0'(0)}{Sp(2 - \beta)} g(\eta), \quad \eta = \xi [f_0''(0)p(2 - \beta)]^{1/3} \quad (2.2)$$

Пренебрегая членами более высоких порядков малости, для $g(\eta)$ получаем

$$g''' + g - \eta g' = -1, \quad g(0) = g'(0) = 0 \quad (2.3)$$

При $\eta \rightarrow \infty$ граничные условия должны обеспечить плавный переход из локальной функции в гладкую.

Продифференцировав по η уравнение (2.3), получим

$$g^{IV} - \eta g'' = 0 \quad (2.4)$$

Общее решение (2.4) имеет вид

$$g'' = C_1 \sqrt{\eta} K_{1/3} \{ {}^{2/3} \eta^{3/2} \} + C_2 \sqrt{\eta} I_{1/3} \{ {}^{2/3} \eta^{3/2} \}$$

где I и K — модифицированные функции Бесселя [7], такие что I экспоненциально возрастает, а K экспоненциально убывает при $\eta \rightarrow \infty$.

Исходя из требований сопряжения с гладкой функцией, положим $C_2 = 0$. Используя имеющееся для $K_\nu(z)$ разложение при малых z [7]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} - \left(\frac{z}{2} \right)^{2\nu} \frac{1}{\Gamma(1 + \nu)} \right]$$

и условие $g'''(0) = -1$, которое следует из (2.3), получаем

$$C_1 = \frac{2 \cdot 3^{2/3} \sin^{1/3} \pi \Gamma(4/3)}{\pi}$$

Тогда

$$g''(0) = \frac{\Gamma(4/3)}{\Gamma(2/3)} 3^{2/3} = 1.372$$

По формулам (1.6) и (1.7), определяющим коэффициенты вдува, найдем

$$\gamma_{\tau 0} = -\frac{\alpha_0}{c_p \rho_e \nu_e} \left[\frac{x(2-\beta)}{u_e \nu_e} \right]^{1/2} [f_0''(0) p(2-\beta)]^{-1/3} g''(0)$$

Аналогично

$$\gamma_j = -\frac{\alpha_0}{c_p \rho_e \nu_e} \left[\frac{x(2-\beta)}{u_e \nu_e} \right]^{1/2} [f_0''(0) p(2-\beta)]^{-1/3} A_j \quad (2.5)$$

Величины A_j были найдены с помощью численного интегрирования системы уравнений, получающейся из (1.5) с помощью преобразования (2.2). Некоторые значения A_j представлены в табл. 1.

Таблица 1

p	1					0.75	0.5
S	1	0.769	0.591	0.455	0.350	1	1
$A_{\tau 0}$	1.372	1.372	1.372	1.372	1.372	1.372	1.372
$A_{\tau 1}$	-0.457	-0.417	-0.379	-0.344	-0.309	-0.457	-0.457
$A_{\tau 2}$	-0.457	-0.417	-0.379	-0.344	-0.309	-0.457	-0.457
$A_{q 0}$	1.372	1.372	1.372	1.372	1.372	1.190	0.981
$A_{q 1}$	-1.143	-1.125	-1.110	-1.096	-1.081	-0.977	-0.875
$A_{q 2}$	0.229	0.187	0.154	0.125	0.101	0.215	0.197
$A_{q 3}$	-0.686	-0.605	-0.535	-0.470	-0.411	-0.647	-0.590
$A_{q 4}$	0.686	0.703	0.731	0.752	0.772	0.544	0.390

При достаточно больших ξ функция $f_{10}(\xi)$ — гладкая. Тогда из (2.1) с точностью до членов более высокого порядка

$$f_0 f_{10} - f_0' f_{10}' = 0, \text{ или } f_{10} = C f_0'$$

Константа C определяется из условия сопряжения с локальной функцией: значение f_{10}' при $\eta \rightarrow \infty$ для локальной функции должно совпадать со значением $f_{10}'(0)$ для гладкой функции.

Тогда

$$C = \frac{\sigma_0'(0) g'(\infty)}{S [f_0''(0) p(2-\beta)]^{2/3}}$$

С помощью интегрирования (2.3) можно получить $g'(\infty) = 1.288$, т. е.

$$f_{10} = \frac{1.288 \sigma_0'(0)}{S [f_0''(0) p(2-\beta)]^{2/3}} f_0'(\xi) \quad (2.6)$$

Обращая коэффициенты $\gamma_j(p)$, определенные соотношением (2.5), получаем коэффициенты вдува $\Gamma_j(X)$, задающие по (1.6) и (1.7) влияние вдува на трение и теплообмен при скачкообразном изменении вдува для малых X

$$\Gamma_j(X) = -\frac{\alpha_0 A_j}{c_p \rho_e \Gamma(4/3)} \left[\frac{x(2-\beta)}{u_e \nu_e} \right]^{1/2} \frac{X^{1/3}}{[f_0''(0) (2-\beta)]^{1/3}} \quad (2.7)$$

Здесь использовалось свойство преобразования Лапласа: изображению $1/p^\nu$ ($\text{Re } \nu > -1$) соответствует оригинал $t^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ [8].

Подставляя выражение (2.6) для f_{10} в (1.4), найдем $H_{\tau_0}(p, \xi)$ для достаточно больших ξ . Обращая $H_{\tau_0}(p, \xi)$, для $F_{\tau_0}(X, \xi)$ получаем

$$F_{\tau_0}(X, \xi) = -BX^{2/3}f_0'(\xi),$$

$$B = \frac{1.288\alpha_0}{\Gamma(5/3)c_p\rho_e} \left[\frac{x(2-\beta)}{ue^{Ve}} \right]^{1/2} [f_0''(0)(2-\beta)]^{-2/3}$$

Таким образом, на достаточно большом расстоянии от стенки при малых X

$$u = u_e(f_0' - BG^2X^{2/3}f_0'') = u_e f_0'(\xi - BG^2X^{2/3})$$

т. е. непосредственно за скачком вдува профиль скорости вдали от стенки как бы смещается подобно самому себе на величину, пропорциональную $X^{2/3}$. При вдуве неоднородного газа коэффициент B зависит от его физических параметров. Аналогичный результат получается и для профиля температуры.

3. Поведение функций $F(X)$ при больших X определяется поведением функций $H(p)$ в окрестности их первых полюсов. Расположение полюсов связано с собственными числами операторов $L(-l_\tau, -l_q, -l_c)$ и корнями уравнения $\sigma_0'(0, p) = \mathcal{J}(-l_0)$.

Первым корнем уравнения $\sigma_0'(0, p) = 0$ будет $p = -1/(2-\beta)$ ($l_0 = 1/(2-\beta)$). При этом значении p уравнение для σ_0 из системы (1.5) принимает вид

$$S^{-1}\sigma_0'' + f_0\sigma_0' + f_0'\sigma_0 = 0 \text{ или } S^{-1}\sigma_0' + f_0\sigma_0' = C$$

но так как при $\xi \rightarrow \infty$ по условию $\sigma_0 \rightarrow 0$, а следовательно, и $\sigma_0' \rightarrow 0$, то $C = 0$ и $\sigma_0'(0) = 0$.

Таблица 2

β	1	0.6	0.5	0.3	0.2	0	-0.1	-0.16	-0.18	-0.19
l_τ 10^2	412	236	206	157	136	100	83	72	68	54
l_q 10^2	168	118	106	97	90	79	73	70	67	67
$-b_{\tau_0}$ 10^3	11	32	42	67	97	200	540	1230	2750	7600
a_{τ_1} 10^3	-110	-100	-97	-84	-70	0	153	670	1620	3720
b_{τ_1} 10^3	—	—	—	—	33	86	114	94	5	0
a_{τ_2} 10^2	22	20	19	-17	14	0	-31	-134	-322	-745
b_{τ_2} 10^3	—	—	—	—	-21	86	300	1510	2300	6200
a_{q_0} 10^2	-15	-20	-20	-20	-19	0	40	244	-1180	-630
$-b_{q_0}$ 10^3	—	—	—	—	91	200	600	1780	12100	-7250
a_{q_1} 10^3	18	18	-19	20	19	16	11	-50	-60	47
b_{q_1} 10^2	—	—	—	—	—	14	12	92	86	-12
$-a_{q_2}$ 10^3	26	20	25	43	57	145	410	1770	11000	-5800
b_{q_2} 10^2	—	—	—	—	—	14	35	270	1080	-725
a_{q_3} 10^2	12	14	14	15	15	15	15	14	13	12
a_{q_4} 10^2	12	14	14	15	15	15	15	14	13	12
γ_{q_1} 10^2	87	86	86	86	88	94	100	119	142	180
$-\gamma_{q_2}$ 10^2	15	17	17	20	21	28	41	63	90	150
γ_{q_3} 10^2	61	60	60	60	60	61	62	63	64	65
$-\gamma_{q_4}$ 10^2	61	60	60	60	60	61	62	63	64	65

Все $a_{\tau_0} = 0$, $b_{q_3} = 0$, $b_{q_4} = 0$, все $\gamma_{q_0} = -1$.

Собственные числа операторов L_τ и L_q были получены с помощью численного интегрирования уравнений системы (1.5). Некоторые значения $l_\tau \times 10^2$ и $l_q \times 10^2$ при $P = 1$ приведены в табл. 2.

При $P \approx 1$ l_q практически не зависит от P . Например, при $\beta = 0$ для $P = 1$ $l_q = 0.79$, а для $P = 0.5$ $l_q = 0.81$.

Если полюса были расположены близко друг к другу, то поведение $H(p)$ исследовалось в окрестности двух соседних полюсов. При $\beta \approx -0.18$, как видно из табл. 2, функции $H_q(p)$ имели полюса второго порядка.

Обращение преобразования Лапласа позволяет получить коэффициенты $\Gamma(X)$ для больших X

$$\begin{aligned} \Gamma_\tau &= \gamma_\tau(0) - a_\tau(X+1)^{-l_\tau} - b_\tau(X+1)^{-l_\tau} \\ \Gamma_q &= \gamma_q(0) - a_q(X+1)^{-l_q} - b_q(X+1)^{-l_q} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь использовалось свойство преобразования Лапласа: изображению $(p+l)^{-1}$ соответствует оригинал $(1 - e^{-lt}) / l (t = \ln(1+X))$ [8]. Коэффициенты $\gamma(0)$ определяют значения функций $\Gamma(X)$ при $X \rightarrow \infty$. Они соответствуют случаю $p = 0$, задающему вдув при автомодельном решении. Некоторые значения $\gamma(0)$ приведены в [4].

Значения коэффициентов a и b для случая $P = S = 1$ приведены в табл. 2.

Зависимость коэффициентов a и b от P и S была исследована при $\beta = 0$. Качественно она оказалась совпадающей с аналогичной зависимостью коэффициентов $\gamma(0)$, что подтверждает замеченный в [4] универсальный характер такой зависимости при любых законах изменения расхода вдоль тела.

Полученные результаты для малых и больших X могут быть интерполированы для промежуточных их значений. Дополнительного исследования $\Gamma(X)$ при промежуточных X не проводилось.

4. Если известны коэффициенты вдува при скачкообразном изменении расхода, то при произвольном его изменении

$$S = S_0 \left[1 + \int_0^\infty \frac{d\Gamma_s}{dX} G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dx \right] \quad (S = q_w, \tau_w) \quad (4.1)$$

При этом расход может быть непрерывным, скачкообразным и сосредоточенным.

Если функция $G^\circ(x)$ достаточно гладкая, то формулу (4.1) можно упростить представив, ограничиваясь несколькими первыми членами, $G^\circ = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \dots$

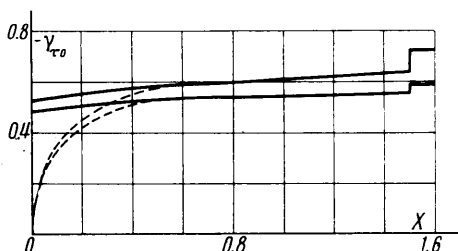
Тогда

$$\int_0^\infty \frac{d\Gamma}{dX} G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX = a_1 \gamma(\alpha_1) x^{\alpha_1} + a_2 \gamma(\alpha_2) x^{\alpha_2} + \dots \quad (4.2)$$

Формула (4.2) позволяет исключить неточности в определении $\Gamma(x)$ при промежуточных X .

Если

$$G^\circ(x < a) = 0, \quad G^\circ(x \geq a) \sim x^\alpha,$$



то

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Gamma}{dX} G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX = G^\circ \gamma(X, \alpha) \quad (x \geq a)$$

$$\gamma(X, \alpha) = \int_0^{\frac{x}{a}-1} \frac{d\Gamma}{dX} \frac{dX}{(1+X)^\alpha} \quad \left(X = \frac{x}{a} - 1 \right)$$

При $X \ll 1$ с точностью, превышающей (2.7)

$$\gamma(X, \alpha) = \Gamma(X).$$

При $X \gg 1$

$$\gamma(X, \alpha) = \gamma(\alpha) - \frac{al_1}{l_1 + \alpha} (X+1)^{-(l_1+\alpha)} - \frac{bl_2}{l_2 + \alpha} (X+1)^{-(l_2+\alpha)} \quad (4.3)$$

Чем больше α , тем быстрее стремится $\gamma(X, \alpha)$ к своему асимптотическому значению. На фигуре проведено сравнение кривой $\gamma_{\tau_0}(X)$, соответствующей автомодельному закону изменения вдува после скачка, и кривой $\gamma_{\tau_0}(X, 1/2)$, соответствующей постоянному вдуву после скачка при $\beta = 0$. Штрихами отмечена возможная интерполяция. Ошибка интерполяции не может быть большой и находится в пределах различия результатов численных расчетов, выполненных с помощью разных схем численного решения [2, 3].

Если $G^\circ = g^\circ a \delta(x-a)$, где δ — функция Дирака, то

$$\int_0^{\infty} \frac{d\Gamma}{dX} G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX = g^\circ \Gamma_\delta(X), \quad \Gamma_\delta(X) = (X+1) \frac{d\Gamma}{dX} \quad \text{при } x > a$$

$$\Gamma_\delta \sim X^{-2/3} \quad \text{при } X \ll 1, \quad \Gamma_\delta = l_1 a (X+1)^{-l_1} + l_2 b (X+1)^{-l_2} \quad \text{при } X \gg 1$$

При вдуве газа через щель конечной ширины, когда

$$G^\circ(x < a) = 0, \quad G^\circ(a \leq x \leq b) = C_1 x^\alpha, \quad G^\circ(x > b) = 0$$

влияние вдува приводит к изменению местного теплового потока на величину

$$q_{w1} = q_{w0} \int_0^{\infty} \frac{d\Gamma_q}{dX} G^\circ \left(\frac{x}{1+X} \right) dX, \quad q_{w0} = C_2 x^{(\beta-1)/(2-\beta)}$$

а полного теплового потока на участке $[a, c]$ — на величину

$$Q_{w1}(c, \alpha) = \int_a^c q_{w1} dx = \frac{C_1 C_2}{\alpha + \lambda} \left\{ b^{\alpha+\lambda} \gamma_q \left(\frac{c}{b} - 1, -\lambda \right) - \right. \\ \left. - a^{\alpha+\lambda} \gamma_q \left(\frac{c}{b} - 1, -\lambda \right) + c^{\alpha+\lambda} \left[\gamma_q \left(\frac{c}{a} - 1, \alpha \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_q \left(\frac{c}{b} - 1, \alpha \right) \right] \right\} \left(\lambda = \frac{1}{2-\beta} \right) \quad (4.4)$$

Изменение полного теплового потока на всей поверхности тела

$$\Theta_{w1}(\infty, \alpha) = \frac{C_1 C_2}{\alpha + \lambda} [b^{\alpha+\lambda} - a^{\alpha+\lambda}] \gamma_q(-\lambda)$$

Перейдя к полному размерному вдуву $G(a, b)$ на участке $[a, b]$ можно

получить

$$Q_{w1}(\infty, \alpha) = (h_e - h_w) \gamma_q(-\lambda) G(a, b) \quad \left(\lambda = \frac{1}{2 - \beta} \right)$$

где h — удельная энтальпия газа.

Таким образом, изменение полного теплового потока в линейном приближении не зависит от показателя α , а следовательно, и вообще от закона вдува газа через щель и связано лишь с полным его расходом.

Значения $\gamma_q(-1 / (2 - \beta))$ приведены в табл. 2 при $P = S = 1$. Заметим, что $\gamma_{q_0} \equiv -1$ и не зависит от P и S . Это является выражением того очевидного факта, что при вдуве однородного газа

$$Q_{w1}(\infty) = -(h_e - h_w) G(a, b)$$

Формула (4.4) позволяет оценить расстояние от точки прекращения вдува, начиная с которого можно пренебречь действием завесного эффекта на местные тепловые потоки. Для относительной ошибки в определении поправки к полному тепловому потоку найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= \frac{Q_{w1}(\infty, \alpha) - Q_{w1}(c, \alpha)}{Q_{w1}(\infty, \alpha)} = \left(\frac{1}{2 - \beta} = \lambda \right) \\ &= \frac{a_q l_1}{\gamma_q(-\lambda) (l_1 - \lambda)} \left(\frac{c}{b} \right)^{-l_1 + \lambda} \frac{\alpha + \lambda}{\alpha + l_1} \frac{1 - (a/b)^{\alpha + l_1}}{1 - (a/b)^{\alpha + \lambda}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь выписан только член, получающийся из первого слагаемого в разложении (4.3). Выражение (4.5) может быть продолжено с учетом остальных слагаемых. Если $a/b \approx 1$ (узкая щель), то

$$\varepsilon_q = \frac{a_q l_1}{\gamma_q(-\lambda) (l_1 - \lambda)} \left(\frac{c}{b} \right)^{-l_1 + \lambda} \left(\frac{1}{2 - \beta} = \lambda \right) \quad (4.6)$$

По формуле (4.6) величина ε_q не зависит от закона изменения расхода вдоль щели. Можно показать, что это влияние проявляется, лишь начиная с членов порядка $(1 - a/b)^2$ в разложении ε_q , по степеням $(1 - a/b)$, и им можно пренебречь уже и тогда, когда влияние завесного эффекта еще существенно. Применяя (4.6) для оценки длительности действия завесного эффекта вниз по потоку, можно получить, например, на пластине $\varepsilon_{q_0} = 0.4(b/c)^{0.5}$, а в передней критической точке $\varepsilon_{q_0} = 0.4(b/c)^{0.68}$. Величина ε_{q_0} становится меньше 0.1 на пластине при $c/b > 16$, а в передней критической точке при $c/b > 7$.

Поступило 30 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Мугалев В. П. Влияние вдувания различных газов на теплообмен вблизи передней критической точки затупленного тела. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
2. Smith A. M. O., Clutter D. W. Solution of the incompressible laminar boundary layer equations. AIAA Journal, 1963, vol. No. 9.
3. Rheinboldt W. On the calculations of steady Boundary Layers of continuous suction, with discontinuously variable suction velocity. NASA Techn. Transl. F-29, 1961.
4. Фролов А. А. Определение влияния вдува различных газов в пограничный слой на трение, тепло- и массообмен при степенном изменении скорости внешнего потока. Изв. АН СССР, МЭГ, 1968, № 5.
5. Lighthill M. J. Contributions on the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1950, vol. 202, No. 1070.
6. Вишик М. М., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5(77).
7. Янге Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, Изд. 6. М., «Наука», 1964.
8. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.