№ 4 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1970

О КРИТЕРИЯХ ОТРЫВА ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

В предположении, что характер течения в данном сечении пограничного слоя зависит только от поведения внешнего потока в малой окрестности рассматриваемого сечения, выведены критерии отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоя при трехмерном течении. Найденные критерии отрыва являются следствием полученного в работе [1] необходимого условия отрыва трехмерного пограничного слоя.

1. При рассмотрении двумерного пограничного слоя часто пользуются критериями отрыва, т. е. соотношениями между параметрами, выполняющимися с большой степенью точности в точке отрыва и позволяющими оценить возможность наступления отрыва. Критерий отрыва может быть получен из тех или иных приближенных методов расчета пограничного слоя с использованием необходимого условия отрыва, но может быть также выведен непосредственно из тех физических предположений, на которые фактически опираются приближенные методы. Этот последний путь, развитый для двумерного пограничного слоя в работе [2], позволяет получить также критерий отрыва трехмерного слоя.

Попытка найти критерий отрыва трехмерного пограничного слоя была сделана в [3]. Однако, не имея локальных свойств линии отрыва и не привлекая дополнительных соображений, о которых речь будет идти ниже, авторы смогли лишь получить, что комбинация величин, аналогичная параметру отрыва двумерного пограничного слоя, является функцией ряда аргументов, в том числе отношения производных давления вдоль и по нормали к линии отрыва и отношения нормальной к линии отрыва компоненты скорости внешнего потока к полной скорости. Ни вид функциональной зависимости от этих параметров, ни их значения заранее не известны (их значения нельзя рассчитать до того, как будет найдено направление линии отрыва). Поэтому и применение этих общих функциональных зависимостей невозможно.

Для вывода критерия отрыва необходимо прежде всего иметь необходимое условие отрыва. При двумерном течении в пограничном слое таким условием является требование, чтобы в какой-либо точке было $\tau_w = 0$. В работе [1] показано, что в случае трехмерного течения в пограничном слое за необходимое условие отрыва может быть принято соотношение

$$\boldsymbol{\tau}_w \cdot \operatorname{grad} p = 0, \qquad \mathbf{U} \cdot \operatorname{grad} p > 0 \tag{1.1}$$

Основным предположением, позволяющим получить критерий отрыва двумерного пограничного слоя, является предположение о том, что характер течения в данном сечении пограничного слоя зависит только от поведения потока в малой окрестности этого сечения. В случае двумерного пограничного слоя справедливость этого допущения подтверждается многочисленными экспериментальными данными [2].

Естественно предположить, что и в случае трехмерного пограничного слоя течение в рассматриваемом сечении зависит лишь от поведения потока в малой окрестности. Следует заметить, однако, что в настоящее время нет достаточно полных экспериментальных данных по отрыву трехмерного пограничного слоя, позволяющих установить границы справедливости этого предположения. В дальнейшем будем принимать, что рассматриваются такие случаи течения в трехмерном пограничном слое, когда эта гипотеза выполняется с достаточной степенью точности.

2. Обобщим на трехмерное течение метод вывода параметра отрыва, данный в работе [2]. Высказанное выше предположение означает, что параметры потока вне пограничного слоя можно разложить в окрестности данной точки в ряды и ограничиться членами первого порядка малости. При этом, чтобы задать давление в малой окрестности, необходимо задать значение p в рассматриваемом сечении и вектор $\operatorname{grad} p = \pi$. Под окрестностью точки при задании внешнего потока в задачах о пограничном слое надо понимать малую область на поверхности, являющейся границей пограничного слоя. Поэтому π и все рассматриваемые в дальнейшем вектора являются плоскими векторами, лежащими в касательной плоскости к этой граничной поверхности.

Для задания плотности с точностью до величин второго порядка малости необходимо знать значение ρ в данной точке и значение $\operatorname{grad} \rho$. Так как поток вне пограничного слоя невязкий и нетеплопроводный, то плотность и давление связаны соотношением

$$p = C(s)\rho^{\varkappa}$$

где энтропия s постоянна вдоль линии тока (если в окрестности рассматриваемого сечения нет скачков) и может быть различной на разных линиях тока. Из этого уравнения следует, что $\operatorname{grad} \rho$ выражается через π и $\sigma = \operatorname{grad} s$. Задавать вектор σ вместо $\operatorname{grad} \rho$ целесообразнее потому, что направление σ по отношению к другим векторам не произвольно. Так как энтропия постоянна вдоль линии тока, то градиент энтропии перпендикулярен касательной к линии тока, т. е. вектору скорости $\mathbf{U}$.

Чтобы задать скорость внешнего потока в малой окрестности, необходимо иметь величину и направление скорости. Поэтому необходимо знать значение вектора скорости $\mathbf{U}$ в данной точке, а также значение $\operatorname{grad} U$ ($U = |\mathbf{U}|$) и $\operatorname{grad} \alpha$, где α — угол скорости с некоторым фиксированным направлением. Из интеграла Бернулли

$$\tfrac{1}{2}U^2 + \varkappa p \,/\, (\varkappa - 1)\rho = i_0$$

где i_0 может быть различным на разных линиях тока, $\operatorname{grad} U$ может быть выражен через π, σ и $\operatorname{grad} i_0 = \mathbf{I}$.

Вектор $\mathbf{I}$ целесообразно задавать вместо $\operatorname{grad} U$, так как он так же, как и σ, перпендикулярен касательной к линии тока. Изменение угла α вдоль линии тока может быть определено из уравнения движения через уже известные величины. Таким образом, для задания $\operatorname{grad} \alpha$ требуется задать дополнительно лишь его проекцию на нормаль к линии тока, т. е. величину $A = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \alpha$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к линии тока, проходящей через рассматриваемую точку.

Итак, параметры внешнего потока в малой окрестности рассматриваемого сечения определяются заданием в данном сечении следующих величин:

$$p,\ \rho,\ \mathbf{U},\ \pi = \operatorname{grad} p, \quad \sigma = \operatorname{grad} s, \quad \mathbf{I} = \operatorname{grad} i_0, \quad A = (\mathbf{n}, \operatorname{grad} \alpha),\ \varkappa$$

К ним необходимо присоединить для определения параметров пограничного слоя характерный размер пограничного слоя z и характерное значение вязкости μ. Для простоты стенку будем считать теплоизолированной и тепловые процессы рассматривать не будем, хотя все рассуждения остаются справедливыми и для случая обтекания поверхности с произвольным распределением температуры.

Два векторных параметра $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\pi}$ дают три независимых скалярных параметра, инвариантных по отношению к преобразованию системы координат, от которых могут зависеть скалярные искомые функции

$$U = |\mathbf{U}|, \quad \pi = |\boldsymbol{\pi}|, \quad \cos\varphi = (\mathbf{U}, \boldsymbol{\pi}) \,/\, U\pi$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\pi}$. Вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{I}$ дают дополнительно только по одному независимому скалярному параметру, так как их скалярное произведение с вектором скорости $\mathbf{U}$ всегда равно нулю. За эти скалярные параметры могут быть приняты величины σ и I, равные модулям соответствующих векторов, взятым со знаком плюс, если поворот от $\mathbf{U}$ к $\boldsymbol{\sigma}$ (или $\mathbf{I}$ соответственно) происходит в ту же сторону, что и от $\mathbf{U}$ к $\boldsymbol{\pi}$, и со знаком минус, если — в обратную. Таким образом получаем систему одиннадцати независимых скалярных определяющих размерных параметров для данного сечения трехмерного пограничного слоя

$$U, \ p, \ \rho, \ \pi, \ \cos\varphi, \ \sigma, \ I, \ A, \ \mu, \ z, \ \varkappa$$

Из них можно образовать восемь независимых безразмерных комбинаций, от которых должны зависеть все искомые безразмерные величины

$$M = (\rho U^2 / \varkappa p)^{1/2}, \quad R = \rho U z / \mu, \quad \xi_t = \pi z / \rho U^2 \qquad (2.1)$$
$$\Sigma = \sigma z, \quad \rho I z / p, \quad a = A z, \quad \cos\varphi, \quad \varkappa$$

В подавляющем большинстве практически интересных случаев величина i_0 постоянна во всем потоке (в том числе и при наличии ударных волн). Для таких течений $I \equiv 0$. Если течение дозвуковое или сверхзвуковое без ударных волн, то обычно энтропия также постоянна во всем потоке и $\Sigma \equiv 0$. В сверхзвуковом потоке за слабыми или слабоискривленными ударными волнами энтропия меняется не сильно, т. е. Σ малая величина, которую можно приближенно считать равной нулю. Поэтому для простоты дальнейшие рассуждения проведем для случая, когда можно принять $I = 0$ и $\Sigma = 0$, хотя все сказанное ниже остается справедливым и при I и Σ, отличных от нуля.

Если направления векторов $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\pi}$ не совпадают, то любой вектор, лежащий в касательной плоскости к обтекаемой поверхности, может быть разложен по этим направлениям. Введем единичные вектора

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{U} / U, \qquad \mathbf{e}_2 = \boldsymbol{\pi} / \pi$$

Тогда вектор напряжения трения на стенке $\boldsymbol{\tau}_w$ может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{\tau}_w / \rho U^2 = \mathbf{e}_1 f_1(M, R, \xi_t, a, \cos\varphi, \varkappa) + \mathbf{e}_2 f_2(M, R, \xi_t, a, \cos\varphi, \varkappa)$$

Ряд общих соображений позволяет найти вид зависимости f_1 и f_2 от некоторых из их аргументов. Предположим, прежде всего, что градиент давления стремится по величине к нулю, оставаясь постоянным по направлению, т. е. $\pi \to 0$, а $\mathbf{e}_2 = \mathrm{const}$. Очевидно, что при течении без градиента давления напряжение трения на стенке имеет направление скорости внешнего потока и определенную величину, не зависящую от направления, которое имел градиент давления. Это значит, что $f_2 \to 0$ при $\pi \to 0$, а f_1 не зависит от $\cos\varphi = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, так как $\cos\varphi$ может иметь произвольное значение.

Параметр a имеет порядок z / L, где L — характерный размер тела, т. е. является величиной малой. В области торможения параметр ξ_t также мал (для несжимаемого двумерного пограничного слоя, например, $\xi_t \leqslant \xi_t^0 = 0.015$). Кроме того, в теории пограничного слоя величина $1 / R$ всегда считается малой. Поэтому разложим f_1 и f_2 в ряд по степеням $1 / R$, ξ_t и a

и ограничимся членами первого порядка малости

$$\tau_w / \rho U^2 = \mathbf{e}_1[f_{10} + (1/R)f_{11} + \xi_t f_{12} + a f_{13}] + \\ + \mathbf{e}_2[f_{20} + (1/R)f_{21} + \xi_t f_{22} + a f_{23}] \tag{2.2}$$

где f_{ik} есть функции числа M, $\varkappa$ и $\cos\varphi$.

Так как π входит только в безразмерный параметр ξ_t, то $\xi_t \to 0$ при $\pi \to 0$, а остальные параметры остаются неизменными. Поэтому из предыдущих рассуждений следует, что $f_{20} \equiv 0$, $f_{21} \equiv 0$, $f_{23} \equiv 0$, а f_{10}, f_{11} и f_{13} не зависят от $\cos\varphi$. Выражение (2.2) может быть теперь записано в виде

$$\tau_w = \mathbf{e}_1(f_{10}\rho U^2 + f_{11}U\mu / z + f_{12}\pi z + f_{13}z\rho U^2 A) + \mathbf{e}_2 f_{22}\pi z \tag{2.3}$$

Предположим далее, что $U \to 0$ при сохранении остальных параметров неизменными. При этом течение внутри пограничного слоя будет определяться градиентом давления. И, следовательно, направление движения у стенки и направление τ_w будут совпадать с $\mathbf{e}_2$. Отсюда заключаем, что так как в (1.3) коэффициент при f_{12} остается конечным, а коэффициенты при f_{10}, f_{11} и f_{13} стремятся к нулю, то должно быть $f_{12} \equiv 0$. Кроме того, в силу определенности предельного значения f_{22} не зависит от $\cos\varphi$. Итак

$$\tau_w / \rho U^2 = \mathbf{e}_1(f_{10} + f_{11}/R + f_{13}a) + \mathbf{e}_2 f_{22}\xi_t \tag{2.4}$$

причем f_{10}, f_{11}, f_{13} и f_{22} могут зависеть только от M и $\varkappa$.

Следует отметить, что все предыдущие рассуждения не предполагали какого-либо определенного характера течения в пограничном слое, поэтому формула (2.4) справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя.

Необходимым условием отрыва является, как было указано выше, ортогональность направления пристеночной линии тока и градиента давления. Умножив равенство (2.4) скалярно на $\mathbf{e}_2$ и используя условие (1.1), получим искомое соотношение между параметрами, являющееся критерием отрыва

$$\cos\varphi(f_{10} + f_{11}/R + f_{13}a) + f_{22}\xi_t = 0 \tag{2.5}$$

3. В ламинарном пограничном слое при числе Рейнольдса $R \to \infty$ характерный размер пограничного слоя стремится к нулю. Следовательно, $\xi_t \to 0$ и $a \to 0$, а так как f_{10} остается конечным, то для ламинарного пограничного слоя должно быть $f_{10} \equiv 0$. При этом (2.5) дает, если вместе R и ξ_t подставить их выражения (2.1)

$$\xi_l = \pi z^2 / U\mu = [B_1(M, \varkappa) + C_1(M, \varkappa)A\rho U z^2 / \mu]\cos\varphi$$

Функция $B_1(M, \varkappa)$ может быть определена из решения задачи об отрыве двумерного пограничного слоя. При течении в двумерном пограничном слое с торможением векторы $\mathbf{U}$ и $\operatorname{grad} p$ совпадают по направлению, поэтому в точке отрыва двумерного слоя [1]

$$\cos\varphi = 1, \quad \pi = p_x', \quad A = 0, \quad \xi_l = p_x' z^2 / U\mu = \xi_l^\circ(M, \varkappa)$$

Таким образом, $B_1(M, \varkappa) = \xi_l^\circ$, и критерий отрыва трехмерного ламинарного пограничного слоя приобретает вид

$$\xi_l = \pi z^2 / U\mu = (\xi_l^\circ + C_1 A\rho U z^2 / \mu)\cos\varphi \tag{3.1}$$

В турбулентном пограничном слое характерный размер z, а следовательно, a и ξ_t слабо зависят от числа Рейнольдса R, и при $R \to \infty$ можно пренебречь вторым членом в скобках в равенстве (2.5).

При этом получаем

$$\xi_t = \pi z / \rho U^2 = [B_2(M, \varkappa) + C_2(M, \varkappa) Az] \cos \varphi \qquad (3.2)$$

Рассмотрим снова отрыв двумерного пограничного слоя. В точке отрыва турбулентного двумерного пограничного слоя

$$\cos \varphi = 1, \quad \pi = p_x', \quad A = 0, \quad \xi_t = p_x' z / \rho U^2 = \xi_t^\circ(M, \varkappa)$$

Следовательно, $B_2(M, \varkappa) = \xi_t^\circ$ и формула (3.2) для критерия отрыва турбулентного трехмерного пограничного слоя принимает вид

$$\xi_t = \pi z / \rho U^2 = (\xi_t^\circ + C_2 Az) \cos \varphi \qquad (3.3)$$

Подчеркнем еще раз, что ξ_l°, ξ_t°, C_1 и C_2 в формулах (3.1) и (3.3) являются функциями только числа M и $\varkappa$, причем ξ_l°, ξ_t° могут быть определены из данных об отрыве двумерного пограничного слоя. Левые части этих формул имеют тот же вид, что и в двумерном случае. Члены с C_1 и C_2 учитывают могущий быть существенным в трехмерном течении эффект непараллельности векторов скорости внешнего потока в районе точки отрыва, а множитель $\cos \varphi$ учитывает непараллельность вектора скорости внешнего потока и вектора градиента давления. Если изменение энтропии в потоке существенно, то в скобке в правой части в формулах (3.1) и (3.3) будет стоять еще один член, пропорциональный Σ.

4. В качестве примера приложения полученных критериев отрыва рассмотрим вопрос о положении линии отрыва при обтекании бесконечного круглого конуса сверхзвуковым потоком, направленным под некоторым углом атаки. Так как в возникающем коническом течении вдоль образующей все параметры внешнего потока постоянны, то градиент давления направлен перпендикулярно образующей. В силу того что течение в различных сечениях конуса подобно, абсолютная величина градиента давления и градиента угла скорости будет обратно пропорциональна характерному линейному размеру внешнего потока в рассматриваемом сечении (или расстоянию L рассматриваемой точки от вершины конуса, так как в силу подобия характерный размер в данном сечении пропорционален L), т. е. $\pi \sim 1 / L$, $A \sim 1 / L$. В случае ламинарного пограничного слоя характерный размер пограничного слоя z пропорционален корню из характерного размера внешнего потока $z \sim L^{0.5}$.

Следовательно, величины πz^2 и Az^2 вдоль образующей не зависят от расстояния от вершины конуса. Из формулы (3.1) видно, что при этом ξ_l сохраняет свое значение вдоль образующей (ρ, U, $\cos \varphi$, как указывалось выше, вдоль образующей постоянны). Таким образом, ξ_l достигает своего критического значения сразу во всех точках какой-либо образующей конуса, т. е. граница зоны обратных токов совпадает с образующей. А так как образующая перпендикулярна градиенту давления, то граница зоны обратных токов является пристеночной линией тока и линией отрыва [1].

В случае турбулентного пограничного слоя с принятой степенью точности (пренебрежение зависимостью характерного размера пограничного слоя от числа Рейнольдса R) $z \sim L$. Поэтому πz и Az сохраняют свое значение вдоль образующей. И формула (3.3) для критерия отрыва турбулентного пограничного слоя показывает, что и при турбулентном пограничном слое ξ_t достигает значения, при котором возможен отрыв, одновременно во всех точках некоторой образующей конуса, которая и будет линией отрыва.

Тот факт, что на остром конусе линия отрыва совпадает с образующей конуса, хорошо согласуется с экспериментальными данными работ [3, 4].

Поступило 22 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Бам-Зеликович Г. М. О необходимом условии отрыва трехмерного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.
3. Авдуевский В. С., Медведев К. И. Отрыв трехмерного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
4. Авдуевский В. С., Медведев К. И. Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.