

## ОБТЕКАНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ В КАНАЛЕ ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Б. С. КИРНАСОВ, В. В. КУДРЯВЦЕВ

(Москва)

Рассматривается обтекание дозвуковым потоком идеального сжимаемого газа донного среза полубесконечной пластины, помещенной в канале. Принятая схема обтекания аналогична схеме Д. А. Эфроса [1, 2] с возвратной струйкой для кавитационных течений. Для решения задачи применен метод С. В. Фальковича [3], позволяющий найти решение в задачах о газовых струях с несколькими характерными скоростями. Этот метод является обобщением метода С. А. Чаплыгина [4] для струйных задач с одной характерной скоростью.

1. Схема течения представлена на фиг. 1. Пусть  $AM$  и  $A'M'$  — стенки канала, расстояние между которыми равно  $2H$ ;  $BB'$  — основание пластины, равное  $2h$ ;  $BCD$  и  $B'C'D'$  — свободные поверхности струй, на которых скорость газа равна  $v_2$ ; точки  $D$  и  $D'$  соответствуют бесконечно удаленному сечению возвратной струйки, причем ширина ее в этом сечении равна  $2\delta$ ; скорость потока в бесконечно удаленных сечениях в начале и в конце канала равна соответственно  $v_1$  и  $v_2$ . Ограничимся рассмотрением случая, когда

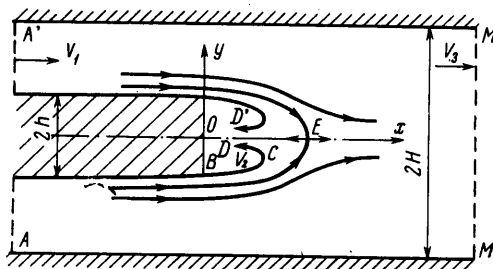
$$v_3 \leq v_1 < v_2 \leq a_*$$

где  $a_*$  — критическая скорость звука.

В силу симметрии будем рассматривать нижнюю половину течения. Ее годограф в переменных  $\tau = v^2/v_{\max}^2$ ,  $\theta$ , где  $v$  — модуль скорости,  $v_{\max}$  — максимальная скорость истечения,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости к оси  $x$ , представлен на фиг. 2.

Обозначим через  $Q_1$ ,  $Q_3$  и  $Q_2$  расходы в бесконечно удаленных сечениях в начале канала, в конце канала и в возвратной струйке соответственно. Если примем, что вдоль свободной поверхности функция тока  $\psi = 0$ , то имеем следующие граничные условия для функции тока в плоскости годографа:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \quad \text{при } \theta = 0 & \tau_1 < \tau < \tau_2 & \text{ на } AB \\ \psi &= 0 \quad \text{при } 0 < \theta < \pi & \tau = \tau_2 & \text{ на } BCD \\ \psi &= -\frac{1}{2}Q_2 \quad \text{при } \theta = \pi & 0 < \tau < \tau_2 & \text{ на } DE \\ \psi &= -\frac{1}{2}Q_2 \quad \text{при } \theta = 0 & 0 < \tau < \tau_3 & \text{ на } EM \\ \psi &= -\frac{1}{2}Q_1 \quad \text{при } \theta = 0 & \tau_3 < \tau < \tau_1 & \text{ на } MA \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Необходимо найти решение уравнения Чаплыгина для функции тока  $\psi = \psi(\tau, \theta)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right] + \frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \left( \beta = \frac{1}{\gamma-1} \right) \quad (1.2)$$

(где  $\gamma$  — показатель политропы), удовлетворяющее граничным условиям (1.1).

Проведя в плоскости годографа дуги окружностей  $\tau = \tau_1$  и  $\tau = \tau_3$ , следуя С. В. Фальковичу [3], будем искать решение в получившихся областях 1, 2, 3 в виде

$$\psi_1 = -\frac{Q_2}{\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_{1/2n}(\tau) \sin n\theta \quad (0 < \tau < \tau_3) \quad (1.3)$$

$$\psi_2 = -\frac{Q_2}{2} + \frac{Q_1 - Q_2}{2\pi} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n Z_{1/2n}(\tau) + B_n \zeta_{1/2n}(\tau)] \sin n\theta \quad (\tau_3 < \tau < \tau_1) \quad (1.4)$$

$$\psi_3 = -\frac{Q_2}{2\pi} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n Z_{1/2n}(\tau) + D_n \zeta_{1/2n}(\tau)] \sin n\theta \quad (\tau_3 < \tau < \tau_2) \quad (1.5)$$

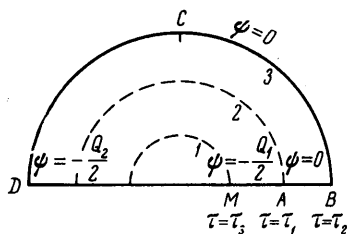
Входящая в ряды функция  $Z_{1/2n}(\tau)$  есть регулярный при  $\tau = 0$  интеграл уравнения

$$4\tau^2(1-\tau)Z_{1/2n}''(\tau) + 4\tau[1+(\beta-1)\tau]Z_{1/2n}'(\tau) - n^2[1-(2\beta+1)\tau]Z_{1/2n}(\tau) = 0 \quad (1.6)$$

Функция  $Z_{1/2n}(\tau)$  выражается через гипергеометрический ряд

$$Z_{1/2n}(\tau) = \tau^{1/2n} F(a_n, b_n, n+1, \tau)$$

$$a_n + b_n = n - \beta, \quad a_n b_n = -1/2 \beta n(n+1)$$



Фиг. 2

Функция  $\zeta_{1/2n}(\tau)$  есть линейно-независимый с  $Z_{1/2n}(\tau)$  интеграл уравнения (1.6), рассмотренный Черри [5]. Вронскиан этих интегралов имеет вид

$$W(Z_{1/2n}, \zeta_{1/2n}) = \begin{vmatrix} Z_{1/2n}'(\tau) & \zeta_{1/2n}'(\tau) \\ Z_{1/2n}(\tau) & \zeta_{1/2n}(\tau) \end{vmatrix} = \frac{n}{2\tau} (1-\tau)^\beta \quad (1.7)$$

Из граничных условий (1.1) и условий аналитического продолжения на линиях раздела областей

$$\begin{aligned} \psi_1(\tau_3, \theta) &= \psi_2(\tau_3, \theta), & \frac{\partial \psi_1(\tau, \theta)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_3} &= \frac{\partial \psi_2(\tau, \theta)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_3}, \\ \psi_2(\tau_1, \theta) &= \psi_3(\tau_1, \theta), & \frac{\partial \psi_2(\tau, \theta)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_1} &= \frac{\partial \psi_3(\tau, \theta)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=\tau_1}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

для определения коэффициентов  $a_n, A_n, B_n, C_n, D_n$  получим систему уравнений

$$C_n Z_{1/2n}(\tau_2) + D_n \zeta_{1/2n}(\tau_2) = \frac{Q_2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\begin{aligned} (A_n - a_n)Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) + B_n\zeta_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) &= \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \frac{1}{n} \\ (A_n - a_n)Z'_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) + B_n\zeta'_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) &= 0 \\ (A_n - C_n)Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) + (B_n - D_n)\zeta_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) &= \frac{Q_1}{\pi} \frac{1}{n} \\ (A_n - C_n)Z'_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) + (B_n - D_n)\zeta'_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решим эту систему и на основании соотношений (1.7) — (1.8) найдем функцию тока  $\psi(\tau, \theta)$

$$\frac{\pi}{Q_2}\psi_1 = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\frac{1}{2}n}(\tau) \frac{\sin n\theta}{n} \quad (0 \leq \tau \leq \tau_3) \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\frac{1}{2}n}(\tau) &= \frac{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} \left\{ (-1)^{n+1} - \frac{2\tau_3}{n} \frac{T'_{\frac{1}{2}n}(\tau_3)}{(1-\tau_3)^\beta} + \right. \\ &+ \left. \frac{2\tau_1}{n(1-\tau_1)^\beta} \frac{Q_1}{Q_2} \left[ T'_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) \frac{(1-\tau_1)^\beta}{(1-\tau_3)^\beta} \frac{\tau_3}{\tau_1} - T'_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\pi}{Q_2}\psi_2 = -\frac{Q_1}{Q_2} \frac{\pi}{2} + \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{\frac{1}{2}n}(\tau) \frac{\sin n\theta}{n} \quad (\tau_3 \leq \tau \leq \tau_1) \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\frac{1}{2}n}(\tau) &= (-1)^{n+1} \frac{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} - \frac{T_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} Z_{\frac{1}{2}n}(\tau) \frac{X_{\frac{1}{2}n}(\tau_3)}{(1-\tau_3)^\beta} + \\ &+ \frac{Q_1}{Q_2} \left[ Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) \frac{X_{\frac{1}{2}n}(\tau_3)}{(1-\tau_3)^\beta} \frac{T_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} - \frac{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} \frac{2\tau_1}{n} \frac{T_{\frac{1}{2}n}(\tau_1)}{(1-\tau_1)^\beta} \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\pi}{Q_2}\psi_3 = -\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{\frac{1}{2}n}(\tau) \frac{\sin n\theta}{n} \quad (\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2) \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\frac{1}{2}n}(\tau) &= (-1)^{n+1} \frac{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} - \frac{T_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)} \left[ Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) \frac{X_{\frac{1}{2}n}(\tau_3)}{(1-\tau_3)^\beta} + \right. \\ &+ \left. \frac{Q_1}{Q_2} \left( Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_1) \frac{X_{\frac{1}{2}n}(\tau_1)}{(1-\tau_1)^\beta} - Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_3) \frac{X_{\frac{1}{2}n}(\tau_3)}{(1-\tau_3)^\beta} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь

$$T_{\frac{1}{2}n}(\tau) = \zeta_{\frac{1}{2}n}(\tau)Z_{\frac{1}{2}n}(\tau_2) - \zeta_{\frac{1}{2}n}(\tau_2)Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)$$

$$X_{\frac{1}{2}n}(\tau) = \frac{2\tau}{n} \frac{Z'_{\frac{1}{2}n}(\tau)}{Z_{\frac{1}{2}n}(\tau)}$$

2. Найдем форму свободной поверхности. Воспользуемся для этого общей формулой перехода от координат плоскости годографа к координатам физической плоскости

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{v} [d\varphi + i(1-\tau)^{-\beta} d\psi] \quad (2.1)$$

где  $z = x + iy$ , а  $\varphi = \varphi(\tau, \theta)$  — потенциал скорости, связанный с функцией тока  $\psi$  уравнениями Чаплыгина

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{2\tau}{(1-\tau)^\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

Вдоль свободной поверхности  $\psi = 0$ ,  $\tau = \tau_2$ , поэтому из соотношений (2.1) и (2.2) получим

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{v_2} \frac{2\tau_2}{(1-\tau_2)^\beta} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_2} d\theta \quad (2.3)$$

Проинтегрируем  $dz$  по  $\theta$  и с учетом выражения (1.14) и условия  $x = 0$ ,  $y = -h$  при  $\theta = 0$  получим

$$\frac{\pi}{Q_2} x = \frac{(1-\tau_2)^{-\beta}}{v_2} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) + \right. \quad (2.4)$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\tau_2}{n} \gamma'_{1/2n}(\tau_2) \left[ \frac{n}{n^2-1} - \left( \frac{\cos(n+1)\theta}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\theta}{2(n-1)} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{\pi}{Q_2} (y+h) = \frac{(1-\tau_2)^{-\beta}}{v_2} \left\{ \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) + \right. \quad (2.5)$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tau_2}{n} \gamma'_{1/2n}(\tau_2) \left[ \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right] \right\}$$

Из формулы (1.15) следует:

$$\gamma'_{1/2n}(\tau_2) = \frac{n}{2\tau_2} \left\{ (-1)^{n+1} X_{1/2n}(\tau_2) + Y_{1/2n}(\tau_3, \tau_2) - \right. \quad (2.6)$$

$$\left. - \frac{Q_1}{Q_2} \left[ Y_{1/2n}(\tau_3, \tau_2) - Y_{1/2n}(\tau_1, \tau_2) \right] \right\}$$

Здесь

$$Y_{1/2n}(\tau, \tau_2) = \left( \frac{1-\tau_2}{1-\tau} \right)^\beta X_{1/2n}(\tau) \frac{Z_{1/2n}(\tau)}{Z_{1/2n}(\tau_2)}$$

Для расходов  $Q_1$  и  $Q_2$  имеем выражения

$$\rho_0 Q_1 = 2(H-h) \rho_1 v_1, \quad \rho_0 Q_2 = 2\delta \rho_2 v_2 \quad (\rho = \rho_0(1-\tau)^\beta) \quad (2.7)$$

Асимптотическое значение ширины возвратной струйки получается из соотношения (2.5) с учетом выражения (2.7) при  $\theta = \pi$

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1}{1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)} \quad (2.8)$$

Из уравнения неразрывности

$$(H-h) \sqrt{\tau_1} (1-\tau_1)^\beta = \delta \sqrt{\tau_2} (1-\tau_2)^\beta + H \sqrt{\tau_3} (1-\tau_3)^\beta \quad (2.9)$$

при помощи соотношений (2.6) — (2.8) получим

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\eta(\tau_2) + \eta(\tau_3) [1 + X_{1/2}(\tau_2) + Y_{1/2}(\tau_3, \tau_2)]}{\eta(\tau_2) [\eta(\tau_1) - \eta(\tau_3)] + \eta(\tau_1) \eta(\tau_3) [Y_{1/2}(\tau_3, \tau_2) - Y_{1/2}(\tau_1, \tau_2)]} \quad (2.10)$$

$$(\eta(\tau) = \sqrt{\tau} (1-\tau)^\beta)$$

Подставим соотношения (2.7) и (2.8) в формулы (2.4) и (2.5), тогда параметрические уравнения свободной поверхности примут вид

$$\pi \frac{x}{h} = [1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \left\{ (1 - \cos 2\theta) \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\tau_2}{n} \gamma'_{1/2n}(\tau_2) \left[ \frac{2n}{n^2 - 1} - \left( \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right) \right] \right\} \quad (2.11)$$

$$\pi \frac{y}{h} = -\pi + [1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \left\{ (2\theta - \sin 2\theta) \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\tau_2}{n} \gamma'_{1/2n}(\tau_2) \left[ \frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right] \right\} \quad (2.12)$$

Из соотношений (2.6), (2.8) и (2.10) следует:

$$\delta/h = \{ \eta(\tau_2) [\eta(\tau_1) - \eta(\tau_3)] + \eta(\tau_1) \eta(\tau_3) [Y_{1/3}(\tau_3, \tau_2) - Y_{1/2}(\tau_1, \tau_2)] \} \times \\ \times \{ [\eta(\tau_1) - \eta(\tau_3)] [1 + X_{1/2}(\tau_2) + Y_{1/2}(\tau_3, \tau_2)] \eta(\tau_2) + \\ + \eta(\tau_1) \eta(\tau_2) [Y_{1/2}(\tau_1, \tau_2) - Y_{1/2}(\tau_3, \tau_2)] \}^{-1} \quad (2.13)$$

Полагая в соотношениях (2.11) и (2.12)  $\theta = \pi/2$ , определяем координаты точки  $C$  ( $x_c = a$  — длина застойной зоны,  $y_c = -b$ )

$$\pi \frac{a}{h} = 2[1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \left\{ \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\tau_2 \gamma'_{1/2n}(\tau_2)}{n^2 - 1} \left[ 1 - \frac{\sin^{1/2} n\pi}{n} \right] \right\} \\ \pi \frac{h-b}{h} = [1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \left\{ \tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\tau_2 \gamma'_{1/2n}(\tau_2)}{n^2 - 1} \cos^{1/2} n\pi \right\} \quad (2.15)$$

Определим положение задней критической точки  $E$ . Так как соотношение (2.1) есть полный дифференциал, то, интегрируя вдоль линии  $\theta = \pi/2$ , получаем ( $x_E = d, x_c = a$ )

$$d - a = \int_0^{\tau_3} \Psi_1 d\tau + \int_{\tau_3}^{\tau_2} \Psi_2 d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_1} \Psi_3 d\tau \\ (\Psi_\nu = \left( \frac{\partial \psi_\nu}{\partial \tau} \right)_{\theta=\pi/2} \frac{d\tau}{\nu(1-\tau)^\beta}, \nu = 1, 2, 3)$$

Используя выражения для функции тока (1.10), (1.12) и (1.14), а также соотношения (2.7) и (2.8), последнее равенство можно переписать так:

$$\pi \frac{d-a}{h} = 2[1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \tau_2 (1 - \tau_2)^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^{\tau_3} \frac{\alpha'_{1/2n}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{\tau_3}^{\tau_1} \frac{\beta'_{1/2n}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau + \int_{\tau_2}^{\tau_1} \frac{\gamma'_{1/2n}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau \right] \frac{\sin^{1/2} n\pi}{n} \quad (2.16)$$

Входящие сюда интегралы могут быть вычислены [4]

$$I_n(\tau) = \int \frac{\chi'_{1/2n}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau = \frac{(1-\tau)^{-\beta}}{\sqrt{\tau}(n^2-1)} [n^2\chi'_{1/2n}(\tau) + 2\tau\chi'_{1/2n}(\tau)]$$

где  $\chi_{1/2n}(\tau)$  — решение уравнения (1.6), причем

$$I_n(0) = 0, \text{ если } \chi_{1/2n}(\tau) \equiv Z_{1/2n}(\tau)$$

После подстановки соотношений (1.11), (1.13) и (1.15) и (2.14) в формулу (2.16) и некоторых преобразований с использованием соотношений (2.8) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} \pi \frac{d}{h} = & [1 + 2\tau_2\gamma'_{1/2}(\tau_2)]^{-1} \left\{ 3\tau_2\gamma_{1/2}(\tau_2) + 2\tau_2(1-\tau_2)^\beta \left[ \int_0^{\tau_2} \frac{\alpha'_{1/2}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\tau_3}^{\tau_1} \frac{\beta'_{1/2}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\gamma'_{1/2}(\tau)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)^\beta} d\tau \right] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\tau_2\gamma'_{1/2n}(\tau_2)}{n^2-1} \right\} \end{aligned}$$

Известно [6], что решения уравнения (1.6) при  $n=1$  выражаются через элементарные функции

$$Z_{1/2}(\tau) = \frac{1-(1-\tau)^{\beta+1}}{(\beta+1)\sqrt{\tau}}, \quad \zeta_{1/2}(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau}} + \frac{\beta}{4} Z_{1/2}(\tau)$$

Эти соотношения позволяют записать в элементарных функциях выражения для определения  $\delta/h$  и  $Q_1/Q_2$ , а также некоторые члены в формулах (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) и (2.17).

Если заданы расстояния между стенками канала  $2H$ , основание пластины  $2h$ , скорость  $\tau_1$  в бесконечно удаленном сечении на входе в канал и скорость  $\tau_2$  на свободных поверхностях струй, то соотношения (2.8) (2.11)–(2.15) и (2.17) позволяют найти геометрические параметры застойной зоны, форму свободных струй и скорость  $\tau_3$  на выходе из канала.

3. Рассмотрим некоторые предельные случаи. Пусть пластина обтекает безграничным потоком ( $H = \infty$ ), тогда  $\tau_3 = \tau_1$ . Подставим соотношение (2.10) в равенство (2.6) и положим  $\tau_3 = \tau_1$ . Раскрывая имеющуюся неопределенность и используя известное соотношение [4]

$$\tau(1-\tau)X'_{1/2n}(\tau) + 1/2n(1-\tau)X_{1/2n}{}^2(\tau) + \beta\tau X_{1/2n}(\tau) = 1/2n[1-(2\beta+1)\tau]$$

получаем

$$\begin{aligned} \gamma'_{1/2n}(\tau_2) = & \frac{2\tau_2}{n} \left\{ (-1)^{n+1} X_{1/2n}(\tau_2) + Y_{1/2n}(\tau_1, \tau_2) + \right. \\ & \left. + n \frac{\eta(\tau_2) + \eta(\tau_1)[1 + X_{1/2}(\tau_2) + Y_{1/2}(\tau_1, \tau_2)]}{\eta(\tau_2)X_{1/2}(\tau_1) - \eta(\tau_1)Y_{1/2}(\tau_1, \tau_2)} X_{1/2}(\tau_1) \frac{Y_{1/2n}(\tau_1, \tau_2)}{X_{1/2n}(\tau_1)} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Форма свободной поверхности струй и геометрические параметры застойной зоны в случае безграничного потока определяются по формулам (2.11), (2.12), (2.14), (2.15) и (2.17) с использованием выражения (3.1)

для  $\gamma'_{1/2n}(\tau_2)$ . Для асимптотического значения ширины возвратной струйки получим из (2.13)

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1}{2(\beta + 1)\eta(\tau_2)} \frac{(1 - \tau_1)^{\beta+1} - (1 - \tau_2)^{\beta+1}}{\sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2}} \quad (3.2)$$

Будем рассматривать пластину как канал ширины  $2h$ . Тогда полученные результаты будут обобщением задачи о насадке Борда в затопленном пространстве [7, 8]. При  $\tau_1 = 0$  получаем из соотношения (3.2) формулу для коэффициента сжатия струи в насадке Борда, указанную Н. Н. Макеевым [8]

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1 - (1 - \tau_2)^{\beta+1}}{2(\beta + 1)\tau_2(1 - \tau_2)^\beta} \quad (3.3)$$

Результаты расчетов коэффициента сжатия струи в зависимости от коэффициента давления  $C_p = 2(p_1 - p_2) / \rho_1 v_1^2$  с использованием формулы (3.2) представлены на фиг. 3 ( $p_1$  и  $p_2$  — давления, соответствующие скоростям  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ;  $M_1$  — число Маха набегающего потока).

Предположим, что скорость на свободной поверхности струи звуковая, т. е.

$$\tau_2 = \tau_* = a_*^2 / v_{\max}^2$$

В этом случае в соответствии с результатом Л. В. Овсянникова, полученным для задачи Чаплыгина [4], выравнивание скоростей в возвратной струйке должно произойти на конечном расстоянии вдоль прямолинейного отрезка. Действительно, полагая  $\theta = \pi$ ,  $\tau_2 = \tau_*$  в выражении (2.11), получаем вследствие сходимости ряда [1]

$$\pi \frac{l}{h} = [1 + 2\tau_2 \gamma'_{1/2}(\tau_*)]^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\tau_*}{n^2 - 1} \gamma'_{1/2n}(\tau_*) [1 + (-1)^n] \quad (3.4)$$

где  $l$  — расстояние, на котором происходит выравнивание скоростей.

Для несжимаемой жидкости будем иметь

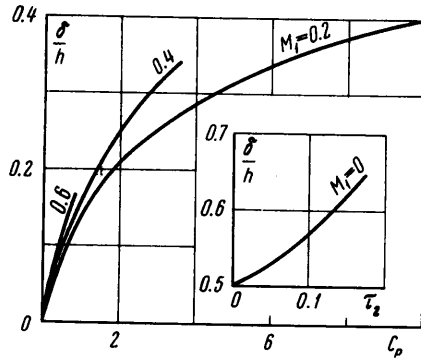
$$v_{\max} \rightarrow \infty, \quad \beta \rightarrow 0, \quad X_{1/2n}(\tau) \rightarrow 1, \quad \frac{Z_{1/2n}(\tau)}{Z_{1/2n}(\tau_2)} \rightarrow \left(\frac{v}{v_2}\right)^n$$

Введем обозначение

$$q_i = \frac{v_i}{v_2}, \quad i = 1, 3$$

После суммирования рядов получим из соотношений (2.11) и (2.12)

$$\begin{aligned} \pi \frac{x}{h} = & \frac{1 - q_1 q_3}{2 + q_1 + q_3} \left[ 2 \ln \cos \frac{\theta}{2} + M(q_3, \theta) \right] + \\ & + q_1 \frac{(1 + q_3)^2}{2 + q_1 + q_3} \frac{M(q_3, \theta) - M(q_1, \theta)}{q_3 - q_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$



Фиг. 3

$$\pi \frac{y}{h} = -\pi + \frac{(1+q_1)(1+q_3)}{2+q_1+q_3} \theta + \frac{1-q_1q_3}{2+q_1+q_3} N(q_3, \theta) +$$

$$+ q_1 \frac{(1+q_3)^2}{2+q_1+q_3} \frac{N(q_3, \theta) - N(q_1, \theta)}{q_3 - q_1} \quad (3.6)$$

где

$$M(q_i, \theta) = \frac{1+q_i^2}{q_i} \ln \frac{\sqrt{1-2q_i \cos \theta + q_i^2}}{1-q_i}$$

$$N(q_i, \theta) = \frac{q_i^2-1}{q_i} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{q_i \sin \theta}{1-q_i \cos \theta}$$

Выражение для асимптотической ширины возвратной струйки имеет следующий вид:

$$\frac{\delta}{h} = \frac{1-q_1q_3}{2+q_1+q_3} \quad (3.7)$$

В случае безграничного потока ( $q_1 = q_3$ ) имеем

$$\pi \frac{x}{h} = (1-q_1) \ln \cos \frac{\theta}{2} + q_1 \frac{q_1-1}{q_1+1} M(q_1, \theta) -$$

$$- \frac{1+q_1^2}{(1-q_1)^2} (1-\cos \theta) K(q_1, \theta) \quad (3.8)$$

$$\pi \frac{y}{h} = -\pi + \frac{q_1+1}{2} \theta + \frac{q_1}{q_1-1} N(q_1, \theta) + \sin \theta K(q_1, \theta) \quad (3.9)$$

Здесь

$$K(q_1, \theta) = \frac{(q_1+1)^2(q_1-1)}{2(1-2q_1 \cos \theta + q_1^2)}, \quad \frac{\delta}{h} = \frac{1-q_1}{2} \quad (3.10)$$

Если  $q_1 = q_3 = 0$ , то  $\delta/h = 1/2$ , а уравнения свободных поверхностей струй примут вид

$$\pi \frac{x}{h} = \ln \cos \theta/2 + \sin^2 \theta/2 \quad (3.11)$$

$$\pi \frac{y}{h} = -\pi + 1/2(\theta - \sin \theta) \quad (3.12)$$

Таким образом получен известный результат для насадка Борда в несжимаемой жидкости [2, 9].

Поступило 15.XI.1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Гостехиздат, 1961.
3. Фалькович С. В. К теории газовых струй. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
4. Чаплыгин С. А. О газовых струях. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Cherru T. M. Asymptotic expansions for the hypergeometric functions occurring in gas-flow theory. Proc. Roy. Soc. London, A-202, 1950, No. 1071.
6. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Секерж-Зенькович Я. И. К теории насадка Борда для газа. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
8. Макеев Н. Н. Замечания к работе Я. И. Секерж-Зеньковича. К теории насадка Борда для газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
9. Биркгоф Г., Саратонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.