

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТЕЧЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С ЗАМЫКАЮЩИМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

В. Т. ГРИНЬ, М. Я. ИВАНОВ, А. Н. КРАЙКО

(Москва)

В задачах торможения сверхзвуковых потоков в каналах, когда область сверхзвуковых скоростей заканчивается замыкающим скачком уплотнения, большое внимание уделяется рассмотрению различных нестационарных эффектов, т. е. динамике течения. Хотя в действительности такие течения могут существенно зависеть от вязкости, важно четко представлять характерные особенности и уметь получать количественную информацию о динамике потока идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Широкое распространение здесь нашли подходы, основанные на линейном приближении. Так, Г. Г. Черный в 1953 г. исследовал течение, близкое к двум стационарным поступательным потокам, разделенным прямым скачком. При этом уравнения для возмущений были решены в квадратурах, а из линеаризованных соотношений на скачке найдены коэффициенты отражения и получено уравнение движения скачка. Г. Г. Черный проанализировал влияние ряда факторов на устойчивость замыкающего скачка и показал, что в расширяющемся канале скачок устойчив, а в сужающемся — неустойчив. Данный вывод подтверждается экспериментально и имеет фундаментальное значение. Подход Г. Г. Черного получил дальнейшее развитие в ряде исследований. В частности, О. Э. Цыпкина [1] решила ряд задач о течении в цилиндрическом канале с проницаемыми стенками в случае, когда на выходе из него располагается «короткое» сопло с переменной площадью критического сечения. А. Б. Бабицкий в 1959 г. обобщил часть результатов Г. Г. Черного на случай, когда в скачке выделяется (или поглощается) энергия.

Использование линеаризации в случае течения, близкого к произвольному стационарному потоку, требует рассмотрения системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Так как ее решение, как и решение исходной нелинейной системы, можно, вообще говоря, получить только численно, то линеаризация в подобных случаях часто становится неоправданной. Чтобы избежать возникающие при этом трудности Вассербауэр и Уиллох [2], исследуя в одномерном приближении динамику потока с замыкающим скачком в осесимметричном канале, заменяли канал переменной площади последовательностью цилиндрических участков. В качестве условий стыковки в сечениях их соединения выставлялись требования непрерывности потоков массы, полной энтальпии и энтропии. Линеаризация построенного таким путем течения позволила выяснить ряд интересных эффектов. В частности, было обнаружено явление резонанса в перемещении замыкающего скачка под действием возмущений, идущих от выходного сечения канала.

В последнее время к исследованию динамики течений торможения начинают привлекаться численные методы. При этом наличие заранее неизвестных ударных волн, возникающих обычно в рассматриваемых задачах внутри потока, делает предпочтительным использование методов сквозного счета. В этих методах скачки уплотнения «размазываются», т. е. заменяются сравнительно тонкими областями резкого изменения параметров, причем наличие таких областей не требует усложнения вычислительных алгоритмов (в противоположность положению, которое имеет место при расчете течений со скачками методом характеристик). Один из подобных методов, основанный на разностной схеме Лакса, был использован Мэйсом [3] для анализа нестационарных явлений, возникающих при быстром закрытии выходного сечения канала.

Основные результаты данной работы также получены численно при помощи метода сквозного счета. Рассматривалась задача о нестационарном течении в осесимметричном канале с центральным телом при сверхзвуковом потоке на входе и заданном (постоянном по сечению и переменном по времени) давлении в плоскости выхода. В стационарных условиях замыкающий скачок расположен ниже минимального сечения (горла) канала. Расчеты велись по разностной схеме, предложенной в [4, 5] для решения нестационарных задач газовой динамики. Недавно эта схема применялась для расчета стационарных и нестационарных течений в соплах [6-8], причем было установлено, что она обеспечивает меньшее размазывание скачков, чем

схема Лакса, использованная в [3]. Расчеты выполнялись по двумерному варианту метода, т. е. интегрировались уравнения нестационарного осесимметричного течения. Вместе с тем в большинстве случаев разностная сетка выбиралась такой (одна ячейка между стенками канала), что полученные результаты ближе к одномерному приближению. Для объяснения ряда эффектов, обнаруженных в процессе расчета (резонанс, затухание высокочастотных колебаний), использовались решения, полученные на основе линейного и нелинейного приближений теории малых возмущений.

1. Рассмотрим течение вязкого и нетеплопроводного газа в осесимметричном канале, верхняя и нижняя стенки которого задаются уравнениями $y = y_+(x)$ и $y = y_-(x)$, плоскости входа соответствует $x = 0$, а выхода — $x = L$, где x, y — прямоугольные координаты в меридиональной плоскости. Пусть t — время, p, ρ, e, i — давление, плотность, удельные внутренняя энергия и энтальпия и w — модуль вектора скорости газа \mathbf{V} , а u и v — проекции \mathbf{V} на оси x и y . Удобно считать, что все переменные — безразмерные величины.

Если размерным параметрам присписать верхний индекс градус, то приведение к безразмерному виду достигается отнесением x° и y° к характерной длине l° , скоростей — к характерной скорости u_*° , времени — к l°/u_*° , плотности — к характерной плотности ρ_*° , давления — к $\rho_*^\circ (u_*^\circ)^2$ и, наконец, e° и i° — к $(u_*^\circ)^2$.

Дифференциальные уравнения рассматриваемого течения и соотношения на сильных разрывах эквивалентны следующей системе интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iint_S \rho y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (u \, dy - v \, dx) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho u y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [(p + \rho u^2) \, dy - \rho u v \, dx] &= 0 \quad (1.1) \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho v y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} y [\rho u v \, dy - (p + \rho v^2) \, dx] &= \iint_S p \, dx \, dy \\ \frac{d}{dt} \iint_S \rho (2e + w^2) y \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \rho y (2i + w^2) (u \, dy - v \, dx) &= 0 \end{aligned}$$

где S — произвольная не зависящая от t площадка в плоскости xy , а Γ — ее граница. Интегрирование вдоль Γ осуществляется против часовой стрелки. К системе (1.1) следует добавить уравнения состояния, которые для совершенного газа с постоянным показателем адиабаты κ имеют вид

$$e = p / (\kappa - 1) \rho, \quad i \equiv e + p / \rho = \kappa p / (\kappa - 1) \rho$$

Будем считать, что на входе в канал поток сверхзвуковой и, следовательно, при $x = 0$ все параметры течения известны. Кроме того, пусть форма канала и условия при $x = L$ таковы, что происходит торможение потока и сверхзвуковая область ограничена справа замыкающим скачком уплотнения. При этом движение скачка и течение справа от него полностью определяются давлением в выходном сечении, которое будем считать известной функцией времени. На стенках канала выполняется условие непротекания, а в качестве начальных условий при $t = 0$ будем брать параметры соответствующего стационарного потока. Ниже исследуется динамика течения внутри канала, и в частности перемещение замыкающего скачка при изменении давления в сечении выхода.

2. Как уже отмечалось, метод численного решения, использованный ниже, основан на разностной схеме, предложенной в [4, 5]. Так как схема и порядок вычислений подробно описаны в [4-6], то здесь будет обращено внимание лишь на детали, связанные с особенностями рассматриваемой задачи.

Область течения в плоскости xu в продольном направлении разбивается на N слоев отрезками вертикальных прямых, которым приписываются номера $n = 0, \dots, N$, где $n = 0$ отвечает отрезку $x = 0$, а $n = N$ — отрезку $x = L$. Каждая вертикальная граница разбивается на K равных отрезков и соответствующие точки соседних границ соединяются друг с другом также отрезками прямых. Получаемым таким путем границам слоев приписываются номера $k = 0, \dots, K$, причем $k = 0$ отвечает нижней стенке, а $k = K$ — верхней стенке. В итоге область течения разбивается на четырехугольные ячейки, каждой из которых ставится в соответствие два числа $(n - 1/2, k - 1/2)$. Средним по ячейке параметрам в момент t приписываются нижние индексы ($\rho_{n-1/2, k-1/2}$ и т. д.), а в момент $t + \tau$, где τ — шаг по времени, — аналогичные верхние индексы. Параметрам на отрезках границ, осредненным по отрезку времени $(t, t + \tau)$, приписывается один целый и один полужелтый индекс, а сами эти параметры обозначаются соответствующими большими буквами (R, P, U и т. д.).

Расчетная схема, при помощи которой по величинам с нижними полужелтыми индексами (т. е. в момент t) и по параметрам на границах (R, P, \dots) находятся величины с такими же верхними индексами (т. е. в момент $t + \tau$), получается интегрированием (1.1) по времени от t до $t + \tau$ с последующим применением теоремы о среднем. При этом в качестве S и Γ в (1.1) берутся описанные выше четырехугольные ячейки и их границы. Величины R, P, \dots на каждом отрезке границы в соответствии с [4, 5] находятся из рассмотрения распада одномерного разрыва, начальные параметры с разных сторон которого тождественны параметрам с нижними полужелтыми индексами в ячейках, примыкающих к данному отрезку. Для расчета R, P, \dots при $k = 0$ и $k = K$ вводятся вспомогательные ячейки, параметры в которых выбираются так, что в результате распада разрыва на стенке выполняется условие непротекания. Все необходимые формулы для перечисленных случаев, а также полная система разностных уравнений приведены в [4, 5].

Большие величины в плоскости входа ($x = 0$) и давление в сечении выхода, т. е. $P_{N, k-1/2}$, в силу постановки задачи известны, причем все эти величины следует брать в момент $t + \tau/2$, отвечающий полшагу по времени. Далее, если $u_{N-1/2, k-1/2} \geq 0$, то $V_{N, k-1/2} = v_{N-1/2, k-1/2}$, и в соответствии с [9]

$$R = \rho \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/\kappa}, \quad U = u + \frac{2\sqrt{\kappa}}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} - \left(\frac{P}{R} \right)^{1/2} \right]$$

$$d = u - \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} \quad \text{при } P \leq p$$

$$R = \frac{(\kappa + 1)P + (\kappa - 1)p}{(\kappa - 1)P + (\kappa + 1)p} \rho, \quad U = u + \frac{(p - P)\sqrt{2}}{\sqrt{[(\kappa + 1)P + (\kappa - 1)p] \rho}}$$

$$d = u - \left(\frac{\kappa + 1}{2\rho} P + \frac{\kappa - 1}{2\rho} p \right)^{1/2} \quad \text{при } P > p$$

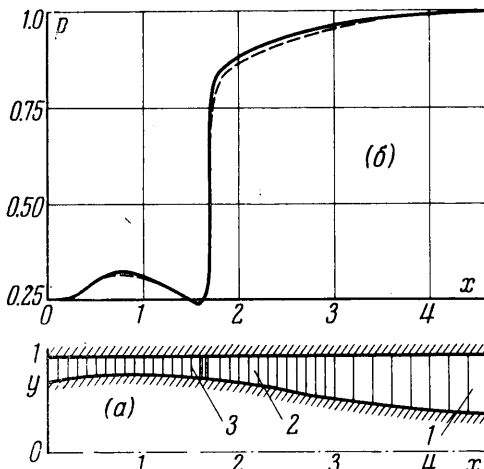
Здесь d — скорость переднего фронта центрированной волны (при $P \leq p$) или скачка уплотнения (при $P > p$), бегущих влево; у больших величин опущены индексы $N, k - 1/2$, а у малых (кроме d) — нижние индексы $N - 1/2, k - 1/2$. Интенсивность центрированной волны, при которой давление может быть задано в плоскости выхода, ограничена условием обращения в нуль скорости заднего фронта центрированной волны: $U - (\kappa P / R)^{1/2} = 0$. Если $u_{N-1/2, k-1/2} < 0$, то при $x = L$, кроме P , следует задавать также R и V , однако приведенные формулы для U и d сохраняются.

Прежде чем переходить к анализу результатов расчета, остановимся на одном обстоятельстве, которое связано с тем, что метод может применяться как при $K > 1$, так и при $K = 1$. Во втором случае верхней и нижней границами каждой расчетной ячейки служат отрезки стенок канала. Поэтому для $K = 1$ естественно употреблять

термин «одномерное приближение» в отличие от двумерного приближения при $K > 1$. Такое одномерное приближение, однако, отличается от обычной гидравлики тем, что здесь наряду с осредненными по сечению осевой компонентой скорости и термодинамическими параметрами газа в процессе расчета находятся осредненное значение вертикальной компоненты скорости и все параметры на стенках канала.

3. Расчеты проводились для канала с центральным телом и цилиндрической образующей верхней стенки, которые показаны на фиг. 1, а. Как видно из фигуры, за r взят радиус цилиндрической стенки. На входе в канал энтропия, полная энтальпия и компонента скорости u принимались постоянными, а v задавалось линейной функцией y . За ρ_* и u_* были взяты критические плотность и скорость при $x = 0$, $\kappa = 1.4$, а начальными условиями служили параметры стационарного течения, которое реализуется при $u(0, y) = 1.52$ и $p(L, y) = 1$. Стационарное течение рассчитывалось по той же разностной схеме с использованием процесса установления.

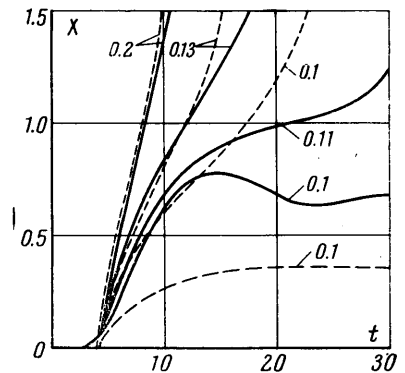
Стационарное распределение давления, найденное при $K = 1$, дано на фиг. 1, б сплошной кривой. Там же штрихами показано распределение давления у нижней



Фиг. 1

возмущений давления в сечении выхода. Все расчеты проводились при $K = 1$, причем на фигурах (как, впрочем, и на фиг. 1) приводятся значения параметров, осредненные по сечению.

4. Рассмотрим нестационарное течение, возникающее в случае, когда при $t = 0$ давление в сечении выхода мгновенно увеличивается на Δp , а затем остается неизменным. Изменение координаты замыкающего скачка во времени показано на фиг. 2, где цифры над кривыми — значения Δp , $X = x_{se} - x_s$, а x_s и x_{se} — текущее и начальное положение скачка. Горлу соответствует $X \approx 0.8$, а сечению входа — $X \approx 1.6$. Результаты численного расчета даны сплошными кривыми. Отметим, что из-за размазывания фронта слабого скачка наблюдается постепенное, а не мгновенное нарастание скорости замыкающего скачка в момент прихода на него возмущения справа, причем этот момент наступает несколько раньше, чем на самом деле. Как видно из фигуры, в зависимости от величины Δp замыкающий скачок или занимает новое устойчивое положение (после колебаний, вызванных отражением возмущений от стенок канала и сечения



Фиг. 2

$x = L$), или перемещается в сужающуюся часть и полностью разрушает сверхзвуковое течение. Сравнение траекторий скачка при $\Delta p = 0.10$ и 0.11 показывает, что возможна ситуация, когда в случае медленного возрастания $p(L)$ замыкающий скачок занимает новое стационарное положение, в то время как при внезапном увеличении $p(L)$ на ту же величину сверхзвуковое течение разрушается во всем канале.

Сравним кривые $X = X(t)$, полученные численным интегрированием уравнений нестационарного течения, с результатами линейной теории для квазицилиндрического канала. Как показал Г. Г. Черный, в этом приближении движение скачка описывается уравнением¹

$$\frac{dX}{dt} = u_1 \xi \frac{\Delta F}{F} - u_1 \chi \frac{\Delta p_s}{p_2} \quad (\Delta F = F_s - F_{se}) \quad (4.1)$$

$$\chi = \frac{1 - M_2 + (1 + M_2)\Lambda}{[1 - (\rho_2/\rho_1)] \kappa M_2^2}, \quad \Lambda = \frac{(1 - M_2)(M_2 - \psi)}{(1 + M_2)(M_2 + \psi)}$$

$$\psi = 1 - M_2^2 [(\rho_2/\rho_1) - 1](\kappa - 1)$$

$$\xi = 1 - (1 + M_2)[1 + M_1^2 - \kappa(\kappa - 1)M_1^2 M_2^2] \Phi^{-1}$$

$$\Phi = (1 + M_1^2)(1 + \kappa M_2^2) + [2 + (\kappa + 1)M_1^2 + (\kappa - 1)M_2^2] M_2$$

Здесь M — число Маха; F — площадь поперечного сечения канала; F_s и F_{se} отвечают текущему и стационарному положениям скачка; индексы 1 и 2 приписаны стационарным значениям переменных слева и справа от скачка; Δp_s — приращение p относительно стационарного значения справа от скачка. Так как слабый скачок движется относительно потока со скоростью звука a , то

$$\Delta p_s = 0 \quad \text{при } t < t_s \approx \int_{x_{se}}^L \frac{dx}{a - u}$$

где интеграл вычисляется по стационарным распределениям a и u . В рассматриваемом случае $t_s \approx 4$.

Результат расчета траектории замыкающего скачка по уравнению (4.1) при $\Delta p_s \equiv \Delta p = 0.1$ дан на фиг. 2 нижней штриховой линией, которая лежит значительно ниже сплошной кривой, полученной для того же Δp . Это связано с тем, что возмущение, двигаясь по каналу переменного сечения, усиливается (в данном случае примерно вдвое), чего не учитывает рассматриваемая линейная теория. В то же время для определения интенсивности слабых скачков могут быть использованы формулы геометрической акустики [10, 11]. Так, для скачка, бегущего влево, имеем [10]

$$\Delta p_s = \Delta p_L \left(\frac{F_L}{F_s} \right)^{1/2} \left(\frac{p_L}{p_2} \right)^{(1-\kappa+\theta)/2\kappa}, \quad \theta = \left(\ln \frac{p_L}{p_2} \right)^{-1} \int_{p_2}^{p_L} \frac{2-M+\kappa M^2}{M(1-M)} d \ln p \quad (4.2)$$

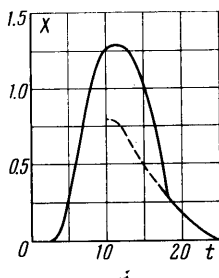
где индекс L приписан параметрам при $x = L$ и все величины стационарные.

Траектории замыкающего скачка, рассчитанные по (4.1) с использованием (4.2), также даны на фиг. 2 штрихами. Видно, что в течение некоторого начального промежутка времени, пока с замыкающим скачком взаимодействует часть волны возмущения, примыкающая к фронту, штриховые кривые близки к сплошным.

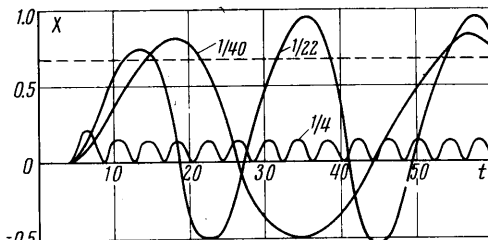
Наряду с исследованием воздействия на поток постоянного ступенчатого возмущения, были рассмотрены случаи, когда действие такого возмущения ограничено временем $0 \leq t \leq T$. Результаты соответствующего расчета для $\Delta p = 0.2$ и $T = 3$ приведены на фиг. 3, где, как и на фиг. 2, показана траектория замыкающего скачка. Здесь также скачок сначала перемещается вверх по потоку в сужающуюся часть канала, однако период действия возмущения в данном случае недостаточен для полного разрушения сверхзвукового течения. Волна разрежения, возникающая после пре-

¹ Данное уравнение скорректировано в соответствии с результатами А. Б. Бабичко; выражение для Λ взято из работы [10], при использовании которой следует поменять местами слова «до» и «после» в третьей строке снизу на стр. 105.

кращения действия возмущения при $x = L$, сначала останавливает скачок в сужающейся части канала, а затем возвращает его в расширяющуюся часть. Интересно отметить, что здесь еще до возвращения замыкающего скачка под действием волны разрежения возникает местная сверхзвуковая зона, которая заканчивается областью повышения давления (волной сжатия). Со временем эта волна, становясь все более крутой, образует второй замыкающий скачок. Его траектория, а для начального периода — траектория точки максимального наклона профиля давления в волне сжатия дана на фиг. 3 штрихами. После встречи и взаимодействия двух замы-



Фиг. 3

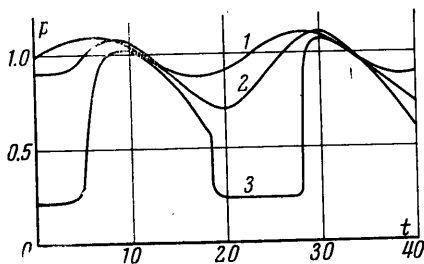


Фиг. 4

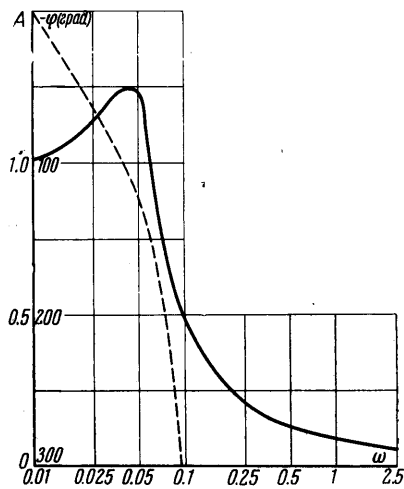
кающих скачков течение релаксирует к своему исходному стационарному состоянию.

5. Пусть приращение давления в сечении $x = L$ при $t > 0$ совершает синусоидальные колебания с амплитудой Δp и безразмерной круговой частотой $\omega = \omega^{\circ} l^{\circ} / u_{*}^{\circ}$, т. е. $p(L, t) = 1 + \Delta p \sin 2\pi\omega t$. В этом случае в зависимости от Δp и ω реализуется одна из двух возможностей: или происходит полное разрушение сверхзвукового течения, или устанавливается периодический режим движения замыкающего скачка и изменения параметров потока в дозвуковой части канала. Как показали расчеты, для $\Delta p = 0.1$ при всех ω реализуется вторая возможность. Некоторые результаты расчета для этого случая даны на фиг. 4—6.

На фиг. 4 сплошными кривыми показаны траектории замыкающего скачка для различных ω , которые



Фиг. 5



Фиг. 6

даются цифрами над кривыми. Там же штрихами дана амплитуда колебания скачка при $\omega = 0$, которая совпадает с асимптотическим значением ординаты соответствующей кривой на фиг. 2. Отметим, что в зависимости от ω амплитуда первого колебания скачка оказывается как больше, так и меньше амплитуды периодических колебаний.

На фиг. 5 для $\omega = 1/22$ приведены кривые изменения давления по времени в сечениях канала, указанных на фиг. 1 цифрами 1, 2, Те же номера приписаны к осциллограммам на фиг. 5. Из рассмотрения фиг. 5 можно найти фазовый сдвиг и рост амплитуды возмущения при его движении вверх по потоку.

Как видно из фиг. 4, максимум амплитуды периодических колебаний скачка отвечает частоте $\omega > 0$, т. е. имеет место резонанс. Зависимость амплитуды колебаний скачка от ω в полулогарифмическом масштабе представлена сплошной кривой на фиг. 6, где A — отношение амплитуды к ее значению при $\omega = 0$. На той же фигуре штрихами дано фазовое запаздывание колебаний скачка ϕ относительно колебаний p при $x = L$.

Возникновение резонанса обязано интерференции возмущений p , заданных в сечении выхода, с возмущениями, отраженными от стенок сужающейся части канала и от неоднородностей течения. Роль отражения от замыкающего скачка в данном случае крайне незначительна, так как в рассмотренных примерах соответствующий коэффициент отражения не превышает 0.03. Заметим, что условия резонанса в движении скачка не тождественны условиям, обеспечивающим максимальное усиление волны давления, так как согласно (4.1) для смещения скачка важна не только величина максимума Δp_s , но и протекание Δp_s во времени. Для лучшего понимания механизма такого резонанса вновь обратимся к уравнению (4.1), для определения Δp_s в котором используем ряд упрощающих предположений.

Возмущение, приходящее на периодическом режиме на замыкающий скачок, разобьем на «прямую» и «отраженную» волны, причем последняя появляется из-за отражения прямой волны в сужающейся части канала и ее повторного отражения (с коэффициентом, равным -1) от сечения $x = L$. Отвлекаясь от чрезвычайно сложной картины движения возмущений, которое, в частности, сопровождается деформацией формы гармонических колебаний, в качестве главных эффектов рассмотрим следующие: усиление возмущений частоты ω при движении против потока по сужающемуся каналу (коэффициент усиления γ); их однократное отражение с «эффективным» коэффициентом отражения r и сдвигом фаз ϕ ; общее запаздывание обеих волн при движении от сечения выхода до замыкающего скачка. При этом для Δp_s получим

$$\Delta p_s = \gamma [\sin f(t + \zeta/d_2) - r \sin f(t + \zeta/d_2 - \phi)] \Delta p \quad (f = 2\pi\omega) \quad (5.1)$$

$$d_2 = u_2 - a_2, \quad \zeta = L - x_s + \delta$$

Постоянная δ выбирается так, что $\zeta_0/d_2 = t_s$.

Подставляя (5.1) в (4.1), вводя переменные $z = X/d_2$ и $\tau = t + \zeta_0/d_2$, заменяя ΔF на $F_{se}'(x_s - x_{se})$ и проводя линеаризацию в предположении $|fz| \ll 1$, придем к уравнению

$$\frac{dz}{d\tau} - bz = c(\alpha \sin f\tau + \beta \cos f\tau)$$

$$(\alpha = 1 - r \cos f\phi, \quad \beta = r \sin f\phi)$$

в котором c и $b < 0$ — константы, являющиеся комбинациями коэффициентов (4.1), а также величин γ , Δp , F_{se}' и d_2 , причем γ входит только в c . Решение этого уравнения при $\tau \gg 1/|b|$ не зависит от начальных условий и имеет вид

$$z(\tau) = c(b^2 + f^2)^{-1}[(f\beta - b\alpha) \sin f\tau - (b\beta + f\alpha) \cos f\tau] \quad (5.2)$$

Моменты максимального отхода скачка от положения равновесия τ_m определяют условием $dz/d\tau = 0$, что дает

$$\tau_m = [n\pi - \arctg(\mu/\lambda)]f^{-1} \quad (\mu = \beta f - b\alpha, \quad \lambda = b\beta + f\alpha)$$

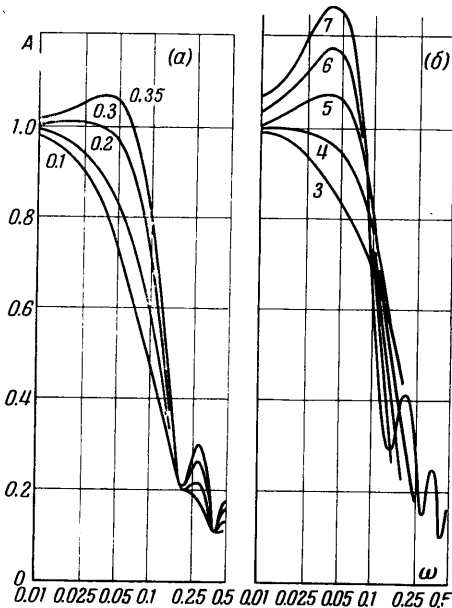
где n — целое число или нуль. В данном приближении скачок колеблется симметрично относительно положения равновесия. Резонансная частота определяется условием $dz_m/df = 0$, где z_m находится по (5.2) при $\tau = \tau_m$.

Отсюда, считая, что γ и r не зависят от f , для резонансной частоты получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & [2f\mu - (b^2 + f^2)(\alpha + br\varphi \cos f\varphi + rf\varphi \sin f\varphi)]\mu - \\ & - [(b^2 + f^2)(\beta + rf\varphi \cos f\varphi - br\varphi \sin f\varphi - 2f\lambda)]\lambda = 0 \end{aligned}$$

Интересно отметить, что при $\gamma = \text{const}$ кривая $A = A(\omega) \equiv z_m(\omega) / z_m(0)$ не зависит от γ . Как следует из полученных формул, в рассмотренной модели вид этой зависимости определяется значениями коэффициента отражения r , фазового сдвига φ и константы $b = -u_1 \xi (\ln F)_{se}$, где выражение для ξ дано в предыдущем пункте. В исследуемом случае $b = -0.27$.

Амплитудно-частотные характеристики, построенные на основе полученных соотношений для $b = -0.27$ и ряда значений r и φ даны на фиг. 7. Фиг. 7, а соответствует $\varphi = 5$ и различным r , а фиг. 7, б — случаю $r = 0.35$ и разным φ . Значения r и φ даны цифрами над кривыми. Видно, что для $\varphi = 5$ резонанс, при котором $A > 1$, наблюдается лишь для достаточно больших r . При фиксированном r увеличение φ приводит к росту первого резонансного пика и к уменьшению соответствующей ему частоты. Как явствует из проведенного анализа, резонансная частота, которая дает максимум перемещения скачка, отличается от частоты, отвечающей резонансу по давлению. Действительно, последняя, в соответствии с (5.1), не зависит от r и определяется условием $\omega = (2n + 1) / 2\varphi$, где n — целое число или нуль. Сравнение фиг. 6 и 7 показывает, что модель течения, положенная в основу (5.1), дает качественно правильное описание природы резонанса.



Фиг. 7

щается к горлу канала. Особенно наглядно этот эффект виден для $\omega = 1/2$. В этом случае гармоническое возмущение давления при $x = L$, прежде всего, вызывает перемещение скачка в новое «стационарное» положение и уже в качестве вторичного эффекта индуцирует его малые колебания относительно этого положения (фиг. 8). Аналогичный характер имеют при $\omega = 1/2$ и осциллограммы давления на достаточном удалении от сечения выхода.

Указанные эффекты есть следствие образования в волне сжатия слабых скачков уплотнения и их последующего затухания, сопровождающихся дополнительным ростом энтропии. При этом воздействие гармонических возмущений при $x = L$ оказывается эквивалентным подводу к газу тепла или появлению дополнительных потерь полного давления в дозвуковой области течения, что и объясняет перемещение среднего положения скачка по направлению к горлу. Чтобы выяснить, насколько эти представления отвечают результатам расчета, найдем времена, необходимые для формирования и затухания слабых скачков в цилиндрическом канале, по которому течет однородный дозвуковой поток и в выходном сечении которого при $t > 0$ имеет место синусоидальное возмущение давления.

6. При анализе результатов численного интегрирования были обнаружены и такие явления, которые связаны с существенно нелинейными эффектами и не могут быть объяснены в рамках линейной теории. Так, точка, относительно которой происходят колебания скачка на фиг. 4, с ростом ω смещается к горлу канала.

Как и в [12], можно показать, что рассматриваемое течение при $x \leq L$ до возникновения скачков описывается уравнениями

$$u = C - \frac{2\alpha(\tau)}{\kappa - 1}, \quad \alpha(\tau) = B[P(\tau)]^{(\kappa-1)/2\kappa}$$

$$x - L = \left[C - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \alpha(\tau) \right] (t - \tau), \quad P(\tau) = p_\infty + \Delta p \sin f\tau \quad (6.1)$$

$$C = u_\infty + \frac{2a_\infty}{\kappa - 1}, \quad B = \left(\frac{\kappa p_\infty^{1/\kappa}}{\rho_\infty} \right)^{1/2}$$

Здесь τ — параметр, имеющий смысл времени ухода точки волны с $u = u(\tau)$, $a = \alpha(\tau)$ и т. д. с границы $x = L$, а индекс ∞ приписан величинам в невозмущенном потоке.

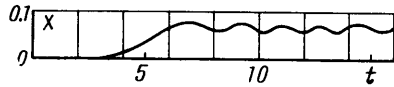
Через некоторое время в волне (6.1) и, в частности, при $\Delta p > 0$ в ее фронте зарождаются слабые скачки. Задача определения момента возникновения скачка в данном случае решается так же, как и задача о возникновении скачка при движении поршня, начинающегося с нулевой скоростью [12]. В итоге получим, что момент возникновения скачка во фронте волны (т. е. при $\tau = 0$) определяется уравнением

$$t_1 = \frac{2\kappa}{Bf(\kappa - 1)\Delta p} \left(Bp_\infty^{(\kappa-1)/2\kappa} - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} C \right) p_\infty^{-(\kappa+1)/2\kappa}$$

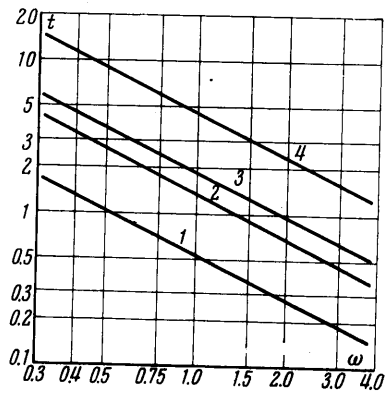
Моменты образования внутренних скачков t_* и соответствующие точки волны, которые характеризуются параметром $\tau = \tau_*$, находятся из последовательного решения двух уравнений

$$2[\alpha'(\tau_*)]^2 + \left[\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} C - \alpha(\tau_*) \right] \alpha''(\tau_*) = 0$$

$$t_* = \tau_* - \frac{2\alpha'(\tau_*)}{\alpha''(\tau_*)}$$



Фиг. 8



Фиг. 9

где штрихом обозначены полные производные по τ . При этом время с момента ухода точки волны с $\tau = \tau_*$ от сечения $x = L$ до образования в этой точке скачка есть $t_2 = t_* - \tau_*$. Хотя приведенные уравнения имеют бесконечную последовательность корней t_* и τ_* , однако можно показать, что их разность, т. е. t_2 при $\alpha(\tau)$ из (6.1), постоянна (не зависит от номера корня).

В момент возникновения скачок имеет нулевую интенсивность, затем усиливается, а потом начинает затухать. Известно [12], что при исследовании деформации слабых скачков можно по-прежнему пользоваться решением (6.1), а его скорость D вычислять по формуле

$$D = D(\tau_-, \tau_+) = \frac{d(\tau_-) + d(\tau_+)}{2}, \quad d(\tau) \equiv u(\tau) - \alpha(\tau) = C - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \alpha(\tau) \quad (6.2)$$

Здесь d — скорость малых возмущений, движущихся влево, т. е. в ту же сторону, что и скачок, а τ_- и τ_+ — значения τ в решении (6.1) до и после скачка.

Так как $d(\tau_+) \geq D$, то участки волны с $\tau > \tau_*$ догоняют скачок, сначала усиливая, а затем ослабляя его. На участке усиления скачка D монотонно растет и поэтому с хорошей степенью точности

$$x = x_* + \int_{t_*}^t D dt \approx x_* + \frac{1}{2} [d(\tau_+) + D(\tau_-, \tau_+)] (t - t_*)$$

где x_* определяется из (6.1) при $t = t_*$ и $\tau = \tau_*$. Отсюда и из (6.1) найдем, что движение скачка (на интервале роста его интенсивности) описывается уравнениями

$$d(\tau_-)(t - \tau_-) = d(\tau_+)(t - \tau_+)$$

$$2d(\tau_-)(t - \tau_-) = 2(x_* - L) + [d(\tau_+) + D(\tau_-, \tau_+)](t - t_*)$$

которые вместе с (6.2) для заданного $\tau_+ \leq \tau_{**} = 4\pi(n+1)/2f$ определяют t и τ_- . Значение $\tau_+ \approx \tau_{**}$ определяет момент $t = t_{**}$ достижения скачком максимальной интенсивности. Промежуток времени, который проходит от возникновения скачка до этого момента, есть $t_3 = t_{**} - t_*$. Аналогично можно рассмотреть последующее затухание скачка. В частности, можно получить время t_4 , необходимое для затухания скачка в $\sqrt{2}$ раз.

Зависимости $t_i = t_i(\omega)$ для параметров невозмущенного потока, равных параметрам в сечении выхода исследуемого канала, даны на фиг. 9, где цифры у кривых тождественны соответствующим индексам. Представленные результаты подтверждают данное выше объяснение природы смещения среднего положения замыкающего скачка. Действительно, для широкого диапазона частот времени образования (t_1, t_2), роста (t_3) и затухания (t_4) слабых скачком даже для цилиндрического канала имеют тот же порядок или меньше времени ($t_3 \approx 4$), которое требуется возмущению, чтобы в исследуемом случае пройти путь от выходного сечения до замыкающего скачка. В сужающемся (по ходу движения возмущений) канале эти времена будут еще меньше.

Проведенные расчеты продемонстрировали большие возможности примененного численного метода для исследования нестационарных течений в каналах. При этом расчет типичного варианта при $K = 1$ на ЭВМ типа «М-20» занимает 0.5—1 час машинного времени.

В заключение авторы благодарят Г. Г. Черного за полезные обсуждения и ценные советы, а также А. Н. Кутузову за помощь в работе.

Поступило 30 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкова О. Э. Движение газа в каналах конечной длины при переменном противодавлении. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 3, стр. 15—24.
2. Wasserbauer J. F., Willoh R. G. Experimental and analytical investigation of the dynamic response of a supersonic mixed — compression inlet. AIAA Paper, 1968, No. 651. (Рус. перев.: Экспресс-информация, Сер. Авиастроение, 1968, № 43, реф. 453, стр. 19—32).
3. Maуs R. A. Inlet dynamics and compressor surge. AIAA Paper, 1969, No. 484.
4. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), № 3, стр. 271—306.
5. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.
6. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5, стр. 77—83.
7. Иванов М. Я. Применение метода установления к анализу нерасчетных режимов течения в осесимметричных соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, стр. 137—139.
8. Иванов М. Я. К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
9. Зауэр Р. Нестационарные задачи газодинамики. М., «Мир», 1969.
10. Крайко А. Н. Некоторые вопросы геометрической акустики одномерных нестационарных и двумерных стационарных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 104—109.
11. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.