

О СПЕКТРЕ КОАГУЛИРУЮЩИХ ПУЗЫРЕЙ В ЖИДКОСТИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

А. М. ГОЛОВИН, А. Г. ПЕТРОВ

(Москва)

Рассматривается решение уравнения относительного движения двух сферических пузырей в жидкости при больших числах Рейнольдса. Предполагается, что уравнения Лагранжа с точностью до членов порядка $(a/r)^3$ включительно (a — средний радиус пузыря, r — расстояние между центрами пузырей) пригодны для описания относительного движения вплоть до контакта.

Считается, что каждое столкновение, приводящее к непосредственному касанию пузырей, заканчивается коагуляцией.

Рассчитана вероятность коагуляции и исследуется кинетическое уравнение коагуляции пузырей. Показано, что для больших времен устанавливается предельная форма спектра. Оценивается время установления предельного спектра. Показана неустойчивость монодисперсного спектра.

1. Уравнение движения пузырей близких размеров. Для описания движения двух пузырей в жидкости малой вязкости можно воспользоваться уравнениями, полученными в работе [1]

$$\tau_1 \frac{du_1^\alpha}{dt} + u_1^\alpha = -2\tau_1 g^\alpha - 6a_2^3 \tau_2^2 \tau_1 g^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} g^\gamma \quad (1.1)$$

$$\tau_2 \frac{du_2^\alpha}{dt} + u_2^\alpha = -2\tau_2 g^\alpha + 6a_1^3 \tau_1^2 \tau_2 g^\beta \frac{\partial \Lambda^{\beta\gamma}}{\partial r^\alpha} g^\gamma$$

$$\left(\tau_i = \frac{a_i^2}{18\nu}, \quad i=1,2; \quad \Lambda^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial r^\alpha \partial r^\beta} \frac{1}{r}; \quad \alpha, \beta=1,2,3; \quad \begin{array}{l} r^\alpha = r_1^\alpha - r_2^\alpha \\ r = |r| \end{array} \right)$$

Здесь a_i , u_i^α , r_i^α — радиус, компоненты скорости и координаты центра i -го пузыря соответственно, g^α — проекции ускорения силы тяжести, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Для пузырей близких размеров уравнение относительного движения с точностью до членов порядка $\epsilon \ll 1$ в полярной системе координат r , θ (θ — угол между векторами $-\mathbf{g}$, \mathbf{r}) имеет вид

$$\tau \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{dr}{dt} = -4\epsilon\tau g \cos \theta + 36a^3 \tau^3 g^2 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^4}$$

$$\frac{\tau}{r} \frac{d}{dt} r^2 \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d\theta}{dt} = 4\epsilon\tau g \sin \theta + 36a^3 \tau^3 g^2 \frac{\sin 2\theta}{r^4} \quad (1.2)$$

$$(\epsilon = \Delta a/a, \quad \Delta a = a_1 - a_2, \quad a \approx a_1, \quad \tau \approx \tau_1)$$

Уравнения (1.2) отличаются от уравнений, рассмотренных в работе [1], в них учтены инерционные члены. В безразмерных переменных

$$\xi = \frac{r}{a} \left(\frac{4\varepsilon}{R} \right)^{1/4}; \quad \zeta = \frac{2g\varepsilon a t}{9\nu} \left(\frac{4\varepsilon}{R} \right)^{1/4} \quad \left(R = \frac{ga^2}{9\nu} \right)$$

уравнения (1.2) принимают следующий вид:

$$m \left[\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} - \xi \left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)^2 \right] + \frac{d\xi}{d\zeta} = \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\xi^4} \quad (1.3)$$

$$m \frac{d}{d\zeta} \xi^2 \frac{d\theta}{d\zeta} + \xi^2 \frac{d\theta}{d\zeta} = -\xi \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{\xi^3}$$

$$(m = 1/9 \sqrt{2\varepsilon^5 R^{3/4}})$$

2. Асимптотическое решение уравнений относительного движения в области $\xi^5 \gg m$ На больших расстояниях между пузырями инерционные члены мало изменяют уравнения безынерционного приближения, решение которого было получено ранее в работе [1]. Более точные уравнения, учитывающие члены порядка m / ξ^5 , имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\zeta} = \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{\xi^4} - \frac{4m}{\xi^5} (3 - 5 \cos^2 \theta) \cos \theta \quad (2.1)$$

$$\xi \frac{d\theta}{d\zeta} = -\sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{\xi^4} - \frac{3m}{\xi^5} (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin \theta$$

Решение этой системы уравнений легко получить, если заметить, что в соответствии с уравнениями (2.1) дивергенция вектора скорости с компонентами $d\xi/d\zeta$, $\xi d\theta/d\zeta$ равна нулю, и поэтому можно ввести функцию тока Ψ . Следуя [1], можно получить решение уравнений (2.1)

$$\Psi = \frac{\xi^2}{2} (1 - \mu^2) \left(1 + \frac{2\mu}{\xi^4} - 2m \frac{1 - 5\mu^2}{\xi^5} \right) \quad (2.2)$$

$$\Psi = (b/a)^2 (\varepsilon/R)^{1/2}; \quad \mu = \cos \theta$$

Здесь b — прицельное расстояние.

Это решение отличается от ранее полученного [2] учетом инерционных членов порядка m . Интегральные кривые (2.2) имеют две особые точки типа «седла». С точностью до членов порядка m они имеют следующие координаты: $(\xi_1 = 2^{1/4} - 2^{3/4}m, \mu_1 = 1)$, $(\xi_2 = (4/5)^{1/4}, \mu_2 = 1/\sqrt{5})$. Траектория, проходящая через вторую особую точку, соответствует максимальному значению функции тока $\Psi_0 = (4/5)^{5/4} \approx 0.76$, при котором возможно слияние пузырей.

3. Относительное движение пузырей в окрестности точки контакта. Уравнение безынерционного приближения показывает, что сближение пузырей соответствует области $|\mu| \ll 1$. Таким образом, при $m \ll 1$ сближение пузырей происходит в той же области полярных углов. На близких расстояниях $\xi^5 \sim m$, $\mu \sim m^{1/5}$ инерционные члены в уравнениях движения будут величинами того же порядка, что и силы взаимодействия пузырей

и вязкого сопротивления. Поэтому следует ввести внутренние переменные x, y, T

$$\xi = m^{1/2}x, \quad \mu = m^{1/2}y, \quad \zeta = mT \quad (3.1)$$

Уравнения движения в новых переменных с точностью до членов порядка $m \ll 1$ принимают вид

$$\frac{d^2x}{dT^2} + \frac{dx}{dT} = -\frac{1}{x^4}, \quad \frac{d}{dT}x^2 \frac{dy}{dT} + x^2 \frac{dy}{dT} + \frac{2y}{x^3} = x \quad (3.2)$$

Если от переменной T перейти к независимой переменной x , то можно понизить порядок уравнений (3.2)

$$\frac{dp}{dx} = -\left(1 + \frac{1}{px^4}\right), \quad p = \frac{dx}{dT} \quad (3.3)$$

$$p^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{2p^2}{x} - \frac{1}{x^4}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^5} = \frac{1}{x}$$

Решение системы уравнений (3.3) в области $x \gg 1$, которая при достаточно малых m соответствует $\xi \ll 1$, можно, следуя [3], сращивать с асимптотическим решением уравнений (1.3), полученным в п. 2. В соответствии с формулами (2.2) и (3.1) функции $p(x)$ и $y(x)$ должны удовлетворять условиям

$$p \rightarrow -1/x^4, \quad y \rightarrow -x^4/2 + \psi x^2 \quad (3.4)$$

при $x \rightarrow \infty$

$$\Psi = m^{1/2}\psi$$

В силу линейности второго уравнения (3.3) его решение, удовлетворяющее условию (3.4), можно представить в виде линейной комбинации двух фиксированных функций

$$y = f_1(x) + \psi f_2(x) \quad (3.5)$$

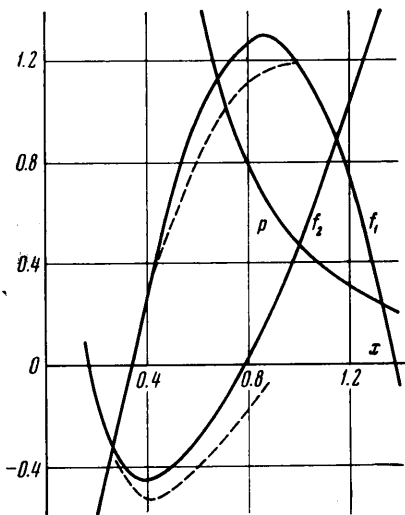
Функция $f_1(x)$ является решением второго уравнения (3.3), а функция $f_2(x)$ — решением соответствующего однородного уравнения. Кроме того, функции f_1 и f_2 должны удовлетворять следующим условиям при $x \rightarrow \infty$:

$$(f_1 + 1/2x^4)/x^2 \rightarrow 0, \quad (f_2 - x^2)/x^2 \rightarrow 0$$

При больших x для функций p, f_1, f_2 можно получить следующие асимптотические разложения:

$$p \rightarrow -\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^9} - \dots, \quad f_1 = -\frac{x^4}{2} + \frac{10}{3x} - \dots, \quad f_2 = x^2 - \frac{6}{5x^3} + \dots \quad (3.6)$$

На фиг. 1 представлены графики функций p, f_1 и f_2 , найденные численным решением соответствующих уравнений, причем начальные условия, взятые в точке $x \gg 1$, вычислялись по формулам (3.6).



Фиг. 1

В области $x \ll 1$ можно получить аналитическое решение уравнений (3.3). Действительно, если пренебречь в первом уравнении единицей по сравнению с $1/px^2$, то его можно проинтегрировать

$$^{1/2}p^2 \approx ^{1/3}x^{-3}.$$

Для определения f_1 и f_2 получаются уравнения Эйлера, решения которых имеют следующий вид:

$$f_i = A_i x^{1/4} \sin(1.71 \ln x + \alpha_i) \quad (i = 1, 2) \tag{3.7}$$

$$A_1 \approx 1.2, \quad \alpha_1 \approx 1.8, \quad A_2 \approx 0.6, \quad \alpha_2 \approx 0.09$$

Частное решение порядка x^4 отброшено вследствие малости x . Постоянные A_i, α_i определяются из сравнения с численным решением. Графики функций (3.7) изображены пунктиром на фиг. 1.

4. Вероятность коагуляции двух пузырей. Выше было показано, что траектория относительного движения в области $|\mu| \ll 1$ имеет следующий вид (3.1), (3.5):

$$\mu = m^{1/5} (f_1 + \psi f_2) \tag{4.1}$$

Как видно на фиг. 1, примерно в точке $x \approx 0.8$ функция f_1 принимает наибольшее значение, равное 1.3, а функция f_2 в окрестности этой точки обращается в нуль. Поэтому наибольшее значение функции $\mu(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_* \geq 1.3 m^{1/5} \tag{4.2}$$

Для малых $\psi \ll 1$ это неравенство переходит в равенство. Для больших ψ ($\psi \gg 1$) максимальное значение функции μ достигается для $x \gg 1$, поэтому в этой области можно найти μ_* , если воспользоваться асимптотикой функций f_1 и f_2 для $x \gg 1$ (3.6)

$$\mu = m^{1/5} (-x^4/2 + \psi x^2)$$

Отсюда следует, что

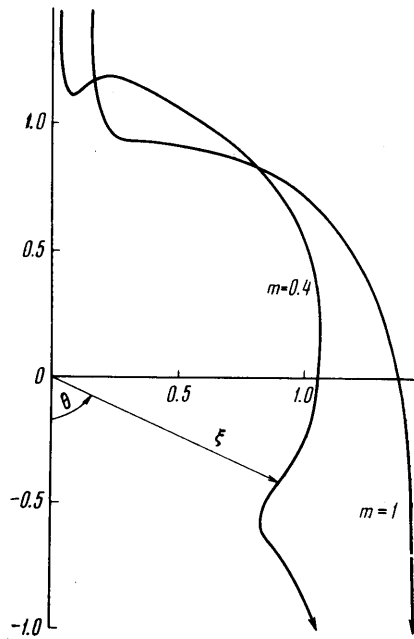
$$\mu_* = ^{1/2} m^{1/5} \psi^2 \quad \text{при } \psi \gg 1 \tag{4.3}$$

Интерполяционная формула

$$\begin{aligned} \mu_* &\approx m^{1/5} (^{1/2} \psi^2 + 1.3) = \\ &= ^{1/2} \Psi^2 + 1.3 m^{1/5} \end{aligned} \tag{4.4}$$

охватывает оба предельных случая (4.2) и (4.3), поэтому ее можно рассматривать как приближенную формулу, определяющую наибольшее значение μ как функцию от параметров столкновения.

Сила взаимодействия двух пузырей, как видно из уравнений (1.3), соответствует притяжению в области углов $\mu^2 < ^{1/3}$, а для остальных углов — отталкиванию. Предполагается, что существует некоторый предельный угол, так что если $\mu_* \leq \mu_0$, то траектория относительного движения приводит к коагуляции пузырей.



Фиг. 2

При $m \rightarrow 0$ формула (4.4) должна переходить в формулу асимптотического приближения $\Psi \leq \Psi_0 \approx 0.76$. Отсюда следует, что $2\mu_0 = \Psi_0^2$.

Таким образом, траектория относительного движения приводит к коагуляции, если

$$\Psi \leq \Psi_0 \left[1 - \left(\frac{m}{m_0} \right)^{4/5} \right]^{1/2} = \Psi_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

$$\left(m_0 = \left(\frac{\Psi_0^2}{2.6} \right)^{5/4} \approx 0.15, \quad \varepsilon_0 = (9/2 \sqrt{2} m_0)^{1/5} \approx 0.96 R^{-3/5} \right)$$

Итак, коагуляция возможна лишь при столкновении пузырей близких радиусов

$$\Delta a / a \leq \varepsilon_0 \quad (m \leq m_0)$$

Если $\Delta a / a > \varepsilon_0$, то пузыри, обладая большой инерцией, пролетают область сил притяжения. На фиг. 2 приведены две траектории относительного движения, найденные численным решением уравнений (1.3) при m , равном 1 и 0.4, с прицельными параметрами Ψ , соответственно равными 0.15 и 0.03. При помощи формул (2.5) и (4.5) можно определить сечение коагуляции пузырей

$$\sigma_c = \pi b^2 = \pi a^2 \Psi_0 \left(\frac{R}{\varepsilon} - \frac{R}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{при } \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \sigma_c = 0 \quad \text{при } \varepsilon \geq \varepsilon_0 \quad (4.6)$$

Вероятность столкновения двух пузырей объемов v и v' равна

$$w(v, v') = |\mathbf{u}_-| \sigma_c \quad (|\mathbf{u}_-| = 2\varepsilon \tau g)$$

Здесь \mathbf{u}_- — относительная скорость движения пузырей до столкновения. Как видно из (4.6), при $R \rightarrow \infty$ вероятность столкновения пузырей стремится к δ -функции.

$$w(v, v') \approx 0.057 (v^{3/2} g^3 / \nu)^{1/5} \delta(v - v') \quad (4.7)$$

5. Кинетическое уравнение коагуляции пузырей. Рассматривается непрерывный стационарный поток пузырей в вертикальной трубе с жидкостью, создаваемый за счет постоянной подачи газа через основание трубы. Пусть $n(v, z)$ — число пузырей в единице пространственного объема в точке z , объемы которых заключены в пределах от v до $v + dv$. Тогда функция распределения пузырей по радиусам или спектр определяется следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(v, z)}{\partial z} = & \frac{1}{2} \int_0^v w(v', v - v') n(v', z) n(v - v', z) dv' - \\ & - n(v, z) \int_0^\infty w(v, v') n(v', z) dv' \end{aligned} \quad (5.1)$$

Первый член правой части уравнения (5.1) учитывает приход пузырей объема v в единицу времени за счет столкновений пузырей объемов v' и $v - v'$, а второй — уход пузырей объема v за счет столкновений их с другими пузырями. Скорость подъема пузыря u относительно стенок трубы отличается от скорости подъема одиночного пузыря $u_0 = a^2 g / 9\nu$ на вели-

чину порядка $w_0 c$, где c — объемная концентрация пузырей в системе. Если в уравнении (5.1) пренебречь этой величиной и воспользоваться выражением (4.7) для вероятности коагуляции, можно получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial f(v, z)}{\partial z} + f^2(v, z) = A f^2\left(\frac{v}{2}, z\right), \quad A = 2^{-0.4} \approx 0.76$$

$$f(v, z) = w_0 v^{19/15} n(v, z), \quad w_0 \approx 1.3 (v^2 / g)^{3/5} \quad (5.2)$$

Кинетическое уравнение (5.2) позволяет рассчитывать спектр, если начальное распределение $f(v) = 0$ при $v < v_0$ (v_0 — объем пузыря, соответствующий $R \gg 1$)

В области $v_0 < v < 2v_0$ правая часть уравнения (5.2) равна нулю, и поэтому решение, удовлетворяющее начальному условию $f(v, 0) = f_0(v)$, имеет вид

$$f(v, z) = \frac{f_0(v)}{1 + f_0(v)z} \quad (5.3)$$

В интервале $2v_0 < v < 4v_0$ уравнение (5.2) является уравнением Риккати, допускающим аналитическое решение. Для больших z в обоих рассмотренных интервалах $f \rightarrow \lambda_k / z$. В общем случае для интервала $2^{k-1}v_0 < v < 2^k v_0$

$$f(v, z) \rightarrow \lambda_k / z \quad (\lambda_k^2 - \lambda_k = A \lambda_{k-1}^2) \quad (5.4)$$

Рекуррентное соотношение (5.4) имеет решение $\lambda_k = \lambda = 1 / (1 - A) \approx 4.1$, но оно не удовлетворяет условию $\lambda_1 = 1$. Приближенное решение рекуррентного соотношения можно получить путем линеаризации

$$\lambda_k \approx 4 - 3 \cdot 2^{-0.2k} \quad (5.5)$$

Формулы (5.2), (5.4) и (5.5) определяют асимптотическую форму спектра, если учесть, что для больших $k \approx \log_2 (v / v_0)$

$$n(v, z) \rightarrow \frac{4 - 3(v_0/v)^{1/5}}{w_0 z v^{19/15}}$$

6. Вероятность столкновения пузырей монодисперсного спектра. При расчете вероятности столкновения предполагалось, что расстояние между любыми двумя пузырями до столкновения удовлетворяет условию $r \gg \gg a(1/4R/\varepsilon)^{1/4}$, что означает $\xi \gg 1$. Поэтому предложенная формула для вероятности столкновения пригодна только в случае, если в произвольной сфере радиуса $a(R/\varepsilon)^{1/4}$ содержится мало пузырей (объема $v' = v(1 + 3\varepsilon)$). Это накладывает на функцию распределения следующее ограничение:

$$\frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{v(1+3\varepsilon_0)} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^{3/4} n(v', z) dv' \ll 1 \quad \left(\varepsilon_0 = \frac{0.96}{R^{3/5}}\right) \quad (6.1)$$

Если спектр достаточно плавный, то можно вынести $n(v', z)$ за знак интеграла и условие (6.1) будет означать

$$R^{3/5} v^2 n(v, z) \ll 1 \quad (6.2)$$

Пусть среднеквадратичное отклонение объема порядка среднего объема пузырей. Тогда c — газосодержание в единице объема — будет равно $c \sim \nu v^2$. Так что неравенство (6.2) принимает вид $c \ll R^{-3/5}$. При $R \sim 100$ это условие означает $c \ll 0.1$, так что рассматриваемая теория применима для достаточно разреженных систем.

Если спектр близок к монодисперсному, то очевидно, что условие (6.1) может быть не выполнено даже для очень разреженных систем. В этом случае уравнения относительного движения можно получить из уравнений (1.2), полагая $\varepsilon = 0$. Сталкиваются лишь те пузыри, взаимное положение которых соответствует $3 \cos^2 \theta < 1$. Если усреднить, следуя Бьеркнесу [4], силу притяжения по телесному углу, то осредненное уравнение относительного сближения имеет вид

$$\tau \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} = - \frac{8\sqrt{3}a^3 \tau^3 g^2}{r^4} \quad (6.3)$$

При $R \gg 1$ можно пренебречь силой сопротивления, после чего можно записать первый интеграл этого уравнения и вычислить время сближения пузырей

$$t \approx \left(\frac{\sqrt{3}}{16a^3 \tau^2 g^2} \right)^{1/2} \int_{2a}^{r_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_0^3} \right)^{-1/2} dr \approx \frac{3\tau}{R} \left(\frac{r_0}{a} \right)^{5/2}$$

Здесь r_0 — начальное расстояние между центрами пузырей. Для пространственно-однородного распределения вероятность нахождения ближайшего соседа имеет вид [5]

$$w(r_0) = 4\pi r_0^2 n \exp(-4/3\pi r_0^3)$$

Таким образом, среднее время сближения пузырей равно

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t(r_0) w(r_0) dr_0 \approx \frac{3\tau}{Rc^{5/6}}$$

Из полученного результата видно, что монодисперсный спектр пузырей крайне неустойчив. За время, не превышающее существенно время релаксации одиночного пузыря, в результате процессов коагуляции и дробления пузырей становится полидисперсным.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступило 26 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Л. М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Головин А. М., Петров А. Г. О движении двух пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1968, № 3.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. Bjerknes C. A. Hydrodynamische Fernkräfte. Fünf Abhandlungen über die Bewegung Kugelförmiger Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit (1863—1880). Leipzig, Engelmann, 1915.
5. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., Изд-во иностр. лит., 1947.