

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ

Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Рассматривается пространственная осесимметричная конвекция в шаровой полости. На границе шаровой полости ставится общее условие теплоотдачи. Для решения применяется метод конечных разностей.

Численное решение плоской нестационарной задачи о тепловой конвекции в квадратной области, на границе которой в начальный момент задавалась постоянная температура, отличная от температуры жидкости, получено ранее [1].

1. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, заполняющую шаровую полость радиуса R . До начального момента времени жидкость покоится, а ее температура не зависит от координат и совпадает с температурой границы и окружающей среды (эта температура далее принимается за начало отсчета). В начальный момент $t = 0$ температура среды, окружающей полость, скачком повышается до значения Θ и далее остается неизменной. В результате теплообмена температура границы будет меняться со временем, и в полости возникнет нестационарная конвекция. В результате процессов теплопроводности и конвекции жидкость будет прогреваться до тех пор, пока ее температура не станет равной температуре окружающей среды.

Задача обладает аксиальной симметрией относительно вертикальной оси z , проходящей через центр шара. Выберем эту ось в качестве полярной оси сферической системы координат (r, θ, φ) с началом в центре шара. Ввиду аксиальной симметрии

$$v_\varphi = 0, \quad v_r = v_r(r, \theta, t), \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta, t), \quad T = T(r, \theta, t) \quad (1.1)$$

Введем функцию тока $\psi(r, \theta, t)$ следующими соотношениями:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.2)$$

(при таком определении функции тока линии $\psi = \text{const}$ изображают линии тока).

Из обычных уравнений конвекции можно получить следующую систему уравнений для функции тока ψ и температуры T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D\psi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (D\psi) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} (D\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \\ + \frac{2D\psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = PD^2\psi + \\ + P^2Gr \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = \Delta T \quad (1.4)$$

Здесь D и Δ — операторы Стокса и Лапласа

$$D\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Уравнения (1.3), (1.4) записаны в безразмерной форме; в качестве единиц расстояния, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно R (радиус шара) R^2/χ , χ , Θ (начальная разность температур). В систему (1.3), (1.4) входят два безразмерных параметра — члена Грассхофа и Прандтля

$$G = \frac{g\beta\Theta R^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Из условия обращения в нуль скорости на границе шаровой полости следуют граничные условия для функции тока:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 \quad (1.5)$$

Для температуры поставим общее условие теплоотдачи, а именно будем предполагать, что локальный тепловой поток на границе пропорционален разности температур в данной точке границы и внешней среды. В безразмерной форме это условие можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -b(T - 1) \quad \text{при } r = 1 \quad (1.6)$$

где $b = kR/\kappa$ число Био (k — коэффициент теплоотдачи, κ — теплопроводность жидкости).

В начальный момент жидкость неподвижна, имеет однородную температуру, отличную от температуры границы:

$$\psi = 0, \quad T = 0, \quad T|_{r=1} = 1 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.7)$$

2. Система нелинейных уравнений в частных производных (1.3), (1.4) с начальными и граничными условиями (1.5)–(1.7) решалась методом сеток. Эта система записывалась в виде системы трех уравнений для функций ψ , ζ , T , где

$$\zeta = D\psi \quad (2.1)$$

Новая неизвестная функция ζ связана с азимутальной проекцией вихря скорости

$$\zeta = -r \sin \theta (\text{rot } v)_\varphi \quad (2.2)$$

Для записи уравнений в конечно-разностной форме введем обозначения

$$r_0 = 0, \quad r_k = R_0 + k\Delta r, \quad \Delta r = \frac{1 - R_0}{K} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

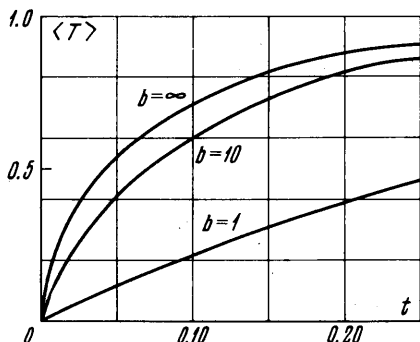
$$\theta_i = i\Delta\theta, \quad \Delta\theta = \pi/I \quad (i = 0, 1, 2, \dots, I) \quad (2.3)$$

$$t_n = \sum_{j=1}^n \Delta t_j, \quad f(\theta_i, r_k, t_n) \equiv f_{i,k,n}$$

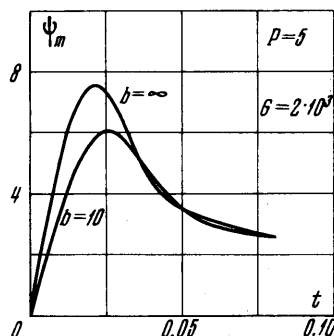
Все пространственные производные заменялись трехточечными разностями; разностная схема была явной. Для решения уравнения (2.1) использовался ускоренный итерационный метод Либмана. Схема решения описана в работе [2]. Шаг по времени вычислялся по формуле

$$\Delta t_n = \left[4p \left(1 + \frac{\Delta r^2}{(R_0 + \Delta r)^2} \frac{I^2}{\pi^2} \right) + |\psi_m| \alpha \right]^{-1} \quad (\psi_m = \max \psi_{ik}^n) \quad (2.4)$$

Здесь $\alpha = 10$. Из формулы (2.4) видно, что введением $R_0 \neq 0$ удается увеличить шаг Δt_n и снизить затраты машинного времени¹.



Фиг. 1



Фиг. 2

Запишем начальные и граничные условия задачи (1.5)–(1.7) в конечно-разностной форме

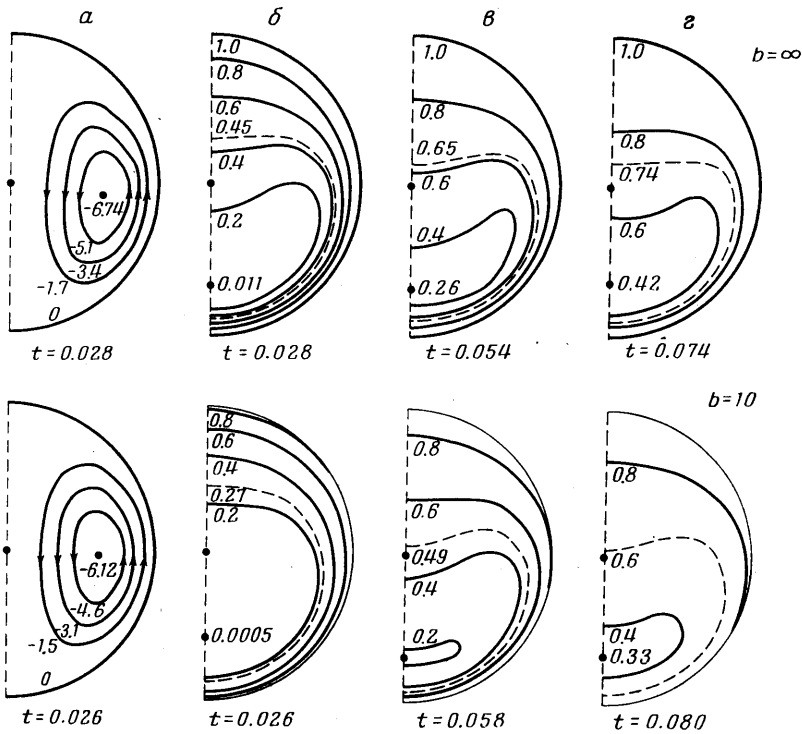
$$\begin{aligned} \psi_{i,k}^0 = \zeta_{i,k}^0 = 0, \quad T_{i,k}^0 = 0 \quad (k \neq K), \quad T_{iK} = 1 \\ \psi_{iK}^n = 0, \quad \zeta_{i,K}^n = \frac{2\psi_{iK-1}^n}{\Delta r^2}, \quad T_{iK}^{n+1} = \frac{b\Delta r + T_{i,K-1}^n}{1 + b\Delta r} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ввиду аксиальной симметрии задачи на вертикальной оси шаровой полости имеем условия

$$\begin{aligned} \psi_{0,k}^n = \psi_{I,k}^n = \psi_{i,0}^n = 0, \quad \zeta_{0,k}^n = \zeta_{I,k}^n = \zeta_{i,0}^n = 0 \quad (2.6) \\ T_{0,k}^n = T_{1,k}^n, \quad T_{I,k}^n = T_{I-1,k}^n, \quad T_{i,0}^n = \frac{1}{I+1} \sum_{i=0}^I T_{i,1}^n \end{aligned}$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: число Прандтля было фиксированным и равным $P = 5$; число Грассхофа достигало в отдельных расчетах значения $G = 32 \cdot 10^3$. Параметр теплоотдачи на границе принимал четыре значения: $b = \infty$, 10, 2.5, и 1 (значение $b = \infty$ соответствует заданию постоянной температуры на границе). Параметры сетки: $I = 12, 14, 16$; $K = 10, 12, 14, 20$; $R_0 = 0, 0.125$. Основные результаты получены при $I = 16, K = 14, R_0 = 0.125$.

¹ При значениях $I = 12, K = 10$ и $R_0 = 0$ нахождение решения при $G = 10^3$ до стадии значительного прогревания ($T_{\min} = 0.6$) требует восьми часов машинного времени машины «Арагац» (скорость выполнения операций примерно 10 тысяч операций в секунду).



Фиг. 3

3. Остановимся сначала на результатах расчетов для случая, когда конвекция среды отсутствует (твердый теплопроводный шар). В этом случае задача состоит в численном интегрировании уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T \tag{3.1}$$

с граничным условием (1.6) и начальным условием

$$T(r, \theta, 0) = 0, \quad T(1, \theta, 0) = 1 \tag{3.2}$$

При поставленных условиях распределение температуры обладает сферической симметрией.

Характеристиками нестационарного процесса являются N — безразмерный тепловой поток, входящий в полость (число Нуссельта), $\langle T \rangle$ — средняя по объему температура и T_{\min} — минимальная температура. Число Нуссельта N и средняя по объему температура $\langle T \rangle$ определены следующим образом:

$$N = \frac{Q}{4\pi R\kappa\Theta} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\frac{\partial T}{\partial r} \right]_{r=1} \sin \theta d\theta \tag{3.3}$$

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4/3\pi R^3} \int_V T dV \tag{3.4}$$

Здесь Q — поток тепла, входящий в шаровую полость, κ — теплопроводность жидкости, V — объем шара. При таких определениях N и $\langle T \rangle$

связаны следующим образом:

$$\langle T \rangle = 3 \int_0^t N dt \quad (3.5)$$

На фиг. 1 представлены зависимости средней по объему температуры $\langle T \rangle$ от времени для трех значений числа Био $b = \infty, 10, 1$. Полученное распределение температуры (случай $b = \infty$) по радиусу шара $T(r)$ для различных моментов времени практически совпадает с результатами аналитического решения [3]. Результаты расчета позволяют сделать вывод,

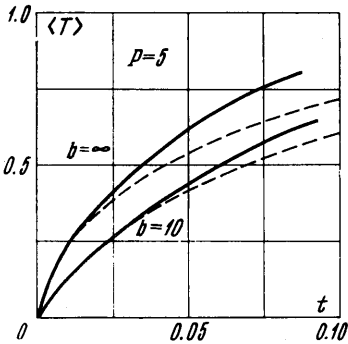
что при значениях числа Био $b > 100$ могут быть использованы результаты при $b = \infty$.

В том случае, когда шар заполнен жидкостью, процесс разогрева сопровождается конвективным движением. Характеристикой интенсивности конвективного движения в данный момент времени является максимальное значение функции тока ψ_m .

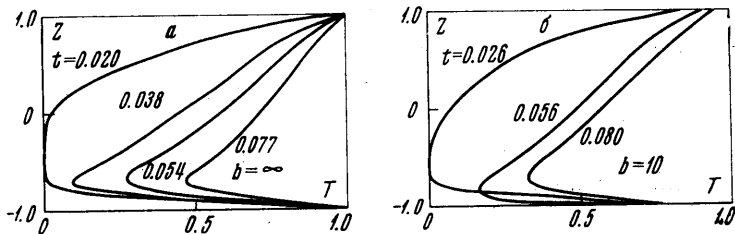
На фиг. 2—5 представлены численные результаты, относящиеся к фиксированному значению числа Грассхофа $G = 2 \cdot 10^3$ для двух значений числа Био $b = \infty, 10$. На фиг. 2 представлены зависимости максимальных значений функции тока ψ_m

от времени. Как видно, интенсивность конвекции на начальном этапе процесса разогрева увеличивается, достигает максимального значения ψ_* при $t = \tau_*$ и затем уменьшается. При фиксированном значении числа Грассхофа меньшему числу Био соответствует меньшее значение ψ_* и большее значение τ_* .

На фиг. 3, а представлены линии тока в вертикальной плоскости, проходящей через ось, которые соответствуют примерно моменту максималь-



Фиг. 4



Фиг. 5

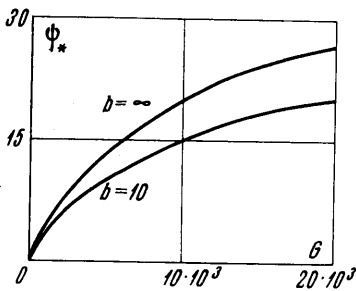
ной интенсивности конвективного движения. Жидкость поднимается по стенкам шара и опускается вдоль вертикального диаметра. Аналогичный вид имеют линии тока и для других моментов; с увеличением времени ($t > \tau_*$) интенсивность движения уменьшается, а центр вихря (координата максимального значения функции тока ψ_m) смещается вниз.

Распределение температуры в вертикальной плоскости, проходящей через центр шаровой полости, для различных моментов времени представлено на фиг. 3 (случаи б, в, г). Пунктирная линия соответствует средней по объему температуре жидкости $\langle T \rangle$. На приведенной фиг. 3 видно, что конвективное движение приводит к образованию в верхней части шара

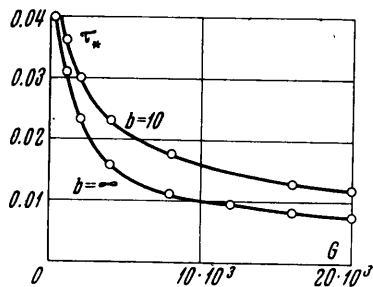
нагретой области; спускающаяся по центру теплая струя смещает положение минимальной температуры T_{\min} вниз (положение «полюса холода» отмечено точкой). При $b \neq \infty$ конвективное движение изменяет температуру на границе, — температура на граничной сфере в любые моменты времени монотонно увеличивается с ростом высоты (холодное дно).

Поведение средней по объему температуры жидкости $\langle T \rangle$ в зависимости от времени (фиг. 4) характеризует процесс прогревания. В начальный момент $\langle T \rangle = 0$, при $t \rightarrow \infty$ средняя температура $\langle T \rangle \rightarrow 1$. Пунктирные линии на фиг. 5 соответствуют чисто теплопроводному разогреву ($G = 0$). Заметно, что конвекция убыстряет процесс прогревания. При равных числах Грассхофа большему числу Био соответствует большая скорость процесса прогревания.

Распределение температуры на вертикальной оси полости, проходящей через центр, представлено для различных моментов времени на фиг. 5.



Фиг. 6



Фиг. 7

В течение некоторого интервала времени на вертикальной оси шара существует постоянный градиент температуры.

Приведенные результаты (фиг. 2—5) относятся к фиксированному значению числа Грассхофа $G = 2 \cdot 10^2$. Аналогичные расчеты были проведены и для других значений числа G . Оказалось, что на начальном этапе нестационарного процесса конвективное движение развивается аналогичным образом — максимальное значение функции тока ψ_m увеличивается до ψ_* при $t = \tau_*$, а затем уменьшается. При малых значениях числа Грассхофа ($G < 100$) конвективный вклад в процесс разогрева незначителен. При больших значениях числа Грассхофа ($G > 8 \cdot 10^3$) и $t > \tau_*$ уменьшение теплового потока $N(t)$ и максимального значения функции тока $\psi_m(t)$ происходит не монотонным образом.

Зависимости $\psi_*(G)$ и $\tau_*(G)$ для случаев $b = \infty$ и $b = 10$ представлены на фиг. 6, 7. Обработка полученных результатов позволила получить асимптотические зависимости для этих величин

$$\psi_* = cG^n, \quad \tau_* = dG^{-m} \tag{3.6}$$

Замечание. Результаты, полученные при различных значениях параметров пространственной сетки, позволили уточнить значения ψ_* и τ_* . Уточнение этих величин производилось в предположении квадратической зависимости погрешности от шага сетки. Отличие ψ_* и τ_* ($\Delta r = 1/16$, $\Delta \theta = 1/16\pi$) от уточненных значений увеличивается с ростом G от 2—5% ($G = 10^3$) до 18% при $G = 20 \cdot 10^3$. При уменьшении Δr и $\Delta \theta$ значение ψ_* уменьшается, а τ_* увеличивается.

Асимптотика наступает при $G > 12 \cdot 10^2$ для $b = \infty$; при меньшем b асимптотика наступает позднее (при $b = 10$ она наступает при $G > 16 \cdot 10^3$).

В пределах погрешности вычислений можно считать, что показатели степени n , m в формулах (3.6) одинаковы для всех b (в интервале $2.5 \leq b < \infty$) $n = 0.40$, $m = 0.47$.

Для значений $b = \infty, 10, 2.5$ были получены соответственно следующие значения коэффициентов: $c = 0.50, 0.39, 0.26$ и $d = 0.79, 1.25, 1.87$.

Таким образом, вычисления, проведенные с помощью метода сеток, позволили получить не только поля скоростей и температуры для фиксированных значений параметров задачи, но и асимптотические зависимости основных характеристик нестационарной конвекции.

Автор благодарен Г. З. Гершуни и Е. М. Муховицкому за помощь в работе.

Поступило 28 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарунин Е. Л. Нестационарная конвекция жидкости в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.