

РАЗВИТИЕ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. ФЕДОСЕНКО, Л. В. ЧЕРКЕСОВ

(Севастополь)

Рассматривается пространственная задача о неустановившихся волнах, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела двух жидкостей различной плотности при движении источника.

Аналогичные задачи для установившихся волн в двухслойной жидкости рассмотрены в работах [1-6], для неустановившихся волн в однородной жидкости — в работах [7, 8].

1. Пусть невозмущенный поток жидкости, текущей в положительном направлении оси x с постоянной скоростью u , состоит из двух слоев: нижний слой жидкости имеет плотность ρ_2 и занимает полупространство $z < 0$, верхний слой жидкости имеет плотность ρ_1 ($\rho_1 < \rho_2$) и глубину h . Начиная с момента времени $t = 0$, в нижнем слое жидкости на расстоянии h_2 от поверхности раздела включается источник обильности Q . Поставим своей задачей исследовать вид волн, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела в любой момент времени $t > 0$, считая, что при $t = 0$ поток невозмущен.

Предполагая движение жидкости безвихревым, потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей запишем так:

$$\Phi_1 = ux + \varphi_1(x, y, z, t), \quad \Phi_2 = ux + \varphi_2(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы скоростей возмущенного движения.

Представляя функцию $\varphi_2(x, y, z, t)$ в виде

$$\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_u \quad \left(\varphi_u = \frac{Q}{4\pi} [x^2 + y^2 + (z + h_2)^2]^{-1/2} \right)$$

получаем для определения φ_1 и φ_3 два уравнения

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (0 < z < h), \quad \Delta\varphi_3 = 0 \quad (z < 0) \quad (1.2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi_1 = 0 \quad \text{при } z = h_1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) (\varphi_2 - \gamma \varphi_1) = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \quad \text{при } z = 0, \quad \varphi_2(x, y, -\infty, t) = 0 \quad \left(\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.4)$$

где ζ_1 и ζ_2 — возвышения свободной поверхности и поверхности раздела, определяющиеся формулами

$$\zeta_1 = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_1 \quad \text{при } z = h$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{g\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) (\varphi_2 - \gamma \varphi_1) \quad \text{при } z = 0 \quad (\varepsilon = 1 - \gamma)$$

Граничные условия (1.3) и начальные условия (1.4) означают, что при $t = 0$ свободная поверхность и поверхность раздела горизонтальны, возмущенные скорости отсутствуют, а рассматриваемый возмущающий источник с постоянным дебитом «включается» в момент времени, следующий за начальным, при условии, что в начальный момент ($t = 0$) поток невозмущен.

Применяя для решения задачи (1.2) — (1.4) преобразование Фурье по переменным x и y , получаем окончательно такие (точные в линейной постановке) выражения вида свободной поверхности и поверхности раздела

$$\zeta_s = \zeta_{s1} + \zeta_{s2}, \quad \zeta_{sk} = \frac{1}{8\pi^2} q \operatorname{Im} I_{sk} \quad (s = 1, 2; k = 1, 2) \quad (1.5)$$

$$I_{s1} = \int_0^\infty \sqrt{r} E_s P(r) dr, \quad I_{s2} = - \int_0^\infty \sqrt{r} G_s L(r) dr \quad (1.6)$$

$$P(r) = \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} f_1(\theta) (1 - e^{-ik_1 t}) e^{irR \cos(\theta - \omega)} d\theta \quad \left(R = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{h} \right) \quad (1.7)$$

$$L(r) = \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} f_2(\theta) (1 - e^{-ik_2 t}) e^{irR \cos(\theta - \omega)} d\theta \quad \left(t = \frac{ut'}{h} \right) \quad (1.8)$$

$$f_1 = \frac{r\kappa^2 \cos^2 \theta + 1}{\kappa \sqrt{r} \cos \theta - 1}, \quad f_2 = \frac{r\kappa^2 \cos^2 \theta + \varepsilon d_2^2}{\xi \sqrt{r} \cos \theta - d_2} \quad (1.9)$$

$$E_1 = G_1 = \frac{e^{-r(h_1-1)}}{d_1 \operatorname{ch} r}, \quad E_2 = e^{-r} E_1, \quad G_2 = -\frac{\gamma}{\varepsilon} e^r G_1$$

$$k_1 = r \cos \theta - \kappa^{-1} \sqrt{r}, \quad k_2 = r \cos \theta - \xi^{-1} \sqrt{r} d_2, \quad \kappa = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad \xi = \frac{u}{\sqrt{gh\varepsilon}}$$

$$d_1 = (2\gamma - 1) \operatorname{th} r + 1, \quad d_2 = \left(\frac{\operatorname{th} r}{1 + \gamma \operatorname{th} r} \right)^{1/2}, \quad q = \frac{Q}{h \sqrt{gh}}$$

$$h_1 = \frac{h + h_2}{h}$$

Здесь R и t — безразмерные, ω — полярный угол в плоскости xy .

Так как выражение (1.5) представляет собой точное решение поставленной задачи (1.2) — (1.4), то это решение, следовательно, учитывает те ударные давления и вызываемые ими скорости, которые возникают вследствие того, что источник начинает сразу свое действие с постоянным дебитом в первоначально невозмущенном потоке. Проведем исследование выражений (1.7), (1.8) для больших значений R .

Сравнивая интеграл (1.7) с интегралом (2.4) работы [7], видим, что эти интегралы идентичны. Интеграл же (1.8) идентичен интегралу (1.4) работы [8]. Поэтому, не приводя исследование интегралов (1.7), (1.8), которые вычисляются точно так же, как это было сделано в работах [7, 8], приводим окончательный результат

$$\zeta_s = \zeta_{s1} + \zeta_{s2}, \quad \zeta_{sk} = \frac{q}{8\pi^2} \operatorname{Im} I_{sk} \quad (s = 1, 2; k = 1, 2) \quad (1.10)$$

$$I_{s1} = 2\pi i \int_{Q_1}^{\infty} \xi_s(r) \exp[iR\kappa^{-1}N_1(r)] dr + O(R^{-1}) \quad (v > \cos \omega > 0)$$

$$I_{s2} = -2\pi i \int_{Q_2}^{\infty} \eta_s(r) \exp[iR\xi^{-1}N_2(r)] dr + O(R^{-1}) \quad (v > \cos \omega > 0) \quad (1.11)$$

$$\xi_1(r) = \frac{2\sqrt{r}e^{-r(h_1-1)}}{d_1 \operatorname{ch} r \sqrt{r\kappa^2 - 1}}, \quad \eta_1(r) = \frac{2\varepsilon \sqrt{r} d_2 e^{-r(h_1-1)}}{d_1 d_3 \operatorname{ch} r} \quad (1.12)$$

$$\xi_2(r) = e^{-r} \xi_1, \quad \eta_2(r) = -\frac{\gamma}{\theta} e^r \eta_1, \quad d_3 = \left(\xi^2 \frac{r(1 + \gamma \operatorname{th} r)}{\operatorname{th} r} - 1 \right)^{1/2} \quad (1.13)$$

$$N_1 = \sqrt{r} \cos \omega - \sqrt{\kappa^2 r^2 - r} \sin \omega, \quad v = tR^{-1} \quad (1.14)$$

$$N_2 = \sqrt{r} d_2 \cos \omega - \sqrt{\xi^2 r^2 - r d_2^2} \sin \omega, \quad Q_1 = \kappa^{-2} \left[1 + \frac{\sin^2 \omega}{(v - \cos \omega)^2} \right]$$

Здесь Q_2 — положительный корень уравнения

$$v = \cos \omega + d_3^{-1} \sin \omega \quad (1.15)$$

причем $r \geq r_0$, где $r_0 = 0$ при $\xi \geq 1$, а при $\xi < 1$ r_0 — единственный положительный корень уравнения

$$\frac{\xi^2 r(1 + \gamma \operatorname{th} r)}{\operatorname{th} r} - 1 = 0$$

Исследование интегралов (1.10), (1.11) для больших значений R проведем методом стационарных фаз. Для этого проанализируем корни уравнений $N_1' = 0$, $N_2' = 0$.

Уравнение $N_1'(r) = 0$ имеет два вещественных корня

$$r_{1,2} = \frac{\kappa^{-2}}{8 \sin^2 \omega} [4 \sin^2 \omega + \cos^2 \omega \mp \cos \omega \sqrt{1 - 9 \sin^2 \omega}] \quad (1.16)$$

для $0 < \omega < 19^\circ 28'$, а для $\omega = 19^\circ 28'$ ($\sin \omega = 1/3$) один кратный корень $r_3 = 3/2 \kappa^{-2}$. Для $\omega > 19^\circ 28'$ уравнение $N_1'(r) = 0$ вещественных корней не имеет.

Так как нижний предел Q_1 интеграла (1.10) зависит от v , то очевидно, что этот интеграл будет содержать вклад от стационарной точки r_k ($k = 1, 2$) только при выполнении условий $r_k > Q_1$, $0 < \omega < 19^\circ 28'$, которые в силу

(1.14), (1.16) равносильны следующим условиям:

$$R < v_k(\omega)t, 0 < \omega < 19^\circ 28', v_{1,2}(\omega) = 1/4(3 \cos \omega \mp \sqrt{1 - 9 \sin^2 \omega}) \quad (1.17)$$

Стационарные точки интеграла (1.11) представляют собой корни уравнения $N_2' = 0$, которое можно представить в виде

$$\operatorname{tg} \omega = \psi(r). \quad (1.18)$$

$$\psi(r) = \frac{\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r}{2r\xi^2(1 + \gamma \operatorname{th} r)^2 - [\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r]} \times \\ \times \left(\xi^2 \frac{r(1 + \gamma \operatorname{th} r)}{\operatorname{th} r} - 1 \right)^{1/2}$$

Анализ функции $\psi(r)$ показывает, что при $\xi \geq 1$ она монотонно убывает с ростом r ($r \geq 0$), стремясь к нулю при $r \rightarrow \infty$ и имея при $r = 0$ наибольшее значение, равное

$$\psi(0) = (\xi^2 - 1)^{-1/2} \quad (\xi > 1), \quad \psi(0) = +\infty \quad (\xi = 1) \quad (1.19)$$

Поэтому уравнение (1.18) при $\xi = 1$ имеет один положительный корень для любых $0 \leq \omega \leq 1/2\pi$, а при $\xi > 1$ имеет один положительный корень для $\omega < \omega_1$ и не имеет корней для $\omega > \omega_1 < 1/2\pi$, причем $\lg \omega_1 = (\xi^2 - 1)^{-1/2}$. Обозначим этот корень через r_4 ($r_4 = r_4(\omega, \xi)$).

Заметим, что при изменении ω от ω_1 до нуля (при фиксированном ξ) r_4 непрерывно возрастает от нуля до бесконечности.

Так как нижний предел Q_2 интеграла (1.11) зависит от v , то очевидно, что этот интеграл будет иметь порядок $R^{-1/2}$, когда стационарная точка $r = r_4$, при выполнении условия $\omega \leq \omega_1$, лежит на пути интегрирования, т. е. когда $r_4 > Q_2$. В остальных случаях, т. е. при $r_4 < Q_2$ и $\omega \leq \omega_1$ или при $\omega > \omega_1$, интеграл (1.11) будет иметь порядок не ниже R^{-1} .

Условие $r_4 > Q_2$, как следует из (1.15) и (1.18), можно записать в виде

$$R < v_4(\xi, \omega, r_4)t \quad (1.20)$$

$$v_4(r) = \left\{ 1 - \frac{[\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r][3 \operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) - r \operatorname{ch}^{-2} r]}{4\xi^2 r \operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r)^3} \right\}^{1/2}$$

Анализ функции $\psi(r)$ при $\xi < 1$ показывает, что она обращается в нуль при $r = r_0 > 0$ и $r = \infty$ и имеет единственный максимум при $r = r_7$, где r_7 является корнем уравнения $\psi'(r) = 0$. В области $r_0 \leq r < r_7$ $\psi(r)$ монотонно возрастает, а при $r > r_7$ монотонно убывает с ростом r . Отсюда получаем, что уравнение (1.18) при $\omega > \omega_2 = \arctg \psi(r_7)$ не имеет вещественных корней, при $\omega = \omega_2$ имеет кратный корень r_7 , а при $\omega < \omega_2$ имеет два различных вещественных корня, один из которых ($r = r_5$) с убыванием ω убывает, а второй ($r = r_6$) с убыванием ω возрастает ($r_5 < r_7 < r_6$).

Так как нижний предел Q_2 интеграла (1.11) зависит от v , то этот интеграл будет содержать вклад от стационарной точки r_k ($k = 5, 6$) только при выполнении условий $r_k > Q_2$, $0 < \omega < \omega_2$.

Эти условия в силу (1.15) и (1.18) равносильны следующим:

$$R < v_k(\xi, \omega, r_k)t, \quad 0 < \omega < \omega_2 \quad (k = 5, 6)$$

где v_k дается формулой (1.20) с заменой индекса 4 на индекс k .

Учитывая все сказанное выше, получаем такие выражения для вида свободной поверхности и поверхности раздела

$$1) \quad u \geq \sqrt{gh\varepsilon} \quad (\xi \geq 1), \quad \zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{12}, \quad \zeta_2 = \zeta_{21} + \zeta_{22} \quad (1.21)$$

$$\zeta_{s1} = \begin{cases} \eta_{s1} + \eta_{s2}, & 0 < \omega < 19^\circ 28' \\ \eta_{s3}, & \omega = 19^\circ 28' \\ O(R^{-1}), & \omega > 19^\circ 28' \end{cases} \quad (1.22)$$

$$\zeta_{s2} = \begin{cases} \mu_s, & 0 < \omega \leq \omega_1 \\ O(R^{-1}), & \omega > \omega_1 \end{cases} \quad (1.23)$$

$$2) \quad u < \sqrt{gh\varepsilon} \quad (\xi < 1), \quad \zeta_1 + \zeta_{11} + \zeta_{12}, \quad \zeta_2 = \zeta_{21} + \zeta_{22} \quad (1.24)$$

Значения ζ_{s1} те же, что и в случае $\xi \geq 1$

$$\zeta_{s2} = \begin{cases} \xi_{s1} + \xi_{s2}, & 0 < \omega < \omega_2 \\ \xi_{s3}, & \omega = \omega_2 \\ O(R^{-1}), & \omega > \omega_2 \end{cases} \quad (1.25)$$

где

$$\eta_{11,12} = \begin{cases} R^{-1/2} B_{1,2} \cos[R\kappa^{-1} N_1(r_{1,2}) \pm 1/4\pi] & (R < v_{1,2}t) \\ O(R^{-1}) & (R > v_{1,2}t) \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\eta_{13} = \begin{cases} R^{-1/2} B_3 \cos[1/2 \sqrt{3} R\kappa^{-2}] & (R < 1/2 \sqrt{2}t) \\ O(R^{-1/2}) & (R > 1/2 \sqrt{2}t) \end{cases} \quad (1.27)$$

$$\mu_1 = \begin{cases} R^{-1/2} B_4 \cos[R\xi^{-1} N_2(r_4) - 1/4\pi] & (R < v_4 t) \\ O(R^{-1}) & (R > v_4 t) \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\xi_{11,12} = \begin{cases} R^{-1/2} B_{5,6} \cos[R\xi^{-1} N_2(r_{5,6}) \pm 1/4\pi] & (R < v_{5,6}t) \\ O(R^{-1}) & (R > v_{5,6}t) \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\xi_{13} = \begin{cases} R^{-1/2} B_7 \cos[R\xi^{-1} N_2(r_7)] & (R < v_7 t) \\ O(R^{-1/2}) & (R > v_7 t) \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\eta_{21} = e^{-\tau_1} \eta_{11}, \quad \eta_{22} = e^{-\tau_2} \eta_{12}, \quad \eta_{23} = \exp(-3/2 \kappa^{-2}) \eta_{13}, \quad \mu_2 = -(\gamma/\varepsilon) e^{\tau_1} \mu_1 \quad (1.31)$$

$$\xi_{21} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} e^{\tau_1} \xi_{11}, \quad \xi_{22} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} e^{\tau_2} \xi_{12}, \quad \xi_{23} = -\frac{\gamma}{\varepsilon} e^{\tau_1} \xi_{13}$$

$$B_{1,2} = \frac{q}{2\sqrt{2}\pi} \left[\left(\frac{\kappa}{|N_1''|} \right)^{1/2} \xi_1 \right]_{r_{1,2}}, \quad B_3 = \frac{q\Gamma(1/3)3^{-1/2}6^{1/3}}{2\sqrt{2}\pi} \left[\left(\frac{\kappa}{|N_1''|} \right)^{1/2} \xi_1 \right]_{r_3}$$

$$B_k = -\frac{q}{2\sqrt{2}\pi} \left[\left(\frac{\xi}{|N_2''|} \right)^{1/2} \eta_1 \right]_{r_k} \quad (k=4, 5, 6) \quad (1.32)$$

$$B_7 = -\frac{q\Gamma(1/3)3^{-1/2}6^{1/3}}{2\sqrt{2}\pi} \left[\left(\frac{\xi}{|N_2''|} \right)^{1/2} \right]_{r_7}$$

$$v_{1,2} = 1/4(3\cos \omega \pm \sqrt{1 - 9\sin^2 \omega}), \quad v_k = v(r_k) \quad (k=4, 5, 6, 7) \quad (1.33)$$

$$v(r) = \left\{ 1 - \frac{[\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r][3 \operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) - r \operatorname{ch}^{-2} r]}{4\xi^2 r \operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r)^3} \right\}^{1/2} \quad (1.34)$$

$$\omega_1 = \arctg(\xi^2 - 1)^{-1/2}, \quad \omega_2 = \arctg \psi(r) \quad (1.35)$$

$$\psi(r) = \frac{\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r}{2r\xi^2(1 + \gamma \operatorname{th} r)^2 - [\operatorname{th} r(1 + \gamma \operatorname{th} r) + r \operatorname{ch}^{-2} r]} \times \\ \times \left(\xi^2 \frac{r(1 + \gamma \operatorname{th} r)}{\operatorname{th} r} - 1 \right)^{1/2}$$

$$r_{1,2} = \frac{\kappa^{-2}}{8 \sin^2 \omega} [4 \sin^2 \omega + \cos^2 \omega \mp \cos \sqrt{1 - 9 \sin^2 \omega}], \quad r_3 = \frac{3}{\gamma} \kappa^{-2} \quad (1.36)$$

Значение r_4 — единственный положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \omega = \psi(r) \quad (1.37)$$

при $\xi \geq 1$; значения $r_{5,6}$ ($0 < r_5 < r_6$) — корни уравнения (1.37) при $\xi < 1$; значение r_7 ($r_5 < r_7 < r_6$) — единственный положительный корень уравнения $\psi'(r) = 0$ при $\xi < 1$ (кратный корень уравнения (1.37)).

Заметим, что в формулах (1.21) — (1.26) и в дальнейшем, если это специально не оговорено, t , R , v_k — безразмерные, равные соответственно $u h^{-1} t$, $R h^{-1}$, $u^{-1} v_k$.

Так как при $\omega = \omega_3 = 19^\circ 28' N_1'$ и N_1'' обращаются в нуль (кратная стационарная точка), а в малой окрестности $\omega_3 > \omega > \omega_3 - \varepsilon_1$ N_1'' будет мало, то верхняя формула выражения (1.22) имеет место для больших значений R в области $0 < \omega < \omega_3 - \varepsilon_1$, где ε_1 — малое положительное число, такое, что $R/N_1''(\omega_3 - \varepsilon_1) \gg 1$. Последняя формула выражения (1.22) имеет место для больших R и $\omega > \omega_3 + \varepsilon_2$ (в этой области нет стационарных точек), где ε_2 — малое положительное число такое, что $R/N_1'(r_3, \omega_3 + \varepsilon_2) \gg 1$, а r_3 дается формулой (1.36). Аналогично уточняются границы применимости формул (1.23) и (1.25) соответственно в окрестности $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$.

2. Формулы (1.21), (1.24) показывают, что волновые следы на свободной поверхности и на поверхности раздела, образующиеся при прямолинейном движении источника, представляют собой по две системы корабельных волн ζ_{s1} и ζ_{s2} . Система волн ζ_{s1} образуется внутри угла $|\omega| < 19^\circ 28'$ и состоит из поперечных волн η_{s1} и продольных волн η_{s2} , причем скорость переднего фронта продольных волн больше скорости переднего фронта поперечных волн ($v_1 < v_2$). Амплитуды волн ζ_{s1} весьма мало зависят от относительной разности плотностей ε , т. е. волны ζ_{s1} фактически будут такими же, как и в случае однослойной бесконечно глубокой жидкости. Эти волны довольно хорошо исследованы, например, в [1].

Волны ζ_{s2} образовались исключительно благодаря наличию верхнего слоя жидкости другой плотности. Как видно из формул (1.18), (1.20), (1.26), волны ζ_{12} , образующиеся на свободной поверхности, имеют во много раз меньшую амплитуду, чем соответствующие им волны ζ_{22} , образующиеся на поверхности раздела. В остальном они одинаковы.

Остановимся более подробно на анализе внутренних волн ζ_{22} . Система волн ζ_{22} существенно зависит от отношения величин u и $\sqrt{gh\varepsilon}$. В случае $u \geq \sqrt{gh\varepsilon}$ выражение ζ_{22} представляет собой одну систему продольных

волн μ_2 , сосредоточенных внутри угла $|\omega| \leq \omega_1$ слева от кривой $R = v_4 t$. Так как в общем случае найти выражение r_4 как функцию от ω и ξ из уравнения (1.37) не представляется возможным, то для определения вида переднего фронта волнового следа $R = v_4 t$ были проведены численные расчеты для ряда конкретных значений ξ .

В табл. 1 приведены значения $v_4(\omega, \xi)$ для $\xi = 1.01, 1.3, 1.8$, вычисленные по формуле (1.34). Эти расчеты дают представление о процессе развития внутренних волн μ_2 . Отсюда, в частности, видно, что расстояние переднего фронта от начала координат монотонно убывает с ростом ω (для фиксированного ξ) и значения v_4 будут тем меньше, чем меньше ξ , а v_4 при $\omega = 0$ равно единице независимо от ξ . В табл. 2 приведены значения предельного угла ω_1 для различных значений ξ , рассчитанные по формуле (1.35).

Таблица 1

ω	$\xi = 1.01$	1.3	1.8	ω	$\xi = 1.01$	1.3	1.8
81°56'	0.1404	—	—	24°34'	0.7867	0.8211	0.8795
65°32'	0.3557	—	—	12°17'	0.9281	9.9302	0.9452
50°17'	0.4811	0.6357	—	4°05'	0.9921	0.9930	0.9941
33°45'	0.6770	0.7501	0.8314	0	1	1	1

Таблица 2

ξ	ω_1	ξ	ω_2	ξ	ω_1	ξ	ω_2
1	90°	1	90°	3.00	19°28'	0.82	37°21'
1.005	84°	0.9983	84°43'	4.00	14°28'	0.7	27°03'
1.01	81°56'	0.9972	82°35'	5.00	11°32'	0.6	22°09'
1.039	75°	0.99	76°04'	10.00	5°44'	0.55	20°44'
1.175	60°	0.9803	70°35'	20.00	2°52'	0.4739	19°43'
1.3	50°17'	0.9378	56°32'	141.00	0°24'	0.40	19°28'
1.414	45°	0.9	48°39'	0.9	0	0	19°28'
2.00	30°	0.853	41°24'				

В случае, когда $u < \sqrt{gh\epsilon}$, система волн ξ_{22} образуется внутри угла $|\omega| \leq \omega_2$ и состоит из поперечных волн ξ_{21} , сосредоточенных слева от кривой $R = v_5 t$, и продольных волн ξ_{22} , сосредоточенных слева от кривой $R = v_6 t$. Область, заключенная между этими кривыми, покрыта только продольными волнами, т. е. скорость переднего фронта продольных волн больше скорости переднего фронта поперечных волн ($v_5 < v_6$). Так как в общем случае найти r_5 и r_6 как функции от ω и ξ из уравнения (1.37) не удастся, то для определения вида переднего фронта продольных и поперечных волн были проведены численные расчеты для ряда конкретных значений ξ . Результаты расчетов для $\xi = 0.9983, 0.9803, 0.9$ приведены в табл. 3.

Отсюда видно, что расстояние до переднего фронта продольных волн от начала координат монотонно возрастает с убыванием ω от ω_2 до 0 и значение v_6 при $\omega = 0$ равно единице независимо от ξ . Расстояние от начала координат до переднего фронта поперечных волн монотонно убывает и при $\omega = 0$ тем меньше, чем больше значение ξ .

Здесь не приводим кривых $R = v_k t$ ($k = 4, 5, 6$), которые легко строятся по приведенным в табл. 1 и 3 значениям v_k . Заметим только, что они аналогичны кривым $R = b_k t$ ($k = 1, 2, 3$), приведенным в работе [8].

Таблица 3

ξ	0.9983		0.9803		0.9	
	v_5	v_6	v_5	v_6	v_5	v_6
84°13'	0.0335	0.0335	—	—	—	—
75°47'	0.0072	0.1587	—	—	—	—
70°35'	0.0051	0.2202	0.1162	0.1162	—	—
58°57'	0.0033	0.3627	0.0419	0.3289	—	—
48°39'	0.0025	0.4812	0.0311	0.4716	0.2752	0.2752
33°41'	0.0020	0.6728	0.0241	0.6642	0.1311	0.6224
21°03'	0.0019	0.8264	0.0213	0.8212	0.1117	0.8021
12°37'	0.0018	0.9241	0.0202	0.9221	0.1052	0.9201
4°12'	0.0017	0.9918	0.0199	0.9899	0.1018	0.9880
0	0.0017	1	0.0197	1	0.1014	1

Численные расчеты показали, что при изменении ε от 10^{-3} до $2 \cdot 10^{-2}$ (наиболее реальный диапазон изменения относительной разности плотностей в условиях моря) и фиксированном ξ , величины $\omega_1, 2, v_k$ практически остаются постоянными: относительная разность между максимальными и минимальными значениями этих величин составляет меньше 0.5%.

Так как зависимость амплитуд волн от исходных параметров задачи очень сложна, то для выяснения влияния глубины погружения и скорости движения источника на амплитуды внутренних волн были проведены численные расчеты для ряда конкретных значений h, h_2, ε и u . Напомним, что h_2 — расстояние от поверхности раздела до источника.

Численные расчеты для

$$h = 25, 50, 75, 100 \text{ м}, \quad \delta = h_2/h = 0.5, 1, 2, \dots, 7$$

$$u = 10, 15, 20 \text{ м/сек}, \quad \varepsilon = 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}$$

показали, что максимальное значение амплитуды внутренних волн уменьшается при увеличении одного из параметров u, δ, ε в указанном диапазоне и фиксированных остальных. Максимальное значение амплитуды внутренних волн увеличивается при увеличении h и фиксированных u, ε, δ .

Пусть A_0 — максимальное значение амплитуды внутренних волн при $\delta = 0.5$, а A_n — максимальное значение амплитуды внутренних волн при $\delta = n$ ($n = 1, 2, \dots, 7$). Исследование зависимости максимального значения амплитуды внутренних волн от глубины погружения источника под поверхностью раздела показало, что отношение A_n/A_0 существенно зависит только от δ , а при фиксированном δ это отношение очень мало меняется при изменении u и ε в указанном выше диапазоне.

Приводим значения отношения A_n/A_0 для некоторых значений δ .

	$\delta = 1$	2	3	4	5	6	7
A_n/A_0 :	0.49	0.26	0.17	0.13	0.11	0.08	0.07

Эту зависимость приближенно можно выразить так:

$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{h}{2h_2}$$

Хотя в общем случае корни уравнения (1.37) найти не удастся, все же при некоторых значениях ξ уравнение (1.37) можно упростить, что позволяет найти r_7 в явном виде.

При $0.97 < \xi < 1$ и малых значениях r уравнение (1.37) можно записать так:

$$\operatorname{tg} \omega = \psi(r) = \frac{2 + \gamma r}{2\xi^2(1 + 2\gamma r) - 2 - \gamma r} \sqrt{\xi^2(1 + \gamma r) - 1} \quad (2.1)$$

Находя r_7 как корень уравнения $\psi'(r) = 0$, имеем

$$r_7 = \frac{4(1 - \xi^2)}{\gamma(2 + \xi^2)} \quad (2.2)$$

Из (2.1), (2.2) получаем такое выражение для определения предельного угла ω_2

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{4 - \xi^2}{11\xi^2 - 7\xi^4 - 4} \left(\frac{5\xi^2 - 3\xi^4 - 2}{2 + \xi^2} \right)^{1/2}$$

При выбранных значениях ξ имеем $r_7 < 0.08$.

При $0 \leq \xi \leq 0.4$ и для больших r формула (1.37) принимает вид

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{\xi^2(1 + \gamma)r - 1}}{2\xi^2(1 + \gamma)r - 1} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет два вещественных корня

$$r_{5,6} = \frac{\xi^{-2}}{8(1 + \gamma)\sin^2 \omega} [4\sin^2 \omega + \cos^2 \omega \mp \cos \sqrt{1 - 9\sin^2 \omega}] \quad (2.4)$$

Для $0 < \omega < 19^\circ 28'$, а для $\omega = 19^\circ 28'$ один кратный корень

$$r_3 = {}^{3/2}\xi^{-2}(1 + \gamma)^{-1}$$

Для $\omega > 19^\circ 28'$ уравнение (2.3) вещественных корней не имеет. Заметим, что $\min r_5 > 8$ для $\xi < 0.4$ ($r_5 < r_6$).

При $\xi < 0.4$ внутренние волны ξ_{22} будут сосредоточены внутри угла $|\omega| \leq 19^\circ 28'$. Область, заключенная между кривыми $R = v_{st}$ и $R = v_{st}$, представляет собой круг с центром в точке $x = {}^{3/4}ut$, $y = 0$ и радиусом ${}^{1/4}ut$. Сравнивая выражения (2.4) и (1.36), видим, что они отличаются только на постоянный множитель $(1 - \gamma)/(1 + \gamma) \ll 1$.

Узловые линии поперечных волн ξ_{21} , как это видно из (1.29), (1.31), пересекают ось x под прямым углом в точках, определяющихся из равенства

$$\frac{g}{u^2} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} R_n = \frac{\pi}{4} (4n + 1) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

а границу области $\omega = 19^\circ 28'$ пересекают в точках

$$\frac{g}{u^2} \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \frac{\sqrt{3}}{2} R_n = \frac{\pi}{4} (4n + 1) \quad (2.6)$$

т. е. длина поперечных волн зависит от ω ; на луче $\omega = 0$ длина волны равна

$$\lambda = 2\pi \frac{u^2}{g} \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \quad \left(\lambda = 2\pi \frac{u^2}{g} \right) \quad (2.7)$$

а на луче $\omega = 19^\circ 28'$

$$\lambda = 2\pi \frac{u^2}{g} \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \left(\lambda = 2\pi \frac{u^2}{g} \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.8)$$

В скобках даны длины поперечных волн из системы ξ_{11} , вычисленные на аналогичных лучах. В формулах (2.5) — (2.8) R и λ размерные.

Узловые линии продольных волн ξ_{22} пересекают границу области $\omega = 19^\circ 28'$ в точках, лежащих на четверть длины волны дальше точек пересечения границы области узловыми линиями поперечных волн. Отсюда видно, что длины внутренних волн во много раз больше длин поверхностных волн.

3. Решая аналогичную задачу для случая, когда источник находится в верхнем слое на расстоянии h_1 от свободной поверхности, получаем для вида свободной поверхности и поверхности раздела формулы (1.21) — (1.37), где в выражениях B_k ($k = 1, 2, \dots, 7$) следует заменить ξ_1 и η_1 соответственно на ξ_2 и η_2 , при этом

$$\xi_2(r) = \frac{2\gamma\sqrt{r}e^{r(1-h_1)}}{d_1 \operatorname{ch} r\sqrt{r\kappa^2 - 1}}, \quad \eta_2(r) = \epsilon\sqrt{r} \frac{(1 + \operatorname{th} r)e^{-r(1+h_1)} + d_1 e^{-r(1-h_1)}}{d_1 d_3 \sqrt{1 + \gamma \operatorname{th} r \operatorname{ch} r}}$$

Все сделанные в п. 2 выводы будут справедливы и для случая движения источника в верхнем слое. Глубина погружения источника влияет только на амплитуду волн, однако отношения между амплитудами соответствующих волн на поверхности раздела и свободной поверхности сохраняются и даются формулами (1.26).

Поступило 4 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., ОНТИ, 1936.
2. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению «мертвой воды». Ж. геофизики, 1934, т. 4, № 3.
3. Сретенский Л. Н. О волновом сопротивлении судна при наличии внутренних волн. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
4. Войцения В. С. Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей. Тр. Новочерк. политехн. ин-та, 1959, т. 104.
5. Hudimas A. A. Ship waves in a stratified ocean. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, p. 2.
6. Crapper G. D. Ship waves in a stratified ocean. J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, p. 4.
7. Черкесов Л. В. Развитие и затухание корабельных волн. ПММ, 1963, т. 27, № 4.
8. Черкесов Л. В. Развитие корабельных волн в жидкости конечной глубины. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, № 4.