

## ПРОВЕРКА КАЧЕСТВА АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛА БОЛЬЦМАНА РЕЛАКСАЦИОННОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЮ КРУКА

Ф. Г. ЧЕРЕМИСИН

(Москва)

С помощью релаксационного кинетического уравнения Крука к настоящему времени решено значительное число аэродинамических задач. Однако из-за отсутствия надежных решений граничных задач для уравнения Больцмана справедливость принятой модели интеграла столкновений остается полностью не выясненной. В данной работе для проверки качества аппроксимации, даваемой модельным оператором столкновений, предпринят машинный эксперимент. Интеграл столкновений Больцмана вычисляется для ряда пробных функций, характерных для движений разреженного газа, и полученные его значения сравниваются с моделью Крука. Проверяются также некоторые физические предположения, лежащие в основе релаксационной модели.

Трудности решения кинетического уравнения Больцмана во многом обусловлены сложным многомерным интегралом столкновений. В связи с этим М. Круком и другими была предложена в 1954 году широко известная в настоящее время релаксационная модель [1], заменяющая нелинейный интегральный оператор Больцмана (1) выражением (2)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varepsilon [f'f'_1 - ff_1] B(g, \theta) g \sin \theta \quad (1)$$

$$I_r = -\nu_r [f - f_0], \quad f_0 = n(2\pi T)^{-3/2} \exp[-(\xi - u)^2 / 2T] \quad (2)$$

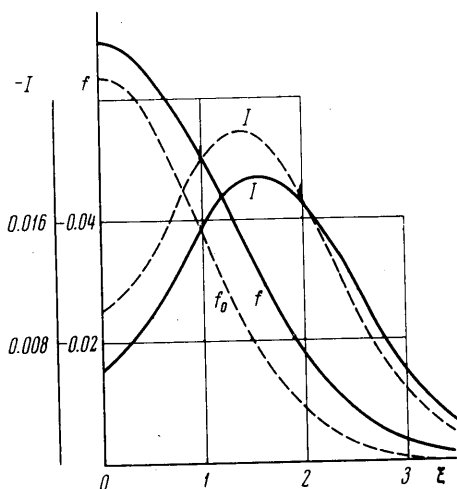
Релаксационная формула (2) не может быть строго получена из (1) даже в случае близости функции распределения в локально-максвелловской функции  $f_0$  [2].

Величина  $\nu_r(n, T)$  определяется законами сохранения числа частиц, импульса и энергии при столкновениях и основными групповыми свойствами интеграла Больцмана с точностью до числового множителя [4], который обычно выбирается так, чтобы в пределе сплошной среды уравнение Крука давало правильное значение коэффициента вязкости. Тогда получим уравнения гидродинамики, близкие к уравнениям Навье — Стокса и отличающиеся от них только числом Прандтля (1 вместо  $2/3$  для одноатомного газа). Последний недостаток может быть устранен способом, указанным в работах [5-7].

Однако релаксационное уравнение призвано служить не для замены уравнений Навье — Стокса, а для продвижения в область разреженного газа. Здесь соображения о точном совпадении числа Прандтля и т. п. не играют основной роли, так как сами уравнения гидродинамики перестают быть справедливыми. Функция распределения может значительно отличаться от максвелловской, вблизи границ тела может иметь разрывы в пространстве скоростей и ее изменение будет определяться не только фактом релаксации к максвелловскому равновесному значению, но и тем, как эта релаксация происходит, иначе говоря, точным интегралом столкновений Больцмана.

В данной работе на ряде пробных функций проверяется, насколько хорошо релаксационная модель аппроксимирует интеграл Больцмана.

Дополнительно к этой основной задаче проверяются некоторые предположения физического характера, которые часто используются для обоснования модели Крукса [3] и для ее уточнения [9]. В качестве пробных функций были взяты функции распределения, характерные для некоторых простейших течений разреженного газа.



Фиг. 1

точность вычислений не ниже 2%, вполне достаточную для поставленных целей. Все вычисления проводились на машине БЭСМ-6 ВЦ АН СССР.

В первом эксперименте в качестве пробной функции было взято двухтемпературное максвелловское распределение

$$f_1 = (2\pi T_1)^{-1/2} (2\pi T_2)^{-1} \exp \left[ -\xi^2 / 2T_1 - (\eta^2 + \zeta^2) / 2T_2 \right]$$

причем

$$T_1 / T_2 = 2, \quad T_1 + 2T_2 = 3$$

Подобные функции распределения использовались для исследования течений разреженного газа (см., например, [3], стр. 299 и 429).

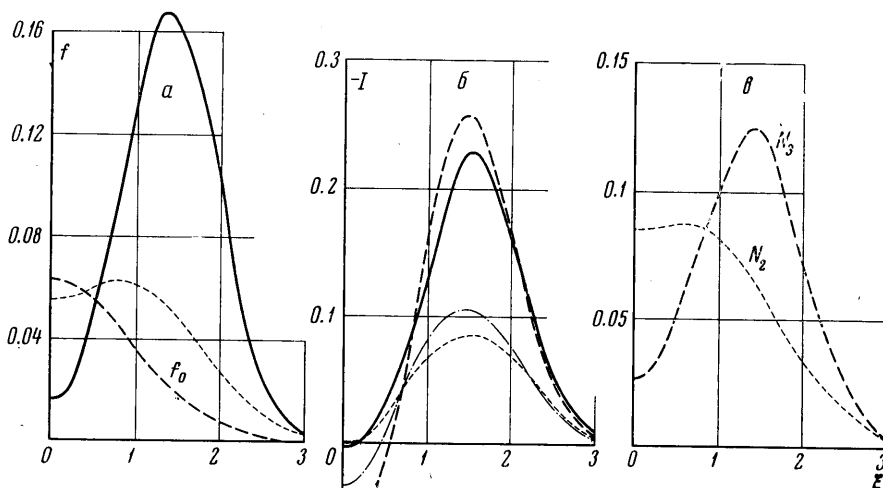
Из фиг. 1 видно, что функция  $f_1$  (сплошная кривая) довольно близка к максвелловскому распределению  $f_0$  (штриховая кривая; на этом и всех последующих графиках приводятся графики функций вдоль линии  $\eta = \zeta = 0$ ). На той же фигуре сплошной линией показаны профили взятых с обратным знаком интеграла столкновений Больцмана  $I$ , вычисленного для функции  $f_1$ , и штриховой линией — модельного оператора столкновений. Как видно, различие между этими кривыми невелико, но по относительной величине оно примерно такое же, как отклонение  $f_1$  от равновесной максвелловской функции.

Во втором эксперименте в качестве пробных брались так называемые бимодальные функции, подобные тем, которые использовались Таммом и Мотт-Смиттом при исследовании структуры прямого скачка уплотнения, но с равными температурами сталкивающихся потоков газа

$$f_{2,3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi T_{2,3}} \right)^{1/2} \left[ \exp \left\{ -\frac{(\xi - u_{2,3})^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2T_{2,3}} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(\xi + u_{2,3})^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2T_{2,3}} \right\} \right]$$

$$u_2 = \sqrt{2}, \quad T_2 = 1/3, \quad u_3 = 1, \quad T_3 = 2/3$$

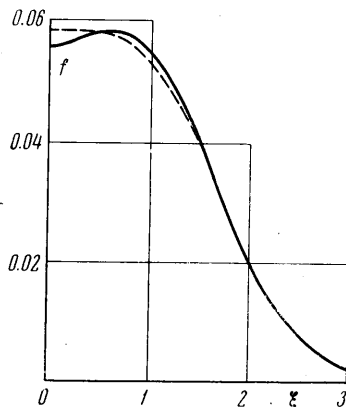
На фиг. 2, а с учетом симметрии относительно плоскости  $\xi = 0$  функция  $f_2$  изображена сплошной линией, функция  $f_3$  — пунктирной, а соответствующая равновесная максвелловская функция — штриховой линией. На фиг. 2, б значения интеграла столкновений Больцмана и модель-



Фиг. 2

ного оператора столкновений (взяты со знаком минус) изображены для функции  $f_2$  соответственно сплошной и штриховой и для функции  $f_3$  — пунктирной и штрих-пунктирной линиями (в последнем случае нанесены для удобства чертежа значения  $-2I$  и  $-2I_1$ ).

Как видно, здесь отличие значительное, особенно для малых значений скорости. Оно указывает, что процесс релаксации согласно уравнению Крука должен существенно отличаться от даваемого уравнением Больцмана. В уравнении Крука производная  $\partial f / \partial t$  пропорциональна отклонению функции распределения в данной точке пространства скоростей от максвелловской функции. Это приводит к тому, что одновременно начинает уменьшаться величина «горбов» и заполняться «впадина» в окрестности  $\xi = 0$  на фиг. 2, а. Согласно уравнению Больцмана (фиг. 2, б) впадина вначале заполняется медленно, хотя горбы уменьшаются так же быстро, как и по уравнению Крука. Бимодальное распределение имеет тенденцию сохраняться в начале процесса релаксации, но горбы сближаются. Для подтверждения сказанного приводим на фиг. 3 решение задачи об однородной релаксации для начальной функции  $f_3$ , полученное в приближении трех итераций по уравнению Больцмана [10]. Решение уравнения Больцмана (сплошная кривая) сравнивается с решением модельного уравнения (штриховая кривая) для момента времени  $t = 0.25 \tau$ , где  $\tau$  — среднее время между столкновениями. На фиг. 2, в показаны вычисленные по функциям  $f_2$  (штриховая линия) и  $f_3$  (пунктирная линия) профили

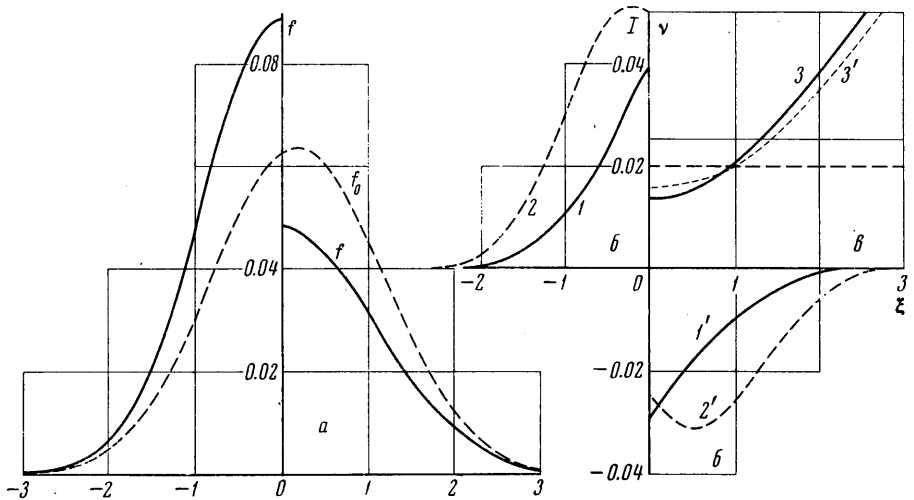


Фиг. 3

интеграла обратных столкновений Больцмана

$$N = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\epsilon f_1' f' g \cos \theta \sin \theta$$

Для обоснования релаксационного уравнения Крукса и при попытках его уточнения часто предполагается, что функционал  $N[f]$  близок к максвелловской функции вне зависимости от вида функции распределения  $f$ . Как видно из фиг. 2, в, это предположение не оправдывается для существ-



Фиг. 4

венных отклонений от равновесия. Наконец, в последнем эксперименте в качестве пробной была взята разрывная функция, состоящая из двух максвелловских распределений с различными температурами для  $\xi > 0$  и  $\xi < 0$ , а именно

$$f_4 = (2\pi T_1)^{-3/2} \exp [-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) / 2T_1] \quad (\xi > 0) \quad (T_1 = 1.2)$$

$$f_4 = (2\pi T_2)^{-3/2} \exp [-(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) / 2T_2] \quad (\xi < 0) \quad (T_2 = 0.8)$$

На фиг. 4, а эта функция изображена сплошной линией, а соответствующая равновесная максвелловская функция — штриховой. Такое распределение характерно для задач о теплообмене между твердым телом и разреженным газом. На фиг. 4, б приведены значения интеграла Больцмана (сплошная линия) и модельного оператора (штриховая).

Как видно, в среднем модельный оператор дает по абсолютной величине в 2 ÷ 2.5 раза завышенное значение. При решении граничных задач это может привести к ошибке в числе Кнудсена примерно такой же величины, так как в безразмерной форме кинетического уравнения перед интегралом столкновений стоит множитель  $1/K$ . По-видимому, для граничных задач с разрывными функциями распределения уравнение Крукса особенно уязвимо.

Во всех экспериментах вычислялась также частота столкновений

$$\nu = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\epsilon f_1 g \sin \theta \cos \theta$$

Эта величина оказалась всюду довольно близкой к частоте, вычисленной по максвелловской функции распределения, но она значительно отличается от частоты, принятой в модели. На фиг. 4, в сплошной линии приведена частота столкновений для функции  $f_0$ , пунктирной — для функции  $f_2$  и штриховой — частота, принятая в модели.

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод, что релаксационная модель Крука вряд ли может дать надежные количественные и вполне достоверные качественные результаты в области течений разреженного газа. Вместе с тем отметим удобство релаксационного уравнения для проведения различных предварительных исследований и испытания численных схем решения газокинетических задач.

Поступило 20 XI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A Model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one — component systems. *Phys. Rev.*, 1954, vol. 94, No. 3, pp. 511—525. (Рус. перев.: В сб. «Проблемы современной физики», М., Изд-во иностр. лит., 1956, т. 2.)
2. Чемпен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
4. Черемисин Ф. Г. К построению моделей интеграла столкновений Больцмана. *Инж. ж.*, 1965, т. 5, № 6.
5. Holway L. H. New statistical models for kinetic theory: methods of construction. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, No. 9, pp. 1658—1673. (Рус. перев.: *Механика. Период. сб. перев. иностр. ст.*, 1967, № 6.)
6. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 1.
7. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 5.
8. Liermann H. W., Narasimha R., Chahine M. T. Structure of a plane shock layer. *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, No. 11.
9. Krook M. Continuum equations in the dynamic of rarefield gases. *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, No. 4, pp. 523—541. (Рус. перев.: В сб. «Некоторые задачи современной аэродинамики», М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
10. Черемисин Ф. Г. Метод прямого численного интегрирования уравнения Больцмана. В сб. «Численные методы в теории разреженных газов», Тр. ВЦ АН СССР, 1969.