работке воздуха нагретой водой. Следовательно, результаты данной работы могут быть использованы при подборе оптимальных технологических режимов разбрызгивания в различных жидкокапельных, газоиспарительных установках при подборе параметров жидкости и газа, диаметров, а также конструкций форсунок.

Поступило 7 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтман Ю. М. К вопросу о влиянии окружающей среды на устойчивость жидких струй. Изв. АН СССР, ОТН, 1946, № 11.
2. Верещагин Л. Ф., Семерчан А. А., Секоян С. С. К вопросу о распаде высокоскоростной водяной струи. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 1.
3. Панасенков Н. С. О влиянии турбулентности жидкой струи на ее распыление. Ж. техн. физ., 1951, т. 21, вып. 2.
4. Лышевский А. С. Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск. Политехн. ин-т, Новочеркасск, 1961.
5. Витман Л. А. О расчете длины сплошной части струи жидкости при ее распаде. Вопросы теплоотдачи и гидравлики двух фазных сред. Сб. статей. М.— Л., Госэнергоиздат, 1961, стр. 338—350.
6. Бронштейн И. Н., Семендаев К. А. Справочник по математике, Изд. 6, М., Гостехиздат, 1956.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В. И. ЯКУШИН

(*Пермь*)

Исследуется устойчивость стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости, возникающего в тонком шаровом слое, когда обе сферы вращаются в одном направлении с разными угловыми скоростями. Для отношения радиусов сфер $r_2 / r_1 = 1.10$, 1.07 получена кривая устойчивости, которая аналогична кривой устойчивости движения жидкости между вращающимися цилиндрами.

До недавнего времени в теории гидродинамической устойчивости почти не рассматривались течения, осуществляющиеся в замкнутых полостях. При исследовании таких течений возникают дополнительные трудности, связанные с отсутствием точного аналитического решения уравнений стационарного движения.

Типичным примером движения жидкости в замкнутом объеме является течение между двумя вращающимися сферическими поверхностями. Аналитическое выражение для скорости этого движения может быть получено лишь при медленном вращении разложением [1] по степеням числа Рейнольдса R

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 R + \mathbf{U}_2 R^2 + \ldots \tag{1}$$

Однако, [2] если отношение радиусов сфер близко к единице (тонкий шаровой слой), то

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 R \tag{2}$$

можно рассматривать как точное решение стационарных уравнений движения.

В работе [2] исследовалась устойчивость стационарного движения (2) в тонком шаровом слое в случае вращения одной внутренней сферы. Было показано, что для каждого отношения радиусов сфер существует последовательность критических чисел Рейнольдса, выше которых движение (2) неустойчиво.

Ниже исследуется устойчивость течения (2) в случае, когда внутренняя сфера радиуса r_1 и внешняя сфера радиуса r_2 вращаются в одном направлении с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Выбирая за единицы длины, скорости и времени соответственно r_1, ν / r_1 и r_1^2 / ν, стационарное движение жидкости между двумя вращающимися концентрическими сферами запишем в виде [3]

$$\mathbf{U} = \frac{R}{a^3 - 1}\left[\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right) + \varepsilon\left(a^3 - \frac{a^3}{r^3}\right)\right]\mathbf{n}\times\mathbf{r} \qquad \left(R = \frac{\Omega_1 r_1^2}{\nu},\ \varepsilon = \frac{\Omega_2}{\Omega_1},\ a = \frac{r_2}{r_1}\right) \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении оси вращения.

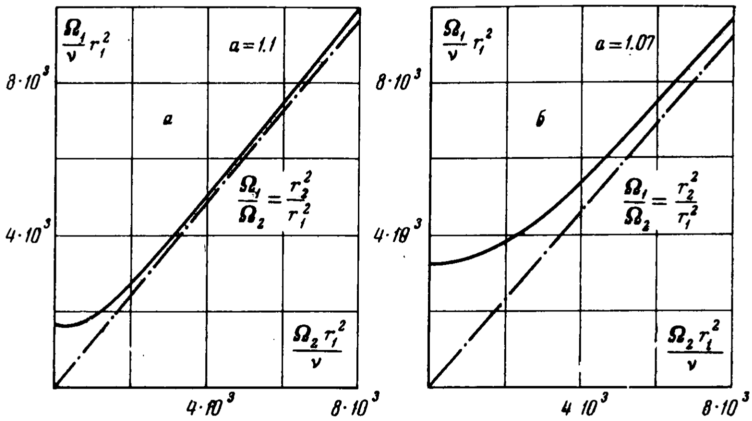
Исследуем устойчивость течения (3) по отношению к малым нормальным возмущениям скорости и давления, амплитуды которых $\mathbf{u}$, p удовлетворяют уравнениям [4]

$$\nabla p - \lambda \mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{U} = 0 \qquad (4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u}|_{S_1, S_2} = 0$$

Стационарное движение $\mathbf{U}$ устойчиво, если вещественные части всех декрементов λ положительны.

Как и в работе [2], краевая задача (4) решалась методом Бубнова — Галеркина с базисом из собственных функций задачи о возмущениях равновесия жидкости в шаровом слое. Возмущения неподвижной жидкости ($\mathbf{U} \equiv 0$) в шаровом слое делятся на два вида: симметричные (S) и антисимметричные (A) относительно отражения в плоскости экватора. В силу ортогональности S- и A-возмущений, их можно рассматривать независимым образом.



Для тонкого шарового слоя значения первого критического числа для обоих видов возмущений практически совпадают. Следовательно, достаточно определить устойчивость течения (3) по отношению к одному виду возмущений, например по отношению к S-возмущениям.

Минимальное критическое число Рейнольдса R_*, соответствующее данному ε, находилось следующим образом. Для каждого ε определялся достаточно малый интервал чисел Рейнольдса $R^+ < R_* < R^-$, в котором наименьший декремент λ меняет знак. Задача построения нижнего критического уровня заключалась в отыскании минимального собственного значения вещественной трехдиагональной матрицы. Величина минимального критического числа Рейнольдса R_* находилась затем линейной интерполяцией.

Собственные значения вещественной матрицы находились ортогональностепенным методом [5]. Вычисления проводились в приближении 30 базисных функций.

На фигурах *а*, *б* изображена кривая, разделяющая области устойчивости (нижняя) и неустойчивости (верхняя) стационарного движения для отношения радиусов сфер $a = 1.10$, 1.07. Вид этой кривой аналогичен кривой устойчивости течения жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (см., например, [6]).

Значения R_* для $\varepsilon = 0$ (вращается одна внутренняя сфера) совпадают с соответствующими значениями первых критических чисел Рейнольдса, вычисленных в работе [2].

Кривая устойчивости имеет асимптоту $\Omega_2 r_2^2 = \Omega_1 r_1^2$, т. е. стационарное движение (3) устойчиво при $\Omega_2 r_2^2 > \Omega_1 r_1^2$.

Поступило 22 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
2. Якушин В. И. О неустойчивости движения жидкости в тонком шаровом слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, вып. 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
4. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
5. Воеводин В. В. Некоторые методы решения полной проблемы собственных значений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
6. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.