

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ВВЕРХ ПО ТЕЧЕНИЮ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ПОТОКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Показано, что для гиперзвуковых течений с умеренным и сильным взаимодействием возмущения, вызываемые, например, донным срезом или каким-либо препятствием, распространяются до передней кромки тела. В потоке не может возникнуть локальных областей с очень большими градиентами давления. С этим связана возможность возникновения зон отрыва с длиной порядка размера тела, описываемых в первом приближении уравнениями пограничного слоя. С математической точки зрения задача свелась к установлению неединственности решения вблизи передней кромки и нахождению собственных решений, обеспечивающих возможность удовлетворения граничным условиям на заднем конце тела. Показано, что при слабом взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем могут возникать короткие области течений со свободным взаимодействием и локально-невязкие течения с большими градиентами давления, в пределах которых возмущения могут передаваться вверх по течению.

1. Общая задача о стационарном движении тела в вязком и теплопроводном газе описывается уравнениями Навье — Стокса. Эти уравнения являются эллиптическими. Возмущения, возникающие в какой-либо точке потока, по крайней мере в принципе достигают всех других точек.

Однако при больших значениях числа Рейнольдса общепринятым методом решения задач аэродинамики является использование уравнений движения невязкого газа (уравнений Эйлера) почти всюду, кроме некоторых узких областей, в которых существен учет вязкости, частично локализованных около поверхностей тел (пограничные слои). Уравнения для пограничных слоев оказались параболическими (Прандтль, 1904 г.). При фиксированных краевых условиях изменение их в области, расположенной вниз по течению, не влияет на решение в области, лежащей вверх по течению, поэтому долгое время считалось, что при сверхзвуковом обтекании тел и отсутствии отрыва возмущения не передаются вверх по течению.

Однако в ряде задач краевые условия не только для пограничного слоя, но и для внешнего невязкого течения заранее до решения оказываются неизвестными и подлежат определению при совместном решении, проводящемся одновременно для обеих областей течения. К рассматриваемому классу относятся, например, течения со «свободным взаимодействием» [1, 2] и сильным взаимодействием [3, 4].

В задачах такого типа, несмотря на то что уравнения, описывающие течение в разных областях, являются гиперболическими и параболическими, информация о краевых условиях, заданных вниз по течению, должна учитываться в области, лежащей вверх по течению. Краевое условие, которое приходится определять по ходу интегрирования уравнений, носит интегральный характер, и задача по существу становится интегро-дифференциальной.

Заметим, однако, что передача информации не является полной, как для эллиптических уравнений. Класс, из которого отбираются возможные решения, более узкий. Решения такого типа получены в работах [2, 5, 6].

В работах [2, 5, 6] изучены для сверхзвуковых течений ($M \sim 1$, $R \rightarrow \infty$, где R — число Рейнольдса) области свободного взаимодействия около точки отрыва на гладкой поверхности, перед донным срезом и в области присоединения развитой зоны отрыва. Решение задач получено на основе асимптотического анализа решений полных уравнений Навье — Стокса с использованием известного метода локальных асимптотических разложений. Для этих задач характерный продольный размер области, в которой возмущения проникали вверх по потоку, составлял $R^{-3/8}$, а сами возмущения давления $\Delta p / p_1 \sim R^{-1/4}$.

В работах [2, 5, 6] показано, что существование свободного взаимодействия указывает на передачу возмущений вверх по течению, что приводит к необходимости производить заранее соответствующий отбор решения.

Представляет интерес рассмотреть течения, в которых области свободного взаимодействия велики, порядка размеров тела. К этому типу относится задача о гиперзвуковом течении вязкого газа около тонкого тела (например, пластинки) при значении известного параметра взаимодействия $\chi = M_1(d\delta/dx) \geq 1$. Известное [3] автомодельное решение для сильного взаимодействия оказывается справедливым только для полубесконечного тела, а на конечных телах оно применимо, строго говоря, лишь при специально выбранном краевом условии на заднем конце тела.

Другой пример дает задача о вдуве умеренной интенсивности через поверхность тонкого тела в сверхзвуковом потоке газа. Если, как это делается в ряде работ, следуя [7], считать, что нормальный к поверхности тела компонент скорости вдуваемого газа мал по сравнению со скоростью набегающего потока, но значительно превышает соответствующий компонент в вязком пограничном слое, то в первом приближении можно пользоваться моделью тонкого невязкого слоя вдуваемого газа. Распределение давления в тонком слое определяется возмущениями, вносимыми этим слоем в исходный сверхзвуковой поток. Из-за малой толщины слоя вдуваемого газа перепад давления поперек его исчезает в первом приближении, а уравнения Эйлера вырождаются в уравнения пограничного слоя без вязких членов. Для этой задачи также можно показать, что влияние заднего конца тела необходимо учитывать на всем теле вплоть до передней кромки.

2. Рассматривается обтекание тонкого тела гиперзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. Число Рейнольдса, подсчитанное по длине тела l , скорости набегающего потока u_1 , характерным значениям плотности ρ_2 и коэффициента вязкости μ_2 у поверхности тела, $R_2 \gg 1$. Тогда возмущенную область течения можно разделить на невязкое течение и пограничный слой с толщиной $\delta \sim lR_2^{-1/2}$.

В дальнейшем будем считать, что толщина тела δ_2 того же порядка или меньше, чем δ (например, $\delta_2 = 0$ — пластинка или нить). В этом случае распределение давления на внешней границе пограничного слоя зависит от изменения толщины вытеснения пограничного слоя и одновременно существенно влияет на распределение толщины вытеснения. Это и есть течение со свободным взаимодействием. Протяженность области течения со свободным взаимодействием существенно зависит от значений чисел M_1 и R_2 .

При сверхзвуковых течениях $(M_1^2 - 1)^{1/2} \sim 1$ протяженность [2, 5, 6] имеет порядок $lR_2^{-3/8}$. Заметим, что при $M_1 \sim 1$ индуцируемый пограничным слоем вдали от особых точек течения (точки отрыва, присоединения и т. п.), градиент давления оказывает влияние на пограничный слой только во втором приближении. Поэтому свободного взаимодействия на большей части тела нет.

Рассмотрим течение со свободным взаимодействием при $M_1 \rightarrow \infty$ для характерных случаев течений около угловой точки или донного среза,

а также точек отрыва и присоединения. Для всех этих течений при умеренных сверхзвуковых скоростях масштабы координат и функций течения, уравнения и граничные условия были одинаковыми (за исключением начального и конечного условия). Покажем, что при малых значениях известного параметра гиперзвукового взаимодействия $\chi = M_1 / R_2^{1/2} \ll 1$ ситуация такая же и для гиперзвуковых течений.

Рассмотрим сначала течение вблизи точки отрыва на плоской пластине при $M_1 \gg 1$. Пусть энтальпия газа у поверхности тела по порядку величины такая же, как энтальпия торможения (хотя может составлять, например, 0.1 от нее). Если вдали от точки отрыва $\chi \ll 1$, то индуцируемый за счет слабого взаимодействия градиент давления $(l / p_1) \partial p / \partial x \sim \chi$. Следуя [2], оценим величину градиента давления, который должен существовать около точки отрыва, если она расположена на расстоянии l от передней кромки. В основной части пограничного слоя $\delta / l \sim R_2^{-1/2}$

$$u \sim u_1, \quad \frac{\Delta u}{u_1} \sim \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \sim \frac{\Delta p}{p_1}, \quad \Delta n \sim \frac{\Delta p}{p_1} R_2^{-1/2} l$$

Здесь Δn — изменение толщины струек тока. На стенке скорость равна нулю. Поэтому около поверхности тела в силу уравнений движения

$$\Delta u_3 \sim u_3, \quad \frac{\Delta u_3}{u_1} \sim \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^{1/2}$$

Пусть δ_3 — толщина области \mathcal{Z} , в которой $\Delta u_3 \sim u_3$, тогда $u_3 \sim u_1 \times (\delta_3 / l) R_2^{-1/2}$. Толщина этой области изменяется на основной свой порядок

$$\frac{\delta_3}{l} \sim \left(\frac{\Delta p}{p_1} \right)^{1/2} R_2^{-1/2} \gg \frac{\Delta n}{l}$$

Это значит, что толщина вытеснения всего пограничного слоя в главном члене меняется на δ_3 / l . Тогда в силу гиперзвуковой теории малых возмущений (для $\Delta p / p_1 \ll 1$) получаем $\Delta p / p_1 \sim (\delta_3 / x_3) M_1$, где x_3 — неизвестный пока продольный размер возмущенной области. Чтобы струйки тока области \mathcal{Z} перед точкой отрыва могли пройти в область, где растет давление, по крайней мере в области \mathcal{Z} должны быть существенны силы вязкости: $\rho_2 u_3^2 / x_3 \sim \mu_2 u_3 / \delta_3^2$. Это последнее соотношение делает систему соотношений для масштабов $\Delta p / p_1$, u_3 , δ_3 , x_3 замкнутой и позволяет получить следующие соотношения при $\chi \ll 1$:

$$\delta_3 / l \sim M_1^{1/4} R_2^{-5/8} = \chi^{1/4} R_2^{-1/2}, \quad x_3 / l \sim \chi^{3/4} = M_1^{3/4} R_2^{-3/8} \quad (2.1)$$

$$u_3 / u_1 \sim M_1^{1/4} R_2^{-1/8} = \chi^{1/4}, \quad \Delta p / p_1 \sim M_1^{1/2} R_2^{-1/4} \sim \chi^{1/2}, \quad \Delta n / l \sim \chi^{1/2} R_2^{-1/2} \quad (2.2)$$

Используя метод работы [2], легко получить полную систему уравнений и краевых условий, замыкающих задачу. Они вполне аналогичны полученным в [2], если заменить $\varepsilon = R_1^{-1/2}$ на $\chi = M_1 / R_2^{1/2}$. Из этого следует, что теория, развитая для $M_1 \sim 1$, является предельной для гиперзвуковых скоростей при $\chi \rightarrow 0$.

Вполне аналогичные результаты легко получить для течения в областях присоединения и около донного среза, следуя [5] или [6]. Характерной особенностью этих течений является распространение возмущений вверх по потоку лишь на короткие расстояния и образование областей с большими градиентами давления. Дальнейшее возрастание градиента давления может приводить к появлению локально-невязких областей течения. Локально-невязкое течение около донного среза изучено в работе [8].

3. Ситуация существенно изменяется, если $O(\chi) \rightarrow O(1)$. Из (2.1) видно, что масштаб области свободного взаимодействия $x/l \rightarrow O(1)$. Из (2.2) следует, что разделение пограничного слоя на подобласти разного масштаба исчезает, так как $\Delta n/l \sim \delta_3/l$.

Это следует из $\Delta p/p \sim \chi^{1/2} \rightarrow 1$. Таким образом весь пограничный слой начинает участвовать в процессе свободного взаимодействия.

Докажем, что при $\chi \geq 1$ не может появиться областей течения, в которых градиент давления по порядку величины больше, чем градиент, индуцируемый на теле свободным взаимодействием.

Допустим, что около донного среза или перед точкой отрыва возникает перепад давления $\Delta p \lesssim p$ ($\Delta p/p \gg 1$ не рассматриваем, так как в течениях разрежения этого быть не может, а в течениях сжатия такие $\Delta p/p$, как будет показано ниже, не реализуются из-за смещения точки отрыва вверх по потоку).

Если индуцируемый градиент давления больше по порядку величины исходного, то для размера возмущенной области Δx должно выполняться условие $\Delta x/l \ll 1$. Для $M_1 \gg 1$ и $\chi \geq 1$ в исходном пограничном слое

$$p \sim \rho_1 u_1^2 \tau^2, \quad \rho \sim \rho_1 \tau^2, \quad (d\delta/dx)_0 \sim \tau$$

Согласно уравнению движения ($\rho u u_x \sim p_x$) возмущения скорости и давления связаны соотношением

$$u \sim \Delta u \sim (\Delta p / \rho_1 \tau^2)^{1/2}$$

Эта оценка верна и для $\Delta p/p_1 \ll 1$, так как вблизи поверхности тела всегда найдется слой, в котором возмущения скорости имеют такой же порядок, как и исходная скорость. Как и для течений со слабым взаимодействием, полное изменение толщины пограничного слоя по порядку равно толщине слоя, в котором скорость меняется на свой основной порядок. Для толщины этого слоя имеем соотношения

$$y \sim \frac{u}{u_1} \tau l, \quad \Delta \delta \sim l \left(\frac{\Delta p}{\rho_1 u_1^2} \right)^{1/2}$$

Так как $\Delta p/p_1 \lesssim 1$, то $\Delta \delta/\Delta x \lesssim \tau$. Используем внешнее краевое условие и полученные оценки

$$\frac{\Delta p}{\rho_1 u_1^2} \sim \Delta \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2 = \left[\left(\frac{d\delta}{dx} \right)_0 + \frac{\Delta \delta}{\Delta x} \right]^2 - \left(\frac{d\delta}{dx} \right)_0^2 \sim \left(\frac{d\delta}{dx} \right)_0 \frac{\Delta \delta}{\Delta x} \sim \tau \frac{\Delta \delta}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta \delta}{\Delta x} \sim \frac{l}{\Delta x} \left(\frac{\Delta p}{\rho_1 u_1^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{\Delta x}{l} \sim \tau \left(\frac{\rho_1 u_1^2}{\Delta p} \right)^{1/2} \geq 1$$

Но размер возмущенной области не может быть больше характерного размера тела. Из этого следует, что $\Delta x \sim l$.

В связи с этим решение задачи для пограничного слоя в условиях свободного (умеренного или сильного, $\chi \geq 1$) взаимодействия не может полностью определяться начальными условиями и краевыми условиями на внешней границе пограничного слоя и на поверхности тела. Должны существовать ветви решений, позволяющие удовлетворить краевое условие на заднем конце тела, которое, как будет показано ниже, может быть наложено, например, на величину давления.

В соответствии с обычными оценками для гиперзвукового пограничного слоя при $\chi \geq O(1)$ принимаем следующие координаты и асимптотические представления для функций течения:

$$x = x^\circ / l^\circ, \quad y = y^\circ / l^\circ \tau, \quad \tau = (\mu_2^\circ / \rho_1^\circ u_1^\circ l^\circ)^{1/4} \quad (3.1)$$

$$u^\circ(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = u_1^\circ [u(x, y) + \dots], \quad v^\circ(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = u_1^\circ \tau [v(x, y) + \dots]$$

$$p^\circ(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = p_1^\circ \gamma M_1^2 \tau^2 [p(x, y) + \dots], \quad \rho^\circ(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = \rho_1^\circ \tau^2 [\rho(x, y) + \dots]$$

$$H_0(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = (u_1^\circ)^2 [H(x, y) + \dots], \quad \mu^\circ(x^\circ, y^\circ, M_1, R_1) = \mu_2^\circ [\mu(x, y) + \dots]$$

Здесь градусами сверху отмечены размерные величины.

При подстановке (3.1) в полные уравнения Навье — Стокса и совершенного предельного перехода $M_1 \rightarrow \infty$, $R_1 \rightarrow \infty$ при $\chi \geq O(1)$ получаются уравнения

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(H - \frac{u^2}{2} \right) \rho \\ \rho \left(u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial y} \frac{u^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Краевые условия

$$\begin{aligned} u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad H(x, 0) = H_2 \\ u(x, \delta) = 1, \quad v(x, \delta) = \delta \delta / dx, \quad H(x, \delta) = 1/2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь внешняя граница пограничного слоя $y = \delta$ вполне точно определена, $\rho(x, \delta) = \infty$, так что расход газа в пограничном слое пренебрежимо мал по сравнению с расходом в невязкой области возмущенного течения, тогда как толщины могут быть одного порядка. Именно различие по порядку в величине расхода позволяет построить корректную теорию пограничного слоя.

Для решения задачи на ЭВМ удобно ввести следующие переменные:

$$\begin{aligned} \xi = \int_0^x \rho_2 dx, \quad \eta = (2\xi)^{-1/2} \int_0^y \rho dy \\ u = f'(\xi, \eta), \quad g = 2H, \quad \psi(x, y) = \sqrt{2\xi} f(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда уравнения принимают обычный вид

$$\begin{aligned} (Nf'')' + ff'' - \beta(\xi)(g - f'^2) &= 2\xi(f'f'' - f''f') \\ \left(\frac{N}{\sigma} g' \right)' + fg' + \frac{1}{2} \left[N \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) f'f'' \right]' &= 2\xi(f'g' - f'g') \end{aligned} \quad (3.5)$$

Краевые условия

$$\begin{aligned}
 f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) = 1, \quad g(\xi, 0) = g_2, \quad g(\xi, \infty) = 1 \\
 v(\xi, \infty) = \frac{d\delta}{dx}, \quad N = \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_2}, \quad \rho = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \frac{p}{(g-f'^2)} \quad (3.6) \\
 \mu = \left[\frac{(g-f'^2)}{g_2} \right]^\omega, \quad \beta(\xi) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{d \ln p}{d \ln \xi} \\
 v_1(\xi) = v(\xi, \infty) = \frac{p(\xi)}{g_2} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{\sqrt{2\xi}}{p(\xi)} \int_0^\infty (g-f'^2) d\eta \right]
 \end{aligned}$$

Индексами 1 и 2 отмечены значения параметров на внешней границе пограничного слоя и на стенке. Для расчета нужно рассмотреть течение в невязком ударном слое. Следуя гиперзвуковой теории малых возмущений [3], введем следующие функции и координаты для ударного слоя:

$$\begin{aligned}
 x^\circ = l^\circ x, \quad y^\circ = \tau l^\circ y, \quad u^\circ = u_1^\circ [1 + \tau^2 U(x, y, \chi) + \dots] \quad (3.7) \\
 p^\circ = \gamma p_1^\circ M_1^2 \tau^2 P(x, y, \chi) + \dots, \quad \rho^\circ = \rho_1^\circ R(x, y, \chi) + \dots, \\
 v^\circ = \tau u_1^\circ V(x, y, \chi) + \dots
 \end{aligned}$$

Система уравнений и граничные условия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial RV}{\partial y} = 0, \quad R \left(\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\
 \left(\frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{P}{R^\gamma} \right) = 0, \quad V[x, \delta(x)] = \frac{d\delta}{dx} \\
 \gamma P[x, g(x)] = \frac{2\gamma\chi^2}{\gamma+1} \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\
 R[x, g(x)] = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{dg}{dx} \right)^{-2} \right]^{-1} \quad (3.8) \\
 V[x, g(x)] = \frac{2}{\gamma+1} \frac{dg}{dx} \left\{ 1 - \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{dg}{dx} \right)^{-2} \right\}
 \end{aligned}$$

где $y = g(x)$ — уравнение для формы ударной волны.

Для практических расчетов достаточно точные результаты дает метод касательного клина

$$p(\xi) = \frac{1}{\chi^2 \gamma} + \frac{\gamma+1}{4} v_1^2(\xi) + v_1(\xi) \left\{ \frac{1}{\chi^2} + \left[\frac{\gamma+1}{4} v_1(\xi) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (3.9)$$

Здесь существенно заметить, что при $\chi \rightarrow \infty$ как из (3.8), так и из (3.9) параметр χ выпадает. И полная задача для безразмерных переменных перестает зависеть от χ .

Выясним теперь характер неоднозначности решения при различных значениях параметра взаимодействия χ .

Пусть краевое условие, определяющее нужную ветвь решения, задано при $x^\circ = l^\circ$, т. е. при $x = x_0 = 1$. Если там лежит точка отрыва, то в ней $f_2'' = 0$, если ей соответствует угловая точка O , то в ней давление равно данному.

Сначала покажем, что, если удалось найти хотя бы одно решение, в котором, например, $f_2''(x_0) = 0$, то существует группа преобразований, позволяющая удовлетворить условию $x_0 = 1$. Для этого введем преобразование

$$\begin{aligned} \xi &= b\xi_4, \quad \eta = \eta_4, \quad p = \frac{1}{b}p_4, \quad \rho = \frac{\rho_4}{b}, \quad u = u_4, \quad h = h_4, \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}(v_1)_4 \\ y &= b^{3/2}y_4, \quad x = b^2x_4, \quad \chi = \sqrt{b}\chi_4, \quad f = f_4, \quad g = g_4 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где b — пока неопределенная постоянная, а для (3.8)

$$R = R_4, \quad g = b^{3/2}g_4, \quad P = \frac{1}{b}P_4, \quad V = \frac{1}{\sqrt{b}}V_4$$

При такой замене переменных все уравнения и краевые условия, записанные в новых переменных, имеют такой же вид, как (3.4) — (3.6) и (3.8), (3.9) в старых переменных. Единственное отличие состоит в том, что величина χ_4 заранее неизвестна и не задана координата x_4 особой точки. Задаем произвольно χ_4 , найдем решение (численно или в рядах) с особой точкой при некотором значении $x_{i_0}(\chi_4)$. В соответствии с формулами (3.9) и условием $x_0 = 1$ получаем

$$1 = b^2x_{i_0}(\chi_4), \quad \chi = \sqrt{b}\chi_4 \quad (3.11)$$

Тогда из первой формулы находим b , вторая — дает величину χ , соответствующую данному χ_4

$$\chi = \chi_4 [x_{i_0}(\chi_4)]^{-1/4} \quad (3.12)$$

Если $\chi_4 \gg 1$, то x_{i_0} не зависит от χ_4 и формула (3.11) дает решение как прямой, так и обратной задачи. Если же $\chi_4 \sim 1$, то без пристрелки можно решить лишь обратную задачу нахождения χ при заданном χ_4 . Для решения прямой задачи (χ задано) необходимо подобрать χ_4 так, чтобы удовлетворилось условие (3.12).

Существование группы преобразований (3.10) указывает на то, что не может существовать по крайней мере при $\chi = \infty$ неавтомоделных решений, не оканчивающихся особой точкой (например, $p = 0$) или местом, где изменяются краевые условия, и продолжающихся для всех ξ от 0 до ∞ при сохранении заданных краевых условий. В самом деле, если бы существовало такое решение, то при наличии (3.10) его стандартным путем можно было бы свести к автомоделному решению, но оно определено единственным образом. Таким образом для установления неединственности и существования решений нужного типа достаточно доказать существование неавтомоделного решения хотя бы при $\xi \ll 1$.

В окрестности $\xi = 0$ неоднозначность решения можно установить с помощью координатного разложения. Продолжить решение задачи для фактического нахождения различных ветвей решения при конечных значениях ξ вплоть до соответствующих особых точек удобно численно на ЭВМ методом, аналогичным развитому в работе [2].

Проще всего установить неоднозначность решения для $\chi = \infty$, так как для этого достаточно показать, что, кроме известного автомоделного решения, существуют неавтомоделные. Далее используем (3.9) и $\chi = \infty$

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= f_0(\eta) + \xi^{a+1} \frac{A_1}{A_0} f_1(\eta) + \dots, \quad g(\xi, \eta) = g_0(\eta) + \xi^{a+1} \frac{A_1}{A_0} g_1(\eta) + \dots \\ p(\xi) &= \frac{A_0}{\xi} + A_1 \xi^a + \dots, \quad v_1(\xi) = \frac{B_0}{\sqrt{\xi}} + B_1 \xi^{a+1/2} + \dots \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставим (3.13) в исходные уравнения и краевые условия и получим

$$\begin{aligned} (N_0 f_0'')' + f_0 f_0'' + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (g_0 - f_0'^2) &= 0 \\ \left(\frac{N_0}{\sigma} g_0' \right)' + f_0 g_0' + \frac{1}{2} \left[N_0 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) f_0' f_0'' \right]' &= 0 \\ N_0 &= [(g_0 - f_0'^2) / g_2]^{\omega - 1}, \quad f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad g(0) = g_2, \quad f_0'(\infty) = 1, \quad g_0(\infty) = 1 \\ B_0 &= \frac{3}{\sqrt{2}} D F_0, \quad A_0 = \frac{\gamma + 1}{2} B_0^2, \quad F_0 = \int_0^{\infty} (g_0 - f_0'^2) d\eta, \quad D = g_2^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эта часть представляет собой известное автомодельное решение для сильного взаимодействия

$$\begin{aligned} (N_0 f_1'' + N_1 f_0'')' + f_0 f_1'' + f_1 f_0'' + \frac{\gamma - 1}{\gamma} (g_1 - 2f_0' f_1') - \\ - 2(a + 1) (f_1' f_0' - f_0'' f_1) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} (a + 1) (g_0 - f_0'^2) \\ \left(\frac{N_0}{\sigma} g_1' + \frac{N_1}{\sigma} g_0' \right)' + f_1 g_0' + f_0 g_1' + \frac{1}{2} \left[N_0 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) f_0' f_1'' + \right. \\ \left. + N_0 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) f_1' f_0'' + N_1 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) f_0' f_0'' \right]' - 2(a + 1) (f_0' g_1 - f_1 g_0') &= 0 \quad (3.15) \\ N_1 &= (\omega - 1) N_0 \frac{g_1 - 2f_0' f_1'}{g_0 - f_0'^2}, \quad f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(\infty) = g_1(0) = g_1(\infty) = 0 \\ A_1 &= (\gamma + 1) B_0 B_1, \quad B_1 = D \left[F_1 \frac{5 + 2a}{\sqrt{2}} - F_0 \sqrt{2} (a + 1) \right] \int_{A_0}^{A_1} \quad (3.16) \\ F_1 &= \int_0^{\infty} (g_1 - 2f_0' f_1') d\eta \end{aligned}$$

Система уравнений (3.15) линейна, но неоднородна при $a > -1$ ($a < -1$ не имеет смысла из-за (3.13)).

Линейная однородная система (3.16) для коэффициентов A_1, B_1 имеет нетривиальное решение лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю. Это дает условие для определения параметра a

$$a = [10F_1(a) - 7F_0] / 4[F_0 - F_1(a)]$$

Численные расчеты дают $a \approx 49.6$ для $\omega = \sigma = g_2 = 1$. Допустим, что a для нужного режима нашли. Тогда A_1, B_1 можно определить с точностью до произвольного постоянного множителя. Его величина определяет значение x_0 , координаты особой точки, знак дает отбор типа особой точки. Приведенные преобразования приводят к следующей форме закона подобия для коэффициента давления в точке отрыва:

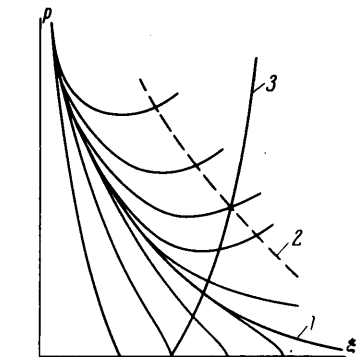
$$C_p = 2 \left(\frac{\mu_2^0}{\rho_1^0 u_1^0 l^0} \right)^{1/4} p_{40} x_{4c}^{1/2}$$

где p_{40} , x_{40} — функции от g_2 , γ и χ , получающиеся при численном решении задачи. При $\chi \rightarrow \infty$ зависимость от χ исчезает и получается второй предел для C_p , помимо найденного в работе [2] для $\chi = 0$.

Из приведенных результатов можно получить важный вывод для асимптотической теории срывных течений, если отрыв и присоединение потока происходят на гладкой поверхности, как, например, в случае отрыва перед щитком, не начинающегося с передней кромки. Как и при $M \sim 1$, если отрыв не начинается с передней кромки, то давление во всей области отрыва и отношение продольного размера к поперечному такое же по порядку величины, как в области свободного взаимодействия около точки отрыва. Но в данном случае $M_1 \rightarrow \infty$, $\chi \geq 1$ характерный продольный размер области свободного взаимодействия, как было показано, такой же по порядку величины, как длина тела. Отсюда сразу следует, что течение во всей зоне отрыва (длина которой не может быть больше размеров тела) описывается теми же уравнениями пограничного слоя в первом приближении всюду, за исключением малых зон порядка толщины пограничного слоя (окрестностей угловых точек и т. п.). Это значит, что пока точка отрыва не пришла на переднюю кромку, угол отклонения щитка по порядку должен быть $O(\tau)$. Если же он больше, то отрыв должен начинаться с передней кромки. При $M_1 \sim 1$ области свободного взаимодействия имеют длину $O(R_1^{-3/8})$ [2], поэтому даже при углах отклонения щитка $O(1)$ отрыв может начинаться не с передних кромок, а уравнения течения внутри срывной зоны даже в первом приближении не везде сводятся к уравнениям Прандтля [6].

Заметим, что формулы (3.10) определяют закон подобия для $\chi = \infty$, справедливый для течений сжатия и разрежения, которые рассмотрены ниже.

4. Проведем коротко качественный анализ полученных результатов для случая $\chi = \infty$, используя схему интегральных кривых задачи (3.5), (3.6) (фигура) на плоскости $p\xi$. Линия 1 представляет собой известное автомодельное решение (3.14). Ниже лежит семейство неавтомодельных решений, соответствующих $A_1 < 0$ (3.13), у которых $p = 0$ при конечных значениях ξ , поскольку $p < 0$ не имеют физического смысла, а $p \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ не может быть из-за существования группы (3.10), как указано выше. Над кривой 1 лежит семейство кривых, соответствующих $A_1 > 0$ и уменьшению f_2'' до нуля вдоль пунктирной кривой 2. Это линия отрыва. Для каждой кривой по формулам (3.4) и (3.6) можно подсчитать $x(\xi)$. На линии 3, вдоль которой $x = 1$, ставится дополнительное краевое условие для течения на теле конечной длины с плоской поверхностью. Пересечение линий 2 и 3 определяет величину донного давления, соответствующего отрыву потока ($f_2'' = 0$) как раз около донного среза. Если донное давление совпадает со значением p в точке пересечения кривых 1 и 3, то распределение давления по телу такое же как в автомодельном решении. Участок кривой 3, лежащий выше линии 2, соответствует положению точки отрыва вверх по потоку от донного среза.



Как отмечалось выше, для получения всего семейства кривых обоих неавтомодельных решений достаточно найти по одной кривой, а остальные получаются согласно (3.10). Тогда каждому значению донного давления соответствует одна интегральная кривая, на которой это донное давление достигается на линии 3. Заметим, что при $(p - p_0) / p_0 = \varepsilon \ll 1$, где $p_0 = A_0 \xi^{-1}$, формула (3.13) дает строгое первое приближение относительно ε для распределения параметров на всем теле до $x = 1$.

В случае $\chi \sim 1$ или более сложной формы тела, как отмечалось выше, требуется пристрелка.

Еще одно следствие вытекает из результатов численного решения (3.15). Поскольку значения a в (3.13) ($a \sim 50$ для $\omega = \sigma = g_2 = 1$) согласно проведенным расчетам велики, то отход интегральных кривых от автомодельного решения почти

не заметен, а затем совершается очень резко. Это обстоятельство объясняет, почему при использовании недостаточно точных интегральных методов для решения задач со свободным взаимодействием, например метода Крокко — Лиза, приходится вводить понятие докритического и сверхкритического пограничных слоев и скачкообразный переход от режима, при котором не происходит передачи возмущений вверх по течению, к режиму с передачей возмущений вверх по течению.

В заключение автор благодарит В. В. Сычева за обсуждение рассмотренной задачи.

Поступило 22 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman D. R., Kuehn D. M., Larson H. K. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA Rep., 1356, 1958.
2. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1967.
4. Bush W. B., Cross A. K. A comment on hypersonic viscous interaction theory. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 7.
5. Нейланд В. Я. К расчету теплопередачи вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
6. Нейланд В. Я. К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений со срывными зонами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
7. Cole J. D., Aroesty J. The blowhard problem inviscid flow with surface injection. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 7.
8. Olsson G. R., Messiter A. F. Hypersonic laminar boundary layer approaching the base of a slender body. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.