ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ТОНКОМ СЛОЕ ВЯЗКОЙ ТЯЖЕЛОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ВОЛНОВОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ

В. Г. СОКОЛОВ

(Москва)

Описывается способ вычисления потока тепла через волнообразную границу, отделяющую слой жидкости от слоя газа, в предположении, что коэффициенты вязкости и теплопроводности постоянны и что заданы постоянная температура неподвижной стенки и постоянная температура газового потока.

Используются уравнения движения и теплопроводности (без учета энергии диссипации) в приближениях теории пограничного слоя, левые части которых заменены средними по слою выражениями. Из этих уравнений после линеаризации определяется распределение скоростей и температура.

Рассматривается качественная сторона теплопередачи в тонком слое вязкой жидкости при регулярно-волновом режиме течения. Основное внимание уделено влиянию коэффициента поверхностного натяжения на поток тепла через поверхность раздела.

Гидродинамика тонких слоев вязкой жидкости достаточно полно изучена в работах [1–3]. Известные же в настоящее время решения уравнения теплопроводности (диффузии) при регулярно-волновом режиме течения тонкого слоя вязкой жидкости нельзя считать удовлетворительными, применимыми при любом регулярно-волновом режиме течения. Так, решение уравнения диффузии, приведенное в работе [4], представляется довольно сложными, практически неприменимыми интегральными выражениями, а решение авторов работы [5], основанное на различных допущениях, приводит к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются на ЭВЦМ. Изложенное в работе [2] решение уравнения диффузии основано на модели бесконечно глубокого слоя и не учитывает воздействия газового потока на свободную поверхность жидкости.

Изложение ведется применительно к теплопередаче, но все рассуждения и выводы применимы и к массопередаче.

Обозначения: x, y — координаты жидкой частицы, t — время, v, u — координаты вектора скорости жидкости, p — давление в жидкости, c_v, $\varkappa$, T, ρ, ν — теплоемкость, коэффициент теплопроводности, температура, плотность и вязкость жидкости соответственно, g — ускорение силы тяжести, σ — коэффициент поверхностного натяжения, c — фазовая скорость волн на поверхности раздела, T_w — температура стенки, h_0 — средняя толщина жидкого слоя; u_0 — средняя по слою скорость жидкости.

Индексом $^\circ$ обозначены параметры, относящиеся к газу. Остальные обозначения в тексте.

1. Как и ряд авторов [1–3], будем предполагать, что явления, происходящие в тонком слое, описываются приближениями теории пограничного слоя. Тогда, если считать, что ось x направлена по неподвижной вертикальной плоскости, а ось y — перпендикулярно, и искать решение в виде бегущей волны, систему уравнений и граничные условия в безразмерных переменных можно представить так:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

$$(u-c)\frac{\partial u}{\partial z}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{F}\qquad\left(R=\frac{u_0h_0}{\nu},\ F=\frac{u_0^2}{gh_0}\right) \tag{1.2}$$

$$(u-c)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+v\frac{\partial\Theta}{\partial y}=a^2\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}\qquad\left(a^2=\frac{\varkappa}{c_v\rho u_0h_0}\right) \tag{1.3}$$

$$u(z,0)=v(z,0)=\Theta(z,0)=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}[z,h(z)]=\tau,\qquad \Theta[z,h(z)]=1\qquad\left(\tau=\frac{\tau^\circ h_0}{\rho\nu u_0}\right) \tag{1.5}$$

$$p[h(z)]=p'-N\frac{d^2h(z)}{dz^2}\qquad\left(p'=\frac{p^\circ}{\rho u_0^2},\ N=\frac{\sigma}{\rho u_0^2h_0}\right) \tag{1.6}$$

$$v[z,h(z)]=\{u[z,h(z)]-c\}\frac{dh}{dz}\qquad(z=x-ct) \tag{1.7}$$

Здесь τ и dp'/dz — постоянные, $y=h(z)$ — уравнение поверхности раздела.

Безразмерные величины (с черточками наверху) вводятся следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{h_0}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{c} = \frac{c}{u_0}$$

$$v = \frac{v}{u_0}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \quad \bar{t} = \frac{tu_0}{h_0}, \quad \Theta = \frac{T - T_w}{T^\circ - T_w}$$

Затем черточки опущены. Коэффициент вязкости ν и коэффициент теплопроводности $\varkappa$ предполагаются независимыми от температуры, что позволяет решать эти уравнения раздельно.

В действительности они не являются постоянными, но, когда имеются незначительные градиенты температур, такой подход оправдан и коэффициенты заменяются их средними значениями, например, при получении продуктов испарения. В этом случае на одну сторону неподвижной плоскости, с другой стороны которой поддерживается примерно равная по длине плоскости температура, подается тонкий слой жидкости. Свободная граница жидкого слоя «омывается» газовым потоком — потоком продуктов испарения.

Решить задачу (1.1)—(1.7) в таком виде довольно трудно, поэтому заменим левые части уравнений (1.2) и (1.3) выражениями

$$\frac{1}{h}\int_0^h \left[(u - c)\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right] dy, \quad \frac{1}{h}\int_0^h \left[(u - c)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + v\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right] dy \tag{1.8}$$

Такой метод для уравнения движения был впервые указан в работе [6] и с успехом применяется в теории смазки и в других случаях течения вязкой жидкости [7] при учете инерционных сил.

После замены, удовлетворяя граничным условиям (1.4), (1.5) и уравнению (1.1), найдем

$$u = w\left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2}\right) + \tau y \tag{1.9}$$

$$v = \left(\frac{y^3}{6h^2} - \frac{y^2}{2h}\right)\frac{dw}{dz} + \left(\frac{y^2}{2h^2} - \frac{y^3}{3h^3}\right) w\frac{dh}{dz} \tag{1.10}$$

$$\Theta = \frac{q}{2a^2}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h}\right) + \frac{y}{h} \tag{1.11}$$

где w и q есть функции только z и характеризуют средние по слою скорость и температуру жидкости соответственно.

Заменяя u и v в равенстве (1.7) выражениями (1.9), (1.10) и интегрируя, приходим к

$$wh = 3ch - 1.5\tau h^2 + 3s \tag{1.12}$$

Здесь s — постоянная интегрирования, связанная с выбором масштаба скорости u_0.

Подставим (1.6), (1.9)—(1.12) в уравнения (1.2) и (1.3), левые части которых заменены выражениями (1.8). После несложных преобразований получим

$$h^3\frac{d^3h}{dz^3} - h^2\frac{d}{dz}\left[\frac{\tau^2h^4 + 6c\tau h^3 + 24c^2h^2 + 6s\tau h^2 + 144s^2}{120hN}\right] + \frac{3\tau h^2 - 6ch - 6s}{2RN} - \frac{Mh^3}{RN} = 0, \quad M = R\left(\frac{dp'}{dz} - \frac{1}{F}\right) \tag{1.13}$$

$$h(\tau h^2 - 2ch - 42s)\frac{dq}{dz} + 2\left(\tau h^2\frac{dh}{dz} - ch\frac{dh}{dz} - 240a^2\right)q + 20a^2(3c + \tau h)\frac{dh}{dz}\cdot h = 0 \tag{1.14}$$

Величины dp'/dz и τ, входящие в (1.13) и (1.14), считаются постоянными и заданными, они известным образом [7, 8] связаны со средней скоростью течения газа.

2. Если бы можно было решить нелинейное третьего порядка обыкновенное дифференциальное уравнение (1.13), то, подставив найденное значение h в уравнение (1.14), получили бы для q линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.

Так как решить уравнение (1.13) в таком виде не удается, то будем искать приближенное решение. Предположим, что

$$h = 1 + \varphi(z)$$

Здесь φ — малое отклонение поверхности раздела от некоторого среднего положения. Пренебрегая φ^2, $\varphi\varphi'$ и членами более высокого порядка малости и требуя, чтобы решение линеаризированного уравнения было периодическим, получаем равенства

$$6s + 4c - \tau = 0, \qquad 3(\tau - 2s - 2c) - 2M = 0$$
$$k^2 = (48s^2 - \tau^2 - 4c\tau - 8c^2 - 2\tau s) / 40N \tag{2.1}$$

Тогда уравнение поверхности раздела можно представить в виде

$$h = 1 + \alpha \sin kz \tag{2.2}$$

При нахождении (2.1) и (2.2) касательное напряжение на границе раздела и перепад давления в газе принимались не зависящими от z, т. е. поток газа обтекал волнообразную поверхность без срыва. Предполагается, что граница раздела такой формы уже образовалась, и не изучается при каких соотношениях между характеристиками движения жидкости и газа это возможно. Эта задача, связанная с вопросами устойчивости двухфазных потоков, представляется важной и требует своего решения. Так же может быть учтена зависимость dp' / dz и τ от координаты z, когда течение газа будет подобно течению жидкости в шероховатых каналах — режим, так называемой развитой шероховатости [8].

Определим постоянную интегрирования s. Если предположить, что за масштаб скорости u_0 выбрана средняя по толщине h и длине волны $l = 2\pi / k$ скорость течения жидкости, то в безразмерных величинах будем иметь

$$\frac{1}{l}\int_0^l \left[\frac{1}{h}\int_0^h u\,dy\right] dz = 1$$

После линеаризации и интегрирования найдем

$$s = 1 - c \tag{2.3}$$

Равенства (2.1) с учетом (2.3) упростятся

$$c = 3 - 0.5\tau, \qquad 2M - 3\tau + 6 = 0, \qquad k^2 = {}^1/_4(\tau^2 - 8\tau + 12) / N \tag{2.4}$$

Линеаризация нелинейного уравнения (1.13) приводит к тому, что остаются неопределенными амплитуда волны α и либо средняя толщина жидкого слоя h_0, либо средняя скорость течения жидкости u_0. Кроме того, вычисления показывают, что вторая производная u по y не зависит от z

$$\partial^2 u / \partial y^2 = 1.5(\tau - 2)$$

Это выражение, полученное дифференцированием (1.9) с использованием (2.3), (2.4), и показывает, что профиль скорости u выпуклостью направлен в сторону движения жидкости, если

$$\tau < 2 \tag{2.5}$$

Оставляя в стороне более детальный анализ вопросов гидродинамики пленочного течения, который для случая отсутствия воздействия газового потока на жидкий слой можно найти в работах [1, 2], перейдем к качественному рассмотрению вопросов теплопередачи.

Подставляя h, s и c согласно (2.2), (2.3) и (2.4) в (1.14), получаем уравнение для $q(z)$

$$[(78 - 19\tau) + \alpha(72 - 16\tau)\sin kz]\frac{dq}{dz} - [480a^2 + \alpha(6 - 3\tau)k\cos kz]\,q =$$
$$= 10a^2(\tau - 18)\alpha k \cos kz \tag{2.6}$$

решение которого с точностью до малых второго порядка есть

$$q = A\alpha(n_1 \cos kz + n_2 \sin kz), \qquad n_1 = 480a^2\Delta^{-1}, \qquad n_2 = (19\tau - 78)k\Delta^{-1}$$
$$A = 10k(18 - \tau)a^2\Delta^{-1}, \qquad \Delta = \sqrt{480^2a^4 + k^2(78 - 19\tau)^2} \tag{2.7}$$

Формулы (1.11) и (2.7) позволяют вычислить градиент температуры на границе раздела

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)_{y=h} = \frac{1}{h}\left[1 + \frac{A\alpha}{2a^2}(n_1 \cos kz + n_2 \sin kz)\right], \qquad \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)_{y=h} = -\frac{k\alpha \cos kz}{h} \tag{2.8}$$

Суммарный безразмерный поток тепла через волнообразную границу раздела вычислим следующим образом:

$$I = \int \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)_{y=h} dz - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)_{y=h} dy$$

интегрирование ведется по кривой

$$y = h = 1 + \alpha \sin kz$$

Вычисляя теплопоток I, сохраним, как это принято в теории волн при вычислении кинетической энергии, члены, содержащие амплитуду во второй степени. Разобьем поток I на два: поток через гребень волны $I^{(1)}$ (интегрирование от 0 до π / k) и поток через впадину $I^{(2)}$ (интегрирование от π / k до $2\pi / k$). Вычисления дают

$$I^{(1)} = \frac{2}{k\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + \frac{An_2}{ka^2} \left[\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$I^{(2)} = \frac{2}{k\sqrt{1-\alpha^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) - \frac{An_2}{ka^2} \left[\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\pi}{2} \right] \tag{2.9}$$

Общий поток будет

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\pi A n_2}{ka^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - 1 \right) \tag{2.10}$$

В выражении (2.10) положим $\alpha = 0$. Полученную при этом величину потока тепла, которую естественно принять за теплопоток при безволновом режиме течения, обозначим через $I^{(0)}$. Тогда суммарный безразмерный поток тепла с учетом значений n_2 и A может быть представлен в виде

$$I = I^{(0)} \left\{ 1 + \left[0.5 + 2.5 \left(\frac{480^2 a^4}{(78-19\tau)(18-\tau)k^2} + \frac{78-19\tau}{18-\tau} \right)^{-1} \right] \alpha^2 \right\} \tag{2.11}$$

Прежде всего из этой формулы видно, что поток тепла при регулярно-волновом режиме увеличивается по сравнению с потоком тепла при безволновом режиме течения. Этот факт известен из работ [1, 2, 9], но получен авторами другим путем.

Таким образом, метод замены левой части уравнения теплопроводности средним по слою выражением приводит к известному как в теории, так и на практике результату. Следовательно, есть основания предполагать, что основанное на этом методе решение правильно отражает качественную сторону процесса теплопередачи в тонком слое вязкой жидкости. В то же время полученное здесь выражение для теплопотока показывает в отличие от упомянутых выше работ, от каких параметров течения зависит увеличение или уменьшение потока тепла.

Остановимся на влиянии коэффициента поверхностного натяжения σ. Как известно, увеличение коэффициента поверхностного натяжения уменьшает волны на поверхности жидкости [2]. Если учесть, что величина k, входящая в (2.11), обратно пропорциональна σ, то увеличение σ уменьшает и теплопоток через волнообразную поверхность раздела.

Используя формулы (2.7) и (2.8), найдем модуль градиента температуры на поверхности раздела

$$|(\operatorname{grad} \Theta)_{y=h}| = \frac{1}{h} \left[1 + \frac{A\alpha}{2a^2} \sin(kz + \beta) \right] \quad (\cos\beta = n_2, \ \sin\beta = n_1) \tag{2.12}$$

Из условия (2.5) и формулы (2.7) следует, что

$$\cos\beta \leqslant 0, \qquad \sin\beta \geqslant 0, \qquad {}^1/_2\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$$

Выражение для $\cos\beta$ может быть преобразовано к виду

$$\cos\beta = n_2 = -[1 + 480^2 a^4 / (78 - 19\tau)^2 k^2]^{-1/2}$$

Отсюда получаем, что чем меньше σ, тем β ближе к π. Значение β естественно принять, как это следует из (2.12), за сдвиг фаз между волнообразной поверхностью раздела $h = 1 + \alpha \sin kz$ и модулем градиента температуры на этой поверхности. Как показано, сдвиг фаз больше $^1/_2\pi$ и приближается к π с уменьшением σ. Следовательно, градиент температуры больше во впадинах поверхности раздела и меньше на гребнях, и с увеличением σ это расхождение уменьшается.

В работе по существу рассматривался случай течения жидкости и газа вертикально вниз в одном направлении. Но, очевидно, все рассуждения о теплообмене будут справедливы и тогда, когда жидкость и газ текут вниз по наклонной плоскости, одновременно движутся вверх, или движутся в разных направлениях, лишь бы существовал регулярно-волновой режим течения пленки жидкости.

В заключение отметим, что подобным способом можно изучить теплообмен в тонком слое жидкости при регулярно-волновом режиме течения с учетом энергии диссипации, теплообмен при других граничных условиях, а также задачи массообмена.

Поступило 23 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1.
2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика, Изд 2. М., Физматгиз, 1959.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
4. Ruckenstein E., Berbente C. Mass transfer in wave flow. Chem. Engng. Sci., 1965, vol. 20, No. 9.
5. Холпанов Л. П. Шкадов В. Я., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М. О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании. Теор. основы хим. технолог., 1967, т. 1, № 1.
6. Слезкин Н. А., Тарг С. М. Обобщение уравнения Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1946, № 54.
7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
9. Капица П. Л. Теплопроводность и диффузия в жидкой среде при периодическом течении. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 9.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ РАЗБРЫЗГИВАЕМОЙ ВОДЫ НА КИНЕТИКУ РАСПАДА СТРУИ

В. Ю. НЕЗГАДА

(*Каунас*)

Исследуется влияние температуры разбрызгиваемой жидкости, а также некоторых конструктивных факторов форсунки на распад жидкой струи.

Описываются основные факторы, влияющие на распад струи при разбрызгивании жидкости форсунками. Анализируется изменение числа Рейнольдса в зависимости от диаметра форсунки при истечении жидкости из отверстий при различной ее начальной температуре, описывается принцип действия экспериментальной установки.

Также анализируется время распада струи, даются зависимости времени распада струи от начальной температуры разбрызгиваемой воды $T = T(t)$ при различном диаметре форсунки. Описывается и дается зависимость длины сплошной части струи от диаметра форсунки (при разбрызгивании горячей и перегретой воды). Анализируются зависимости изменения длины сплошной части струи от диаметра форсунки при различной начальной температуре разбрызгиваемой воды в диапазоне низких давлений (1—5 *ати*), даются зависимости длины сплошной части струи, а также разницы температуры струи у выхода из форсунки и на расстоянии (в точке) ее начального распада в зависимости от начальной температуры разбрызгиваемой жидкости (температуры перед форсункой).

Установлено, что при повышении температуры разбрызгиваемой воды длина сплошной части струи во всех случаях уменьшается. Однако максимальное ее значение при разбрызгивании холодной и горячей воды (15—100° С) достигается при диаметре форсунки 1.5—1.7 *мм*. При разбрызгивании перегретой воды ($t > 100°$ С), максимальное значение сплошной части струи достигается при диаметре форсунки 0.8—1.2 *мм*. Подобрана формула для математического выражения $l = l(d)$ при различной температуре разбрызгиваемой воды.