ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

В. Н. ВАРАПАЕВ, В. И. ЯГОДКИН

(Москва)

Изучается устойчивость простейших непараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале, описываемых точными решениями уравнений Навье — Стокса. Такие решения реализуются между двумя параллельными пористыми пластинами в случае вдува жидкости (или газа) на одной стенке и отсоса с той же скоростью — на другой и постоянном расходе жидкости вдоль канала. В этом случае поперечная составляющая скорости является постоянной, а профиль продольной составляющей скорости не зависит от продольной координаты x и является несимметричной функцией поперечной координаты y. Изучение гидродинамической устойчивости при этом сводится к решению уравнения, отличающегося от уравнения Орра — Зоммерфельда наличием дополнительных членов, содержащих поперечную составляющую скорости основного потока. Методом численного решения как этого уравнения, так и обычного уравнения Орра — Зоммерфельда и сравнения соответствующих результатов при различных числах Рейнольдса вдува $R_0 = v_0 h / \nu$ (v_0 — скорость вдува, h — ширина канала) исследовалось влияние непараллельности и асимметрии течений на их устойчивость.

1. Вопрос о влиянии непараллельного характера течений на их гидродинамическую устойчивость является сложной задачей теории устойчивости. Известны результаты качественного и количественного исследования этого влияния в случае пограничного слоя в несжимаемой и сжимаемой жидкости [1-3], которые показывают, что, по-видимому, универсального ответа на этот вопрос не существует, т. е. в различных конкретных случаях это влияние может быть как слабым, так и сильным. Для случая течения в канале при вдуве через его проницаемые стенки в [4] было установлено, что учет непараллельности основного потока приводит к результатам, качественно отличающимся от тех, которые получаются из теории устойчивости параллельных течений. Однако во многих случаях учет непараллельности производился приближенно, например, на основе гипотезы о локальности процесса потери устойчивости [2, 4]. Поэтому интересно изучить этот вопрос на примерах, допускающих точный учет непараллельности течения. Такими являются течения в каналах с пористыми стенками, изучавшиеся в [5], когда через одну из стенок плоского канала, образованного плоскими пористыми пластинами, производится подача жидкости с постоянной скоростью v_0, а через другую — отсос с той же скоростью при постоянстве средней скорости

$$u_0 = \frac{1}{h}\int_0^h u(y)\,dy$$

вдоль оси канала. В этом случае существует точное решение уравнений Навье — Стокса, имеющее в безразмерных переменных вид

$$u = u(y), \qquad v = 1, \qquad p = p(x) \tag{1.1}$$

Здесь за характерные скорость и длину взяты скорость вдува v_0 и ширина канала h.

Подставляя (1.1) в уравнения Навье — Стокса и используя условия

$$u(0)=u(1)=0, \qquad u_0=\mathrm{const} \tag{1.2}$$

получаем следующее выражение для $u(y)$:

$$\frac{u}{u_0}=\frac{2R_0(e^{R_0}-1)}{(2-R_0)(e^{R_0}-1)-2R_0}\left(\frac{e^{R_0y}-1}{e^{R_0}-1}-y\right) \qquad \left(R_0=\frac{v_0h}{\nu}\right) \tag{1.3}$$

Здесь R_0 — число Рейнольдса вдува (и, соответственно, отсоса) на стенках канала. В отличие от обычно рассматриваемых в теории гидродинамической устойчивости течений в каналах (плоские течения Пуазейля и Куэтта) здесь линии тока не являются прямолинейными (фиг. 1). Они выходят из одной стенки канала и кончаются на другой стенке ниже по течению. Функция тока имеет вид

$$\psi=-v_0x+\int_0^y u(y)\,dy+\mathrm{const} \tag{1.4}$$

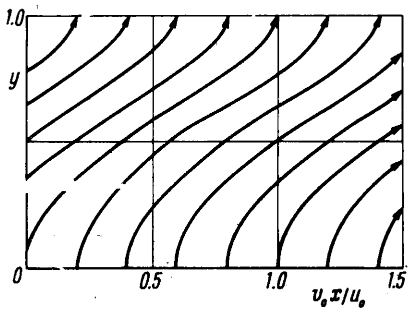
Максимум скорости находится в точке

$$y_m=\frac{1}{R_0}\ln\frac{e^{R_0}-1}{R_0} \tag{1.5}$$

и равен

$$U=u_0\frac{2[(e^{R_0}-1)(1-\ln\{(e^{R_0}-1)/R_0\})-R_0]}{(2-R_0)(e^{R_0}-1)-2R_0} \tag{1.6}$$

При изменении величины R_0 от 0 до ∞ профили скорости $u(y)$ изменяются от пуазейлевского ($R_0=0$) до профиля, почти совпадающего с куэттовским ($R_0=\infty$) (фиг. 2). Отличие в последнем случае состоит в том, что при $y=1$ $u=0$, а не $u=1$, как в течении Куэтта. Кроме того, здесь $v\neq 0$.



Фиг. 1

При любом значении $R_0<\infty$ профиль $u(y)$ выпуклый ($u''(y)<0$). Рассматриваемые течения являются несимметричными непараллельными течениями, профили скоростей которых не зависят от x.

2. Рассмотрим устойчивость этих течений. Отметим, что теорема Сквайра остается в данном случае справедливой, и поэтому достаточно рассмотреть лишь двумерные возмущения. Поскольку профиль скорости не зависит от x, то функцию тока возмущенного движения можно искать в виде плоской волны

$$\psi^0(x,y,t)=\varphi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \tag{2.1}$$

где α и c — волновое число и комплексная волновая скорость.

Принимая теперь за характерную скорость среднюю скорость u_0, для амплитуды возмущений $\varphi(y)$ получим уравнение

$$\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi=R_0(\varphi'''-\alpha^2\varphi')+i\alpha R[(w-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-w''\varphi]$$

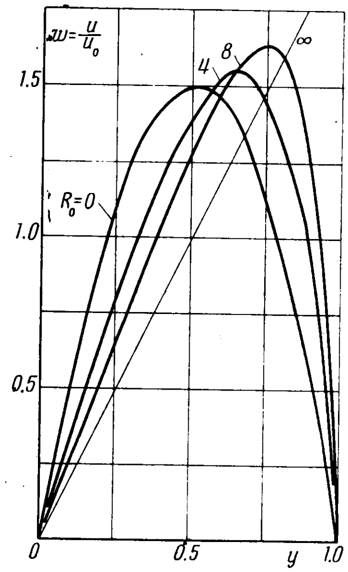
$$(w(y,R_0)=u/u_0,\ R=u_0h/\nu) \tag{2.2}$$

Здесь R — число Рейнольдса, построенное по средней скорости.

Предположим, что поры в стенках канала достаточно малы и нет обратной связи между расходом жидкости, вытекающей из стенки или поступающей в стенку, и гидродинамическими возмущениями потока. Тогда граничные условия для возмущений будут такими же, как в случае непроницаемых стенок

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(1) = \varphi'(1) = 0 \qquad (2.3)$$

Отличие уравнения (2.2) от обычного уравнения Орра — Зоммерфельда заключается в присутствии члена $R_0(\varphi''' - \alpha^2\varphi')$, учитывающего непараллельность основного течения. Величина R_0 влияет на устойчивость как через этот дополнительный член, так и через профиль скорости $w(y, R_0)$.



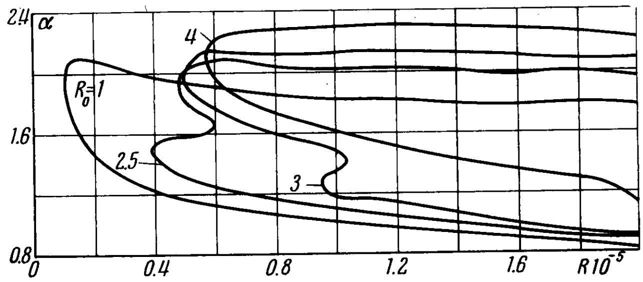
Фиг. 2

Таким образом, имеем задачу на собственные значения уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) и параметрами α, c, R, R_0. Критическая точка на нейтральной кривой ($c_i = 0$), для которой впервые наступает неустойчивость (R_*, α_*), зависит от R_0. Эта зависимость отражает влияние двух факторов: изменения профилей w (с ростом R_0 профиль скорости делается все более несимметричным) и непараллельности течения, роль которого можно оценить, сравнивая результаты расчетов характеристик устойчивости по уравнению (2.2) и обычному уравнению Орра — Зоммерфельда с тем же профилем скорости.

3. Для решения уравнения (2.2) был использован метод, предложенный в работе [6], с небольшими изменениями, сделанными ввиду несимметричности профиля скорости. Метод заключается в том, что после получения быстрорастущего решения уравнения понижается его порядок и затем находится медленнорастущее решение. Используя эти два линейно-независимых решения, можно получить характеристическое уравнение для параметров задачи. Для уравнения Орра — Зоммерфельда с несимметричным профилем скорости (течение Куэтта) этот метод применялся в [7]. Конкретный вид систем уравнений, которые требуется интегрировать при решении уравнения несколько более общего, чем (2.2), приведен в [4]. Отличие в решении систем от [4] заключается в следующем. Система собственных функций уравнения (2.2) не распадается на функции, симметричные и антисимметричные относительно оси канала. Поэтому интегрирование уравнений нужно проводить от стенки до стенки. Так как некоторые из функций, входящих в систему, имеют на стенке особенность, то интегрирование начиналось на малом расстоянии y_0 от стенки, причем начальные данные при $y = y_0$ задавались главными членами разложения решения по y вблизи стенки. Интегрирование проводилось от стенки, где происходит вдув жидкости, до стенки, где происходит отсос.

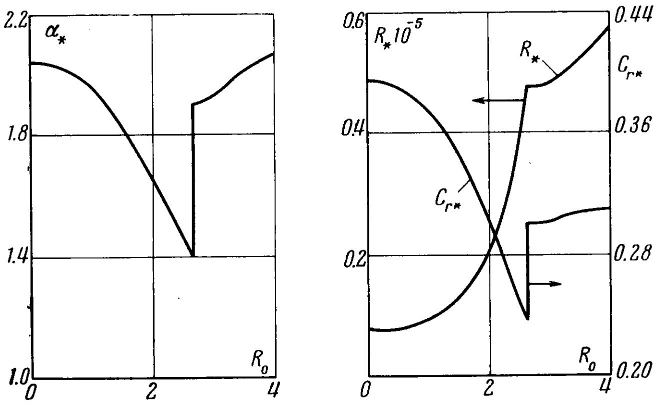
4. Основной целью расчета было получение характеристик нейтральной устойчивости при различных значениях параметра R_0. На фиг. 3 приведены нейтральные кривые ($c_i = 0$) для нескольких значений R_0. Следует подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, увеличение числа R_0 приводит к сильному росту величины R_*, т. е. стабилизирует течение. При

сравнительно небольшом вдуве и отсосе ($R_0 = 4$) критическое число Рейнольдса примерно в восемь раз больше, чем для течения Пуазейля. Зависимость критических параметров R_*, α_* и c_{r*} от числа R_0 приведена на фиг. 4. Во-вторых, в диапазоне значений R_0 от 2 до 3.5 имеется провал на



Фиг. 3

нейтральной кривой, так что образуются два «горбика», соответствующие двум точкам минимума на кривой $R = R(\alpha)$, что является следствием несимметричности профилей скорости. Различная зависимость точек минимума на кривой $R = R(\alpha)$ от R_0 объясняет разрывы на кривых $\alpha_*(R_0)$ и $c_{r*}(R_0)$.



Фиг. 4

Качественно такое же поведение нейтральных кривых получается для параллельных течений с теми же профилями скорости из расчетов по асимптотической теории Линя, обобщенной на несимметричные профили в [8] при сохранении правила обхода поворотных точек [1]. Применимость этого правила обсуждалась в работе [9]. Расчеты по этой теории показали, что нижний горбик соответствует влиянию на устойчивость критического слоя (окрестности точки, где $w(y) = c_r$), расположенного у стенки с меньшим градиентом скорости, а верхний — критического слоя у стенки с бóльшим градиентом. При $R_0 > 3$ с ростом R_0 основную роль в процессе потери устойчивости играет второй критический слой.

Сравнения численных результатов, приведенных выше, с результатами, полученными для уравнения Орра — Зоммерфельда, показали, что их характеристики устойчивости на нейтральной кривой отличаются мало (на 1—4% в рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса R_0).

Этим изучаемое здесь течение сильно отличается от ранее рассмотренного течения в канале со вдувом на обеих стенках [4]. В последнем случае течение гораздо менее устойчиво и учет непараллельности приводит к качественно другим результатам по сравнению с теорией устойчивости параллельных течений. Это, в частности, можно объяснить тем, что там поперечная составляющая скорости основного потока зависела от y, способствуя переносу энергии основного движения в возмущенное. В изложенной здесь задаче $v = \text{const}$ и перенос энергии непосредственно определяется только продольной составляющей скорости.

Поступило 19 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Brown B. A. Stability criterion for three-dimensional laminar boundary layer. Boundary layer and flow control, vol. 2, Edit. by Lachman, 1962.
3. Алексеев Ю. И., Короткин А. И. Влияние поперечной скорости потока в несжимаемом пограничном слое на устойчивость ламинарной формы течения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
4. Варапаев В. Н., Ягодкин В. И. Об устойчивости течения в канале с проницаемыми стенками. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
5. Berman A. Laminar flow in an annulus with porous walls. J. Appl. Phys., 1958, vol. 29, No. 1.
6. Гольдштик М. А., Сапожников В. А. Устойчивость ламинарного потока в присутствии поля массовых сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. Штерн В. Н. Устойчивость плоского течения Куэтта. ПМТФ, 1969, № 5.
8. Ягодкин В. И. К теории устойчивости течений вязкой жидкости в каналах. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
9. Mott J., Joseph D. Stability of parallel flow between concentric cilindres. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 10.