

ФРОНТЫ РЕКОМБИНАЦИИ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. БАРМИН

(Москва)

Рассматривается вопрос о полной системе граничных условий на разрывах рекомбинации в газе, находящемся в магнитном поле, которое произвольно ориентировано по отношению к поверхности разрыва. Здесь, как и для ионизирующих ударных волн [1-3], возможны случаи, когда для решения граничных задач недостаточно граничных условий, следующих из законов сохранения, и необходимо использовать дополнительные граничные условия, которые вытекают из требования существования непрерывного решения, представляющего собой структуру волны. Вопрос о дополнительных соотношениях в случае магнитного поля, параллельного фронту волны, рассматривался в работе [2]. Некоторые результаты для произвольно ориентированного поля приведены в работе [6]. В данной работе определены число и характер соотношений, необходимых для существования структуры различных типов разрывов рекомбинации при учете всех диссипативных коэффициентов. Показано, что если проводимость является монотонной возрастающей функцией одной температуры, то сверхзвуковые разрывы рекомбинации не имеют структуры. Подробно рассмотрен случай, когда отличны от нуля только коэффициенты магнитной и второй гидродинамической вязкости. Когда магнитная вязкость много больше гидродинамической, дополнительные соотношения получены в явном виде.

1. Рассматривается структура разрывов рекомбинации в газе, электропроводность которого является функцией температуры и плотности газа $\sigma = \sigma(\rho, T)$, причем $\sigma = 0$ в некоторой области значений ρ и T , граница которой задается уравнением $F(\rho, T) = 0$. Структура разрыва рекомбинации описывается стационарным решением той же системы уравнений, что и ионизирующие ударные волны. Отличие заключается в том, что здесь в состоянии перед разрывом $\sigma > 0$ и за разрывом $\sigma = 0$. Поэтому, интегральная кривая, представляющая собой решение, соединяет одну из магнитогидродинамических особых точек A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) с одной из газодинамических особых точек A^j ($j = 1, 2$), в противоположность случаю ионизирующих ударных волн. Проводя исследование структуры аналогично работе [5], найдем различные типы разрывов рекомбинации, определяемые соотношением между скоростями газа и скоростями малых возмущений до и после разрыва, а также число и характер дополнительных соотношений на них. Результаты исследования представлены в виде следующей схемы:

	u_2					
A^1		$\frac{4}{-1}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	
a_0						
A^2		$\frac{3}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{3}$	
						$\rightarrow u_1$
		A_4	a_-	A_3	a_A	A_2
						a_+
						A_1

Здесь u_1 и u_2 — нормальные составляющие скорости газа относительно разрыва перед и за ним, a_+ , a_A , a_- — скорости распространения быстрых, альфвеновских и медленных возмущений перед разрывом, a_0 — газодинамическая скорость звука за разрывом; верхняя цифра указывает число дополнительных соотношений, а нижняя — число параметров, характеризующих такую волну, если состояние, по которому распространяется волна, задано. На осях обозначены также особые точки A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

характеризующих такую волну, если состояние, по которому распространяется волна, задано. На осях обозначены также особые точки A_i ($i = 1, 2, 3, 4$)

и A^j ($j = 1, 2$), соответствующие состояниям перед и за фронтом рекомбинации. Например, для существования непрерывного перехода $A_1 A^1$ ($u_1 > a_+$, $u_2 > a_0$) необходимо выполнение одного дополнительного условия. Если такая волна рекомбинации распространяется по заданному состоянию, то для определения всех величин за ней необходимо задать скорость волны и еще один параметр, например изменение магнитного поля. При наличии трех дополнительных соотношений разрывы рекомбинации распространяются по заданному состоянию газа с заданным магнитным полем с определенной скоростью. В случае перехода $A_4 A^1$ должно выполняться четыре дополнительных соотношения. Поэтому величины перед волной не могут быть заданы произвольно, а должны быть связаны одним соотношением. Так как разрыв распространяется со скоростью, меньшей a_- , то в конкретных задачах выполнение этого условия обеспечивается волной, распространяющейся впереди этого разрыва рекомбинации.

Легко видеть, что для существования непрерывного решения, соединяющего A_i с A^j , необходимо выполнение $i - j + 1$ дополнительных соотношений. Так как из законов сохранения вытекает семь соотношений, то полное число граничных условий на разрыве, соответствующем переходу $A_i A^j$, равняется $i - j + 8$.

С другой стороны, легко подсчитать, что число параметров, характеризующих волны малых возмущений, уходящие от разрыва в состояние перед фронтом A_i , равно $i - 1$, а в состояние за фронтом A^j оно равно $8 - j$.

Таким образом, полное число параметров на волнах, уходящих от разрыва $A_i A^j$, равно $i - j + 7$. Учитывая, что возмущение скорости разрыва также неизвестно, получаем что число граничных условий на фронте рекомбинации равно числу неизвестных параметров, определяющих уходящие от фронта волны. Это и означает, что все рассматриваемые здесь разрывы рекомбинации являются эволюционными с учетом дополнительных соотношений, вытекающих из требования существования структуры.

Отметим, что особая точка $A^1[u(A_1) > a_0]$ является узлом, в который входят интегральные кривые при возрастании x . Поэтому сверхзвуковое состояние за разрывом возможно, только когда точка A^1 принадлежит границе области $\sigma = 0$ и в нее можно попасть по магнитогиродинамической интегральной кривой из области $\sigma > 0$.

Таким образом, одним из дополнительных соотношений для сверхзвуковых разрывов рекомбинации ($u_2 > a_0$) является условие $F(\rho_2 T_2) = 0$.

Можно показать, что в любой точке A поверхности газодинамических особых точек [5], не совпадающих с A_i , вдоль магнитогиродинамической интегральной кривой температура достигает максимума. Если $\sigma = \sigma(T)$ и $d\sigma/dT > 0$, то точка A не может соответствовать состоянию за сверхзвуковой волной рекомбинации, так как невозможно подойти к этой точке по магнитогиродинамической интегральной кривой из области $\sigma > 0$. Следовательно, в случае, когда электропроводность газа является возрастающей функцией одной температуры, сверхзвуковые разрывы рекомбинации не имеют структуры.

2. Выше рассматривалась только принципиальная возможность существования различного типа волн. В газах с заданными физическими свойствами некоторые из типов перечисленных волн могут не осуществляться.

Исследуем структуру волн рекомбинации, когда первая вязкость и теплопроводность равны нулю ($\mu = k = 0$), а проводимость есть возрастающая функция только одной температуры. В этом случае система уравнений, описывающих структуру волн для совершенного газа, имеет вид

$$\frac{dh_y}{dx} = \frac{mV_0}{v_m} [h_y(V - 1) + E], \quad \frac{dh_z}{dx} = \frac{mV_0}{v_m} h_z(V - 1) \quad \left(v_m = \frac{c^2}{4\lambda\sigma} \right) \quad (2.1)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{m}{\mu_1 V} [(\gamma + 1)V^2 + \gamma h^2(V - 1) + h^2 + 2(\gamma - 1)Eh_y - 2\gamma JV + 2(\gamma - 1)\mathcal{E}] \quad (2.2)$$

$$2T = V^2 + h^2(V - 1) + 2Eh_y - 2JV + 2\mathcal{E} \quad (h^2 = h_y^2 + h_z^2) \quad (2.3)$$

$$u_y \equiv \frac{u_y'}{a_A} = \frac{h_y}{\sqrt{V}} \quad u_z \equiv \frac{u_z'}{a_A} = \frac{h_z}{\sqrt{V}} \quad \left(h_y = \frac{H_y}{H_x}, h_z = \frac{H_z}{H_x} \right) \quad (2.4)$$

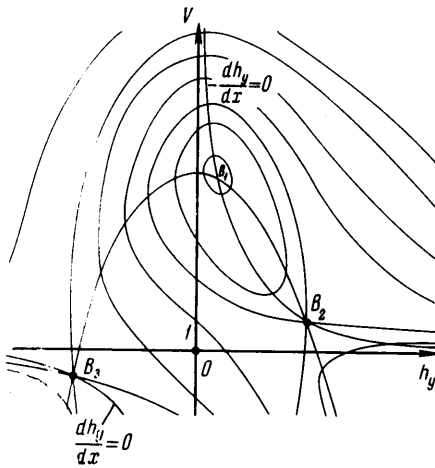
$$V = \frac{V'}{V_0}, \quad T = \frac{c_v T'}{m^2 V_0^2}, \quad J = \frac{J'}{m^2 V_0}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}'}{m^2 V_0^2}, \quad E = \frac{cE_z}{mV_0 H_x},$$

$$V_0 = \frac{H_x^2}{4\pi m^2} \quad (2.5)$$

Здесь ν_m, μ_1 — коэффициенты магнитной вязкости и второй гидродинамической вязкости; m — поток массы; I, \mathcal{E} — безразмерные потоки x -й составляющей импульса и энергии; V, T — безразмерные удельная плотность и температура; h_y, h_z, E — безразмерные касательные компоненты вектора напряженности магнитного и электрического поля; u_y, u_z — безразмерные касательные составляющие скорости.

Система координат выбрана таким образом, что потоки y -й и z -й составляющих импульса и y -й составляющая электрического поля равны нулю, а $E < 0$.

Рассмотрим трехмерное пространство (h_y, h_z, V) . Поверхность газодинамических особых точек Σ задается уравнением, получаемым при обращении в нуль правой части уравнения (2.2). Вид этой поверхности, расположение магнито-гидродинамических особых точек



Фиг. 1

A_i и поведение интегральных кривых рассматривались в [7, 5]. Отметим, что все A_i лежат в плоскости $h_z = 0$, а поверхность Σ является совокупностью окружностей в плоскостях $V = \text{const}$ с центрами, лежащими на гиперболе

$$h_z = 0, \quad h_y[\gamma(V - 1) + 1] + (\gamma - 1)E = 0 \quad (2.6)$$

Из (2.3) следует, что сечения поверхностей $T(h_y, h_z, V) = \text{const}$ плоскостями $V = \text{const}$ тоже являются окружностями, центры которых лежат на гиперболе, уравнение которой получается, при обращении в нуль правых частей (2.1) и (2.2)

$$h_z = 0, \quad h_y(V - 1) + E = 0 \quad (2.7)$$

Таким образом, в точках этой гиперболы поверхности семейства $T = \text{const}$ касаются плоскостей $V = \text{const}$. Учитывая сказанное выше, рассмотрим семейство $T = \text{const}$ на плоскости $h_z = 0$.

При

$$8(J - 1)^3 > 27E^2 \quad (2.8)$$

рассматриваемое семейство линий имеет три особые точки, лежащие на гиперболе (2.7). Пусть $V(B_1) > V(B_2) > V(B_3)$, тогда B_1 — изолированная особая точка, соответствующая минимуму T , а B_2 и B_3 — узлы, причем $V(B_2) > 1 > V(B_3)$. При $27E^2 > 8(J-1)^3$ (2.9) имеется одна особая точка при $V < 1$. Для случая неравенства (2.8) линии семейства изображены на фиг. 1.

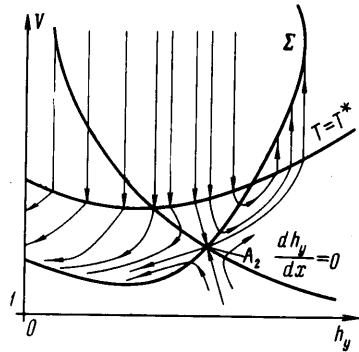
Можно показать, что

$$\begin{aligned} V(B_1) > V(A_i) > V(B_2) \quad (i = 1, 2) \\ V(B_3) > V(A_i) \quad (i = 3, 4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая, что A_i и B_i лежат на одной и той же гиперболе (2.7), легко получить вид взаимного расположения поверхностей Σ и $T = \text{const}$. Так как точки A_1 и A_2 лежат на гиперболе всегда между точками B_1 и B_2 , то при выполнении условия (2.9) A_1 и A_2 тоже отсутствуют. Как указывалось, градиент к поверхности $T = \text{const}$ в точке A_i направлен вдоль оси V , а в силу неравенства (2.10) он отрицателен. Выше было показано, что сверхзвуковые разрывы рекомбинации не имеют места.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании структуры для дозвуковых волн рекомбинации. Пусть T_* — температура, при которой включается проводимость, т. е. $\sigma = 0$ при $T < T_*$. Если точка A_1 или точка A_2 при $u(A_2) > a_0(A_2)$ лежит в области $\sigma > 0$, то поверхность $T(h_y, h_z, V) = T_*$ лежит выше A_i ($i = 1, 2$) и дозвуковая часть поверхности Σ находится в области $\sigma > 0$. Таким образом, разрывы рекомбинации, соответствующие переходам A_1A^2 или A_2A^2 , когда $u(A_2) > a_0$, не имеют места.

Поверхность Σ , $T = T_*$ и интегральные кривые в окрестности точки A_2 изображены в случае $u(A_2) < a_0$ на фиг. 2. Здесь третье собственное направление является выходящим при возрастании x . Вдоль интегральных кривых внутри области Σ производная $dV/dx < 0$, вне этой области производная $dV/dx > 0$. В области между ветвями гиперболы (2.7) производная $dh_y/dx < 0$, вне этой области производная $dh_y/dx > 0$. Отсюда видно, что для существования непрерывного решения, соединяющего A_2 с A^2 , компоненты магнитного поля в состоянии A_2 должны принадлежать проекции на плоскость $V = \text{const}$ линии пересечения поверхности интегральных кривых, выходящих из A_2 , и поверхности $T = T_*$.



Фиг. 2

$$h_{y2} - h_{y1} = \varphi(h_{z2}; V_1, h_{y1}, v_m, \mu_1) \quad (2.11)$$

Кроме того, для существования структуры должно выполняться неравенство, которое указывает, что хотя бы часть линии (2.11) лежит внутри проекции звуковой линии на плоскость $V = \text{const}$.

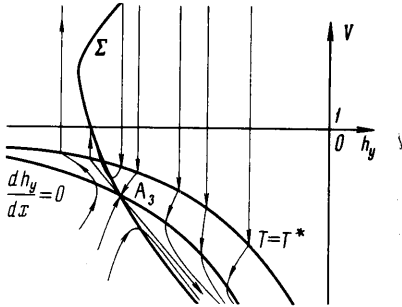
В случае $v_m \gg \mu_1$ указанная линия переходит в линию пересечения Σ и $T = T_*$, а условие (2.11) может быть записано в параметрической форме

$$h^2 = 2\{[(\gamma - 2)\vartheta - (\gamma - 1)T_*]V^{-1} + J - V\} \quad (2.12)$$

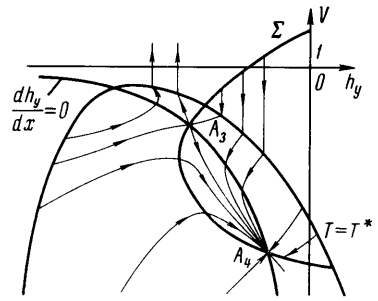
$$Eh_y = \gamma T_* - (\gamma - 1)\vartheta + J - V + 1/2V^2 + [(\gamma - 2)\vartheta - (\gamma - 1)T_*]V^{-1}$$

В этом случае указанное выше неравенство имеет место. Рассматриваемая волна рекомбинации является волной разрежения.

Картина интегральных кривых, поверхностей Σ и $T = T_*$ изображена для $u(A_3) < a_0$ на фиг. 3, для $u(A_3) > a_0$ — на фиг. 4. В этом случае только одно собственное напряжение является выходящим. Из фиг. 3 следует, что возможно непрерывное решение, соединяющее A_3 с A^2 , при этом должны выполняться два дополнительных соотношения, определяющих изменение обеих компонент магнитного поля в волне. Это $\Delta h_z = 0$ и соотношение (2.11). Они задают значения h_y и h_z точки пересечения интегральной кривой, выходящей из A_3 , с поверхностью $T = T_*$. В случае $v_m \gg \mu_1$ второе соотношение переходит в соотношение (2.12). Здесь также имеет место



Фиг. 3



Фиг. 4

ограничение в виде неравенства, аналогичного случаю волны A_2A^2 . В случае $u(A_3) > a_0$ (фиг. 4) интегральная кривая, выходящая из A_3 , пересекает дозвуковую часть Σ в точке A_4 и лежит целиком в области $\sigma > 0$. Поэтому в этом случае непрерывное решение A_3A^2 невозможно.

В рассматриваемом случае в точке A_4 все три собственных направления являются входящими при возрастании x . Поэтому медленные волны рекомбинации в этом приближении не имеют структуры. Таким образом, когда коэффициенты первой вязкости и теплопроводности равны нулю, а проводимость является возрастающей функцией одной температуры, в совершенном газе возможны только два типа разрывов рекомбинации: сверхальфвеновский с $a_0 > u_1 > a_A$, $u_2 < a_0$ и доальфвеновский с $u < a_A$ и $u_2 < a_0$. На сверхальфвеновском разрыве должно выполняться одно, а на доальфвеновском — два дополнительных соотношения, вытекающих из требования существования структуры. В случае $v_m \gg \mu_1$ эти соотношения получены здесь в явном виде.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О магнитогидродинамических ударных волнах, ионизирующих газ. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 1.
2. Butler D. S. One dimensional flow an ionizing gas. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 1.
3. Taussig R. T. Comparison of oblique, normal and transverse ionizing shock waves. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 6.
4. Cowley M. D. Gas-ionizing shocks in magnetic field. J. Plasma Phys., 1967, vol. 1, No. 1.
5. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, понизиющих газ, при наличии произвольно ориентированного магнитного поля. Проблемы гидромеханики и механики сплошных сред, М., «Наука», 1969, стр. 36–48.
6. Куликовский А. Г. О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
7. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962, стр. 203.