

БАЛАНС ПУЛЬСАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ В СВОБОДНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

К. Е. ДЖАУГАШТИН

(Ленинград)

Приводится расчет пульсационных характеристик и баланса энергии в свободных турбулентных струях несжимаемой жидкости. Расчет выполнен на основе уравнений для рейнольдсовых напряжений, замкнутых присоединением полуэмпирических соотношений. Результаты расчета сравниваются с экспериментом.

Расчет турбулентного течения обычно ограничивается применением уравнений для осредненного движения [1-3]. В последнее время наряду с этим делаются попытки расчета пульсационных характеристик, основанные на уравнениях для рейнольдсовых напряжений. В основе такого рода расчетов лежат идеи А. Н. Колмогорова [4], согласно которым основные характеристики неоднородного турбулентного потока могут быть выражены через осредненное значение пульсационной энергии E и линейный масштаб l . Эта гипотеза и соображения размерности позволяют, в частности, представить выражение для диссипации пульсационной энергии через E и l . При дальнейшем развитии оказалось полезным приближенное соотношение, предложенное Ротта [5], для обмена энергии между компонентами скорости. Некоторое развитие метода расчета Ротта содержится в работе [6] применительно к расчету плоскопараллельного потока. Численный расчет течения в пограничном слое на основе аналогичных соображений дается в работе [7].

Ниже уравнения для рейнольдсовых напряжений применяются к расчету пульсационных характеристик в свободных турбулентных струях несжимаемой жидкости в автомодельной области развития струи [8]. Конкретные расчеты выполнены для плоской затопленной струи и турбулентного следа. Аналогичный расчет для осесимметричной струи приводится в работе [14].

1. Основные уравнения и гипотезы. Исходная система уравнений для средних величин, характеризующих турбулентное течение несжимаемой жидкости, и уравнений для рейнольдсовых напряжений имеют следующий вид [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 U_k \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \\ & - \left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\nu \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_i u_j \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{p}{\rho} \langle (\delta_{ik} u_i + \delta_{jk} u_j) \rangle \right] + 2\nu \sum_{k=1}^3 \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle = 0 \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3) \\ (j = 1, 2, 3) \end{matrix} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь U_i — составляющая средней скорости, u_i — составляющая пульсационной скорости, P — осредненное значение давления, p — пульсация давления.

Далее будут использоваться уравнения для стационарного осредненного движения и уравнения, описывающие баланс пульсационной энергии (на единицу массы жидкости) $E = 1/2 \langle u^2 + v^2 + w^2 \rangle$. Для свободной турбулентной струи можно пренебречь влиянием процессов, связанных с непосредственным действием молекулярной вязкости на развитие струи. Поэтому члены, содержащие кинематическую вязкость, далее опускаются. После выполнения в исходных уравнениях обычной для пограничного слоя оценки членов получим следующую систему уравнений:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\langle uv \rangle), \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

$$U \frac{\partial E}{\partial x} + V \frac{\partial E}{\partial y} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(- \left\langle \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) v \right\rangle \right) \right] +$$

$$+ \left[\langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \left[v \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle \right]$$

В уравнении баланса пульсационной энергии левая часть уравнения описывает перенос энергии средним движением, а три члена в прямых скобках в правой части уравнения представляют собой соответственно турбулентную диффузию пульсационной энергии, порождение пульсационной энергии за счет работы рейнольдсовых напряжений и диссипацию.

Число неизвестных в приведенной системе уравнений превышает число уравнений. Для замыкания системы воспользуемся следующими полуэмпирическими соотношениями:

а) диссипацию пульсационной энергии i -компоненты выразим по формуле А. Н. Колмогорова [4] в виде

$$\sum_{k=1}^3 \left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = \frac{c}{3} \frac{E \sqrt{E}}{l} \quad (1.3)$$

где c — эмпирическая постоянная, l — величина, имеющая размерность длины и пропорциональная некоторому среднему масштабу вихрей в данной точке;

б) примем, что перенос импульса осуществляется диффузией градиентного типа (формула Буссинеска)

$$\frac{\tau}{\rho} = -\langle uv \rangle = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.4)$$

где ν_T — коэффициент турбулентного обмена;

в) предположим далее, что перенос пульсационной энергии также определяется диффузией градиентного типа

$$- \left\langle \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) v \right\rangle = \nu_T \frac{\partial E}{\partial y} \quad (1.5)$$

Коэффициенты турбулентного обмена в выражениях (1.4) и (1.5) приняты одинаковыми, в общем случае в этих формулах можно ввести численный коэффициент, аналогичный числу Прандтля, который в рассматриваемом случае принят равным единице. (Заметим, что градиентное представление турбулентной диффузии было предложено Прандтлем [10].);

г) наконец, для коэффициента турбулентной вязкости из соображений размерности можно воспользоваться либо формулой А. Н. Колмогорова

$$\nu_T = \sqrt{E}l \quad (1.6)$$

либо формулой Прандтля

$$\nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \text{или} \quad \nu_T = U_m l \frac{l}{\delta} \quad (1.7)$$

В дальнейшем будем пользоваться второй формулой Прандтля (которая получается из первой (1.7) путем замены $|\partial U / \partial y| \approx U_m / \delta$, где U_m, δ — некоторые характерные значения скорости и размера).

Используя приведенные выше соотношения, из уравнений (1.1) получаем следующую замкнутую систему уравнений:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1.8)$$

$$U \frac{\partial E}{\partial x} + V \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c \frac{E\sqrt{E}}{l}$$

Решение этой системы уравнений для конкретных течений позволяет найти распределение пульсационной энергии, а также определить отдельные члены в уравнении баланса энергии.

Для расчета отдельных компонент рейнольдсовых напряжений можно из уравнений (1.1) прийти к замкнутой системе уравнений, используя формулу Ротта [5] для обмена энергии между различными компонентами пульсаций

$$\left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle = -k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) \quad (1.9)$$

где k — эмпирическая постоянная.

Здесь, однако, ограничимся приближенным расчетом отдельных моментов второго порядка $\langle u_i u_j \rangle$. Для этой цели воспользуемся широко применяемым для расчета течений с поперечным сдвигом приближением, в котором конвективными и диффузионными членами в уравнениях (1.1) пренебрегают [5, 6]. Некоторым обоснованием этого приближения в свободных турбулентных струях является то, что эти члены, как показывают экспериментальные данные [3, 11–13], являются величинами одного порядка и во внешней части струи имеют противоположные знаки, так что их суммарное воздействие близко к нулю.

В рамках принятого приближения из уравнения (1.1) с учетом соотношений (1.3) и (1.9) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + c \frac{E^{3/2}}{l} &= 0, & \langle v^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \langle uv \rangle &= 0 \\ \frac{k}{2} \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle v^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{l} &= 0, & \langle vw \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \langle uw \rangle &= 0 \\ \frac{k}{2} \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle w^2 \rangle - \frac{2}{3} E \right) + \frac{c}{3} \frac{E^{3/2}}{l} &= 0, & k \frac{\sqrt{E}}{l} \langle vw \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решение этой системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= (2 - rc/k)E, & \langle v^2 \rangle &= \langle w^2 \rangle = (rc/k)E \\ \langle uv \rangle &= \langle vw \rangle = 0 & (r &= 2/3(k/c - 1)) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Таким образом, отдельные компоненты пульсационной энергии выражаются через среднекинетическую энергию E , которая далее будет определяться уже из полного уравнения для энергии (1.8).

Покажем теперь, что из системы (1.10) следуют выражения для турбулентного трения, записанные ранее на основе гипотезы (1.4) и соотношений размерности (1.6) и (1.7). Действительно, разрешая уравнения (1.10) относительно $\langle uv \rangle$, получаем

$$\langle uv \rangle = \frac{cr}{k^2} \sqrt{E} l \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.12)$$

1°. Масштаб l определен с точностью до постоянного множителя, поэтому, полагая $rc/k^2 = 1$, получаем формулы (1.4) и (1.6). При этом значение k выражается через c , т. е. $k = 1/3(1 \pm \sqrt{1 - 6c})$, так что общее число эмпирических коэффициентов не увеличивается. Заметим, что из формулы для k следует, что значение $c \leq 1/6$.

2°. Подставим теперь в (1.12) соотношение $k\sqrt{E} = \sqrt{r}l\partial U/\partial y$, найденное из системы (1.10). В результате получим

$$\langle uv \rangle = \frac{cr^{3/2}}{k^3} \left(l \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \frac{cr^{3/2}}{k^3} U_m l \frac{l}{\delta_\Gamma} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.13)$$

Последнее выражение в (1.13) получено из первого путем приближенной замены $\partial U/\partial y \approx U_m/\delta_\Gamma$. При $cr^{3/2}/k^3 = 1$ выражение для $\langle uv \rangle$ совпадает с формулами (1.4) и (1.7). В этом случае [6] значение $c \leq 0.26$.

В обоих случаях 1 и 2° каждому значению c отвечают два значения k . Из них для расчета отдельных компонент пульсаций выбирается большее значение k , так как оно лучше соответствует опытным данным. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых конкретных типов струйных течений.

2. Плоская свободная струя. Рассмотрим плоскую турбулентную струю несжимаемой жидкости, распространяющуюся в покоящейся среде. Дополним для этого систему уравнений граничными условиями

$$\begin{aligned} V = 0, \quad \partial U / \partial y = 0, \quad \partial E / \partial y = 0 & \text{ при } y = 0 \\ U \rightarrow 0, \quad E \rightarrow 0 & \text{ при } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

и условием сохранения импульса

$$\int_{-\infty}^{\infty} U^2 dy = J_x = \text{const} \quad (2.2)$$

Здесь J_x — кинематический импульс, начальное значение которого равно $J_x = U_1^2 d$. Далее будем использовать безразмерные уравнения движения и энергии, в которых в качестве масштаба скорости и длины соответственно приняты U_1 и d .

Рассмотрим решение уравнений (1.8) в автомоделльной области. Искомые величины запишем в следующем виде:

$$U/U_m = F'(\varphi), \quad E/E_m = f(\varphi), \quad \varphi = y/\delta \quad (2.3)$$

Здесь U_m и E_m — значения скорости и энергии на оси струи ($y = 0$), δ — условная ширина струи, F' и f — универсальные профили, φ — автомоделльная координата.

Произведя преобразования (2.3) в уравнениях (1.8), получим

$$\sqrt{f^e} F'' + 2FF' = 0 \quad (2.4)$$

$$4F'f + 2Ff' + (\sqrt{f^e} f')' + \lambda \sqrt{f^e} (F'')^2 - Cf \sqrt{f} = 0$$

Здесь $\varepsilon = 1$ соответствует расчету по формуле А. Н. Колмогорова (1.6), $\varepsilon = 0$ — по формуле Прандтля (1.7).

Заметим, что при расчете по первой схеме оба уравнения (2.4) связаны между собой, в то время как при расчете по второй схеме уравнения расщепляются (в этом случае решение первого уравнения (2.4) известно: $F = \text{th } \varphi$).

В уравнениях (2.4) принято соответственно для схем 1° и 2°

$$c = C\kappa^2, \quad c = 1/4 C a \kappa \sqrt{\lambda} \quad (2.5)$$

Здесь C определяется при интегрировании уравнения. Кроме того, приняты следующие общие обозначения:

$$\nu_T / U_m \delta^2 = -1/2, \quad \lambda = U_m^2 / E_m, \quad \kappa = l / \delta \quad (2.6)$$

(штрих обозначает дифференцирование по x). Используя эти соотношения (2.6), а также интегральное условие (2.2)

$$U_m^2 \delta I = 1, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} F'^2 d\varphi \quad (2.7)$$

получим следующие общие для обоих случаев выражения искомых величин:

$$U_m = \frac{U_0}{\sqrt{x}}, \quad E_m = \frac{E_0}{x}, \quad \lambda = \frac{U_0^2}{E_0}, \quad \delta = ax, \quad a = \frac{1}{IU_0^2} \quad (2.8)$$

Величины U_0 и E_0 (следовательно, и λ) — эмпирические постоянные и находятся на основании распределения скорости и энергии по оси струи $U_m = U_m(x)$, $E_m = E_m(x)$, которые определяются экспериментальным путем.

Значение κ определяется из первого выражения в (2.6)

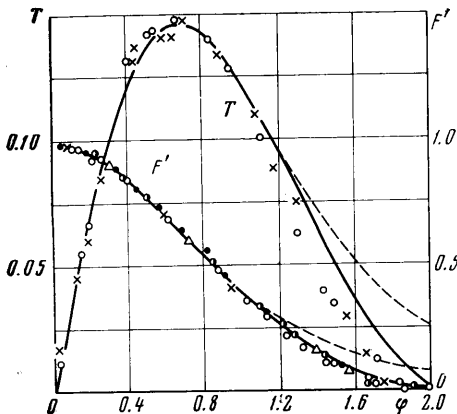
$$\kappa = 1/4 a \lambda, \quad \kappa = 1/2 \sqrt{a \varphi_T} \quad (2.9)$$

($\varphi_T = \delta_T / \delta$)

Здесь δ_T — эффективная, а δ — условная ширина струи. Значение φ_T можно приближенно принять равным $\varphi_T = 1.6$ (фиг. 1). (В этой точке ось φ пересекается прямой, касательной к профилю скорости в точке перегиба.) Заметим, что величина φ_T влияет на выбор постоянной c и, следовательно, только на оценку значений энергии отдельных компонент пульсаций (1.11).

Приведем также выражение для касательного напряжения трения τ

$$T = \tau x = \frac{1}{4I} \tau_1(\varphi), \quad \tau_1(\varphi) = \sqrt{f^e} F'' \quad (2.10)$$



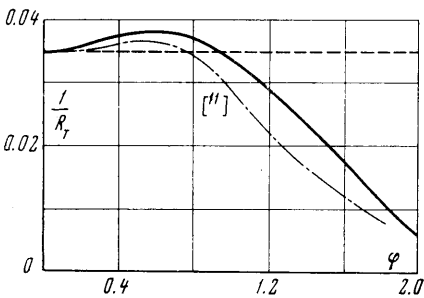
Фиг. 1. Распределение скорости и касательного напряжения трения

Уравнения (2.4) имеют следующие граничные условия:

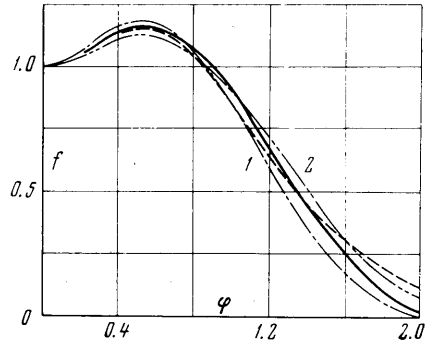
$$F = f' = 0, \quad F' = f = 1 \quad \text{при } \varphi = 0, \quad F' \rightarrow 0, \quad f \rightarrow 0 \quad \text{при } \varphi \rightarrow 0 \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.4) интегрировалась численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты. При заданном значении λ путем интегрирования находилось такое значение постоянной c , которое обеспечивало выполнение граничных условий при $\varphi \rightarrow \infty$ ($f \rightarrow 0$). Практически условие на бесконечности заменялось требованием обращения в нуль функции при некотором конечном значении φ_k . (В расчетах принималось $\varphi_k = 3$).

Для выполнения расчетов необходимо предварительно определить λ из опытных данных. Здесь основной интерес представляют собой работы Брэдбери [11] и Хескетта [12], в которых содержатся обстоятельные данные по пульсационной структуре



Фиг. 2. Распределение турбулентного числа Рейнольдса



Фиг. 3. Распределение пульсационной энергии

плоской струи. Значение опытных постоянных, найденные из этих работ, а также результаты последующих расчетов представлены в табл. 1.

Для примера приведем вычисление U_0 по данным работы [11]. В работе [11] найдено значение координаты, в которой

$$U = 0.5U_m, \quad y_{0.5} / x = 0.109$$

Из приведенного расчета с учетом профиля скорости в виде $F' = (\text{ch } \varphi)^{-2}$ (хорошо аппроксимирующего опытные данные в приосевой области) следует

$$y_{0.5} / x = 0.88a$$

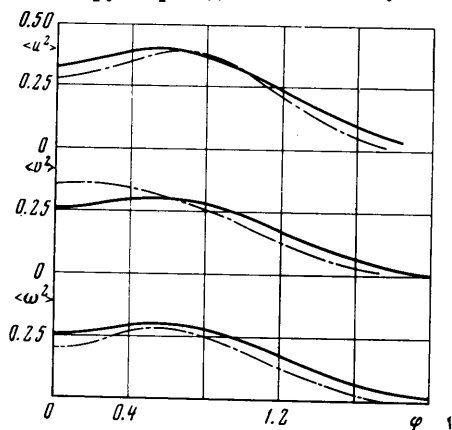
Сопоставляя обе формулы, найдем $a = 0.123$. Используя интегральное условие (2.2), получаем $U_0 = 2.46$; в работе [11] дано значение $U_0^* = 2.4$.

Результаты расчета представлены на фиг. 1—5. Расчетные линии по первой схеме 1° обозначены сплошной линией, по второй схеме 2° — пунктирной.

Таблица 1

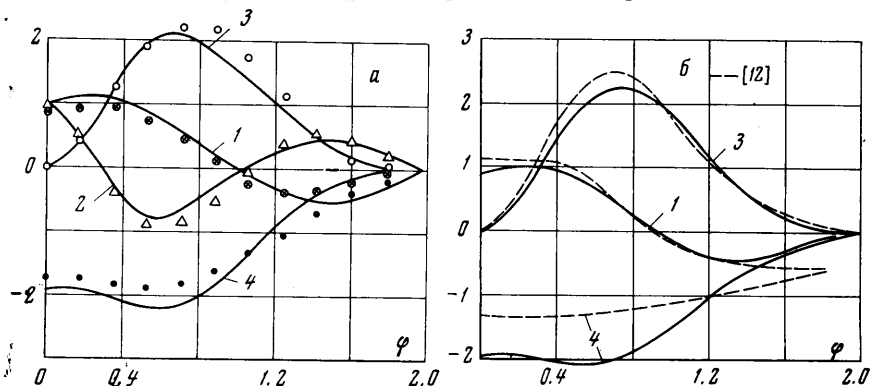
νT	1°		2°	
	[11]	[12]	[11]	[12]
U_0	2.46	2.75	2.46	2.75
E_0	0.42	0.525	0.42	0.525
λ		14.4		14.4
C		6.84		6.745
I		1.32		1.33
a	0.123	0.099	0.123	0.099
κ	0.117	0.094	0.022	0.020
C	0.058	0.37	0.175	0.126
$\langle u' \rangle / E$	0.80	0.76	0.91	0.80
$\langle v' \rangle / E$	0.60	0.63	0.55	0.60
$\langle w' \rangle / E$	0.60	0.63	0.55	0.60

На фиг. 1, 2 показано распределение средней скорости, касательного напряжения трения и турбулентного числа Рейнольдса $R_T = U_m \delta / \nu_T$. Видно, что расчет по первой схеме хорошо описывает опытные данные по средним полям (Брэдбери [11]), в то время как расчет по схеме Прандтля, как и в других случаях, на внешней границе струи приводит к заметному отклонению от эксперимента. Особенно это сказывается на распределении эффективной турбулентной вязкости по сечению струи, приведенном на фиг. 2.



Фиг. 4. Распределение энергии отдельных компонент пульсаций

сационной энергии (18). На фиг. 5, а, б в поперечном сечении струи. Видно, что в целом расчетные кривые и экспериментальные данные Брэдбери [11] (фиг. 5, а) удовлетворительно согласуются между собой. (Заметим, что на фиг. 5, а представлены данные, заимствованные из работы [11] (фиг. 19), умноженные на $U_m^* / \delta^* x^3 = 127$. Для соответствия отдельные члены в уравнении (1.8) умножены на x^3 .) Что касается данных Хескестада [12] (фиг. 5, б), то с экспериментом согласуется расчет производства энергии и конвективного пе-



Фиг. 5. Баланс пульсационной энергии: 1 — конвекция, 2 — диффузия, 3 — порождение, 4 — диссипация; а — сравнение с опытными данными Брэдбери, б — сравнение с опытными данными Хескестада

реноса. Для диссипативного и диффузионного членов расчетом и опытом, а также между опытами обоих авторов [11] и [12] заметно некоторое различие. Это связано с тем, что как диссипативный, так и диффузионный члены в сечении $x/d \approx 65$, где производились измерения, еще не достигли автомодельного состояния. На это указывает и сам автор (см. [12], стр. 15).

Заслуживает внимания то, что во внешней области струи (примерно от $\varphi_m \approx 0,6$, где φ_m — координата точки максимального значения порождения энергии) диссипация энергии компенсирует порождение, которое на оси равно нулю. Эти важные особенности, вытекающие из анализа экспериментальных данных, находят свое отражение в результатах расчета.

В табл. 2 приводится сопоставление интегральных значений отдельных членов в уравнении баланса энергии (1.8). Обе схемы расчета удовлетворительно согласуются с опытными значениями.

Диффузия энергии приводит только к перераспределению пульсационной энергии, поэтому интегральное значение диффузионного члена, как видно из табл. 2, равно нулю. (Заметим, что данные табл. 1 в [11] приводятся в табл. 2 увеличенными в $(\delta^* / \delta) (U_m / U_m^*)^3 = 1.04$ раза.)

3. Турбулентный след. Выполним расчет турбулентного следа за поперечно обтекаемым цилиндром. Исходные уравнения в этом случае имеют вид

$$U_n \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \right), \quad \nu_T = \sqrt{E} l$$

$$U_n \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial E}{\partial y} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c \frac{E \sqrt{E}}{l} \quad (3.1)$$

Дополним систему уравнений граничными условиями

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad U \rightarrow 0, \quad E \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

и интегральным условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_n U \, dy = C_x d \frac{U_n^2}{2} \quad (3.3)$$

где C_x — коэффициент сопротивления. В дальнейшем уравнения (3.1), (3.3) будут использоваться в безразмерном виде, причем в качестве мас-

Таблица 2

		Опыт [11]	Расчет	
			1°	2°
Конвекция	$\frac{a}{U_m^3} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U E \, dy$	-0.0040	-0.0041	-0.0039
Диффузия	$\frac{a}{U_m^3} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial E}{\partial y} \right) \, dy$	0	0	0
Порождение	$\frac{a}{U_m^3} \int_0^{\infty} \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y} \, dy$	-0.0175	-0.0167	-0.0164
Диссипация	$\frac{a}{U_m^3} \int_0^{\infty} c \frac{E \sqrt{E}}{l} \, dy$	+0.0215	+0.0208	+0.0203

штаба скорости и размера приняты соответственно скорость внешнего потока U_n и характерный размер тела d . Для коэффициента турбулентной вязкости в расчетах использована формула (1.6).

Переходя в автомодельной области течения к новым переменным

$$\frac{U}{U_m} = F(\varphi), \quad \frac{E}{E_m} = f(\varphi), \quad \varphi = \frac{y}{\delta} \quad (3.4)$$

из уравнений (3.1), (3.2) получаем

$$\sqrt{f}F' + \varphi F = 0, \quad 2f + \varphi' + (\sqrt{f}f')' + \lambda\sqrt{f}(F')^2 - C\sqrt{f} = 0 \quad (3.5)$$

($F = f = 1, f' = 0$ при $\varphi = 0, F \rightarrow 0, f \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$)

$$\frac{\nu_T U_m}{U_m' \delta^2} = -1, \quad \nu_T = \sqrt{E}l, \quad \lambda = \frac{U_m^2}{E_m}, \quad U_m \delta I = \frac{C_x}{2} \quad (3.6)$$

$$I = 2 \int_0^\infty F d\varphi, \quad c = C\kappa^2, \quad \kappa = \frac{l}{\delta}$$

Используя соотношение (3.6), найдем

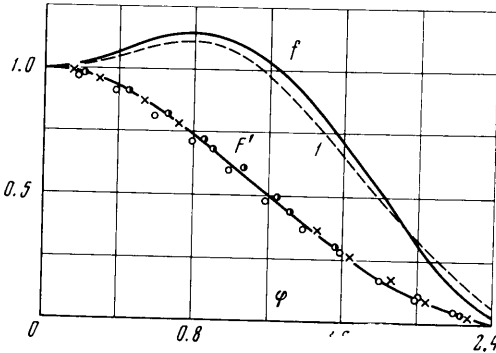
$$U_m = \frac{U_0}{\sqrt{x}}, \quad E_m = \frac{E_0}{x}, \quad \delta = a\sqrt{x}, \quad a = \frac{C_x}{2IU_0}, \quad \kappa = \frac{C}{4IU_0\sqrt{E_0}}$$

Для дальнейшего расчета необходимо использовать опытные данные. Результаты обстоятельного эксперимента по изучению структуры турбулентного следа за цилиндром содержатся в работах Таунсенда [13]. Значения постоянных C_x, U_0, E_0 , найденные из опытов [13], равны

$$C_x = 0.842, \quad U_0 = 0.93 \\ E_0 = 0.10$$

Интегрирование уравнений (3.5) выполнялось так же, как и в задаче о плоской струе. При этом были найдены следующие значения иско- мых постоянных:

$$C = 3.104, \quad I = 2.44, \quad a = \\ = 0.180, \quad \kappa = 0.283, \quad c = 0.25$$

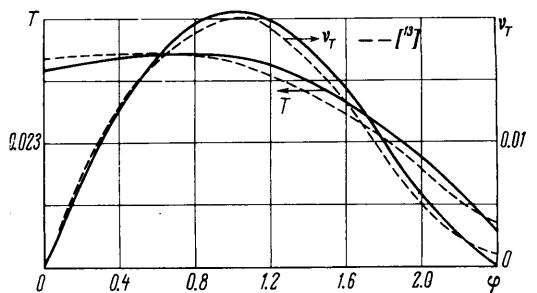


Фиг. 6. Распределение средней скорости и пульсационной энергии в турбулентном следе

пределение средней скорости и среднекинетической энергии пульсации (фиг. 6), касательного напряжения трения $T = \tau x$ и турбулентной вязкости ν_T (фиг. 7).

Расчетное распределение отдельных членов в уравнении баланса пульсационной энергии не приводится, так как соответствующие экспериментальные данные в автомоделной области отсутствуют. Измерения Таунсенда (см. [13], фиг. 7.20) относятся к области, в которой все члены в уравнении баланса энергии, за исключением порождения энергии, еще не достигли автомоделности (см. фиг. 7.3, 7.4 в [13]).

4. Заключение. Выполненные расчеты приводят к следующему выводу. При замыкании уравнений Рейнольдса для среднего движения и уравнений для рейнольдсовых напряжений применительно к развитым свободным струйным течениям (при помощи гипотезы Колмогорова и градиентного представления переноса количества движения и пульсационной энергии с одним из выражений для коэффициента турбулентной вязкости) результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными как по средним характеристикам, так и по балансу пульсационной энергии. При



Фиг. 7. Распределение касательного напряжения трения и турбулентной вязкости

этом дополнительно к одной опытной постоянной, необходимой для замыкания уравнений автомодельного осредненного движения [1, 2], расчет пульсационных характеристик требует введения еще одной эмпирической константы, входящей в выражение диссипации энергии.

Расчет по первой схеме несколько лучше описывает опытные данные, чем расчеты по второй схеме. В последнем случае сравнительно незначительное расхождение между опытом и расчетом во внешней области струи может быть устранено введением в формулу ν_T (1.7) коэффициента перемежаемости γ .

Заметим также, что сопоставление расчета и опыта по балансу энергии показывает, что в рассмотренных случаях перенос пульсационной энергии посредством диффузии осуществляется главным образом диффузией градиентного типа, обусловленной мелкомасштабной турбулентностью, а не конвекцией при крупномасштабных движениях [3, 13].

Поступило 2 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
4. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, № 1—2.
5. Rotta J. Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz. 1. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr 5.
6. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
7. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1965, № 4.
8. Джаугаштин К. Е. Баланс пульсационной энергии в плоской струе. III Всесоюзный съезд механиков, Сб. аннотаций, М., «Наука», 1968.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
10. Rotta J. Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz, 2. Z. Physik, 1951, Bd 131, Nr 1.
11. Bradbury L. J., The structure of a self-preserving turbulence plane jet. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 1, pp. 31—64.
12. Хескестад Г. Измерения термоанемометром в плоской турбулентной струе. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Прикл. механ., Сер. E, 1965, т. 32, № 4.
13. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
14. Джаугаштин К. Е. Распределение пульсационной энергии в осесимметричной турбулентной струе электропроводящей жидкости, распространяющейся в продольном магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1968, № 4, стр. 64—70.