О ВЛИЯНИИ ФЛУКТУАЦИЙ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ НА ФОРМУ СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В КРАЙНЕЙ КОРОТКОВОЛНОВОЙ ОБЛАСТИ

Б. С. КЕЛЛЕР, А. М. ЯГЛОМ

(*Москва*)

В соответствии с представлениями, развитыми А. Н. Колмогоровым и А. М. Обуховым, предполагается, что значения спектра локально-изотропной турбулентности с большим числом R в фиксированной малой пространственно-временной области определяются коэффициентом вязкости и местным значением скорости диссипации энергии ε, причем это последнее значение само подвержено значительным случайным флуктуациям. Распределение вероятностей величины ε при больших R следует считать логарифмически нормальным. Показывается, что характер затухания осредненного спектра при стремлении волнового числа к бесконечности определяется именно распределением вероятностей флуктуаций диссипации энергии и практически не зависит от неизвестного характера затухания спектра при фиксированном значении ε. Получена явная формула для формы осредненного спектра в области очень больших волновых чисел, показывающая, что его затухание является промежуточным между степенным и экспоненциальным затуханием и замедляется при возрастании числа Рейнольдса.

1. Согласно основным представлениям теории локально-изотропной турбулентности, развитой в начале 40-х годов А. Н. Колмогоровым [1, 2] и А. М. Обуховым [3], во всех течениях с достаточно большим числом Рейнольдса $R = UL / \nu$ статистические свойства мелкомасштабных пульсаций скорости (с масштабами, много меньшими характерного масштаба длины L всего течения) обладают определенной универсальностью. Эти статистические свойства не зависят ни от геометрических параметров течения (и потому обладают пространственной изотропией), ни непосредственно от времени, а определяются лишь двумя размерными параметрами — кинематическим коэффициентом вязкости ν и средним притоком энергии $\langle\varepsilon\rangle$ от осредненного течения и совокупности крупномасштабных возмущений. Величина $\langle\varepsilon\rangle$, которая может изменяться во времени, равна средней скорости диссипации энергии турбулентности (т. е. средней кинетической энергии, переходящей в тепло за единицу времени в единице массы жидкости); для краткости будем в дальнейшем называть ее просто средней диссипацией энергии. Из параметров ν и $\langle\varepsilon\rangle$ можно единственным образом составить масштабы длины η и скорости v_η

$$\eta = (\nu^3 / \langle\varepsilon\rangle)^{1/4}, \qquad v_\eta = (\nu\langle\varepsilon\rangle)^{1/4} \tag{1.1}$$

и все статистические характеристики мелкомасштабных пульсаций должны универсально выражаться через эти масштабы. В частности

$$E(k) = C_1\langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}\varphi(k\eta) \qquad \text{при} \qquad k \ll 1 / L \tag{1.2}$$

Здесь $E(k)$ — трехмерный спектр турбулентности; $\varphi(x)$ — универсальная функция, а C_1 — универсальная постоянная, включение которой в правую часть (1.2) позволяет считать, что $\varphi(0) = 1$. Точно так же продольный и поперечный одномерные спектры турбулентности $E_1(k)$ и $E_2(k)$, которые в изотропном случае связаны друг с другом и с $E(k)$ соотношениями

$$E(k)=\frac{1}{2}k^3\frac{d}{dk}\left[\frac{1}{k}\frac{d}{dk}E_1(k)\right],\qquad E_2(k)=-\frac{1}{2}k^2\frac{d}{dk}\left[\frac{1}{k}E_1(k)\right] \tag{1.3}$$

при $k \ll 1/L$ могут быть представлены в виде

$$E_1(k)=C_2\langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}\varphi_1(k\eta),\qquad E_2(k)=C_2'\langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}\varphi_2(k\eta) \tag{1.4}$$

$$C_2={}^{18}/_{55}C_1,\qquad C_2'={}^{24}/_{55}C_1={}^4/_3C_2 \tag{1.5}$$

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)-{}^{39}/_{55}x\varphi_1'(x)+{}^9/_{55}x^2\varphi_1''(x),\qquad \varphi_2(x)=\varphi_1(x)-{}^3/_8x\varphi_1'(x) \tag{1.6}$$

Обе функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определены так, что удовлетворяются условия $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=1$. При $x=k\eta\ll 1$, когда функции $\varphi(k\eta)$, $\varphi_1(k\eta)$ и $\varphi_2(k\eta)$ можно считать равными единице, формулы (1.2) и (1.4) переходят в известные «законы пяти третей», справедливые в инерционном интервале $1/L\ll k\ll 1/\eta$ (см. гл. 8 монографии [4]).

Однако намеченная выше общая теория не может быть абсолютно точной. Дело в том, что в ней учитывается только влияние средней диссипации энергии $\langle\varepsilon\rangle$, но не принимается во внимание, что величина

$$\varepsilon(\mathbf{x},t)=\frac{\nu}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{1.7}$$

представляет собой случайную функцию времени и пространственных координат, подверженную значительным флуктуациям, также как-то воздействующим на статистический режим мелкомасштабных пульсаций скорости. Так как каскадный процесс переноса энергии по спектру возмущений различных масштабов имеет фиксированное направление (от бо́льших масштабов к меньшим), и потому не подчиняется принципу детального равновесия, то флуктуации притока энергии должны, вообще говоря, непрерывно увеличиваться по мере уменьшения масштаба. В результате уровень флуктуаций величины ε будет возрастать с ростом отношения L/η (пропорционального $R^{3/4}$; см. [4], раздел 21.3) и при большом R будет наблюдаться резкая перемежаемость поля $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ — в одних объемах жидкости эта величина будет принимать гораздо большие значения, чем в других. Но статистический режим мелкомасштабных пульсаций скорости в фиксированном элементе объема, очевидно, может зависеть лишь от локального значения ε; следовательно, этот режим будет неодинаков в различных точках и в различные моменты времени. После же осреднения по всем значениям $\varepsilon(\mathbf{x},t)$ результат, очевидно, уже будет зависеть и от статистических характеристик этого поля, т. е. от числа Рейнольдса R, и не будет вполне универсальным.

Изложенные соображения легли в основу уточнения представлений о локальном строении турбулентности при больших числах Рейнольдса, намеченного А. Н. Колмогоровым [5] и А. М. Обуховым [6] через 20 лет после появления их первоначальной теории. Одновременно Грант, Стюарт и Моильет [7] в ходе непосредственных измерений спектров турбулентности в океане (при числе Рейнольдса, рассчитанном по глубине пролива и средней скорости течения, порядка $3\cdot10^8$) на опыте убедились в резкой перемежаемости и изменчивости значений ε. Так как эти измерения вместе с тем выявили высокую степень точности предсказаний теории локально-изотропной турбулентности (и, в частности, «законов пяти третей»), то авторы работы [7] заключили, что влияние флуктуаций в реальных условиях должно быть сравнительно небольшим; это свое заключение они попытались обосновать, рассмотрев простую модель спектра $E(k)$ и плотности вероятности ε и показав, что в этой модели осреднение по значениям ε мало меняет спектр турбулентности. Позже Е. А. Новиков [8] разобрал некоторые более общие модели того же типа и нашел, что дополнительное осреднение по значениям ε обычно мало меняет значения спектра в инерционном интервале (и полностью сохраняет здесь форму спектра), но может кардинально изменить форму спектра в области очень больших волновых чисел, например превратить экспоненциальное затухание $E(k)$ при $k\to\infty$ в степенное (см. также [4], раздел 25.1).

Приведенные в [7, 8] расчеты относились к сугубо схематическим модельным примерам. Более реальные предположения о статистическом режиме пульсаций диссипации энергии $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ были высказаны в работах [5, 6], в которых было предположено следующее: а) локальные статистические характеристики пульсаций скорости заданного масштаба $r \ll L$ определяются величинами ν и ε_r, где ε_r — значение $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$, осредненное по некоторому объему диаметра r, и б) распределение вероятностей случайной величины ε_r является логарифмически нормальным со средним значением $\langle\varepsilon\rangle$ и дисперсией $\sigma_{\varepsilon_r}{}^2$, пропорциональной $(L/r)^\mu$, где μ — положительная постоянная, а распределение вероятностей неосредненных значений $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ — логарифмически нормальное с тем же средним значением и дисперсией $\sigma_\varepsilon{}^2$, пропорциональной $(L/\eta)^\mu$. Предположение б) в случае достаточно большого R следует из кажущегося естественным допущения об автомодельности в инерционном интервале масштабов каскадного процесса переноса энергии по спектру турбулентных возмущений (см. [9, 10], а также [4], раздел 25.3). Это предположение хорошо согласуется также и с данными измерений спектров пульсаций некоторых родственных ε характеристик турбулентности [11, 12]; она неплохо подтверждается для широкого диапазона значений и результатами имеющихся измерений моментов и плотностей вероятности близких к ε величин [10, 13, 14] [1]. Приведенные в перечисленных работах данные позволяют также приближенно оценить значение μ: они показывают, что, по-видимому, $\mu \approx 0.3 \div 0.5$. Поэтому представляется целесообразным более подробно проанализировать влияние флуктуаций ε на форму статистических характеристик турбулентности, приняв указанные выше предположения о статистическом режиме этих флуктуаций.

В части, относящейся к инерционному интервалу, эта задача была решена еще в работах [5, 6, 9]. Согласно полученным там результатам флуктуации величин ε и ε_r должны привести к небольшим вариациям числовых коэффициентов в «законах пяти третей» для спектров и к уменьшению показателя $-5/3$ в этих законах на величину порядка нескольких сотых, лежащую за пределами доступной точности измерений. Так как, однако, модельные расчеты показывают (см. [8]), что в крайней коротковолновой области $k \gg 1/\eta$ влияние флуктуаций диссипации на спектр турбулентности может оказаться более существенным, чем в инерционном интервале, то кажется заслуживающим внимания исследование и этого влияния, опирающееся на какие-то сравнительно реальные предположения.

При $k > 1/\eta$ (где η определяется формулой (1.1), т. е. вычисляется по $\langle\varepsilon\rangle$) осреднение значений $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ по объему диаметра $r = 1/k < \eta$ не будет играть большой роли. Поэтому в данном случае можно просто воспользоваться формулами (1.2) или (1.4), в которых величина $\langle\varepsilon\rangle$ заменяется локальным значением ε, а затем осреднить эти формулы по плотности логарифмически нормального распределения

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\varepsilon} \exp\left[-\frac{(\ln\varepsilon - m)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{1.8}$$

$$\sigma^2 = \langle(\ln\varepsilon - \langle\ln\varepsilon\rangle)^2\rangle = A + \mu\ln(L/\eta) = A_1 + {}^3/_4\mu\ln R$$

$$m = \langle\ln\varepsilon\rangle = \ln\langle\varepsilon\rangle - \sigma^2/2 \tag{1.9}$$

(ср. [4], раздел 25.3). При этом, однако, возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что получаемый результат должен, как кажется, существенно зависеть от выбора функций $\varphi(x)$ в формуле (1.2) (или функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в (1.4)), а вид всех этих функций пока известен очень плохо. Данные измерений позволяют кое-что сказать лишь о значениях $\varphi_1(x)$ при $x \lesssim 1$ (причем вопрос о степени влияния на эти данные флуктуаций ε остается совсем не изученным); имеющиеся же теории (ни одна из которых не учитывает флуктуаций ε) все опираются на некоторые не-

[1] Дополнительные данные, согласующиеся со сформулированным предположением, содержатся в докладах К. Гибсона и др. (Gibson C. H., Stegen G. R., Williams R. B. Statistics of the fine structure of turbulent velocity and temperature fields measured at high Reynolds number.) и Р. Стюарта и др. (Stewart R. W., Wilson J. R., Burling R. W. Some statistical properties of small-scale turbulence in an atmospheric boundary layer.), сделанных на симпозиуме по турбулентности в Сиэтле, США, 23—27 июня 1969 г., и в подготовленной к печати работе К. Гибсона и др. (Gibson C. H., Stegen G. R., McConnell S. Measurements of the universal constant in Kolmogoroff's third hypothesis for high Reynolds number turbulence.)

достаточно обоснованные предположения и приводят к целому ряду резко отличающихся друг от друга формул для $\varphi(x)$ (см., например, работу [15], посвященную полуэмпирическим теориям спектрального переноса энергии: более физический подход к той же задаче разобран в [16, 17] и [4], раздел 22.3).

Существенно, что все заслуживающие внимания теории приводят к одинаковому выводу, что $\varphi(x)$ быстро затухает при $x \to \infty$. Исходя из этого, Эллисон в качестве примера рассмотрел вопрос о влиянии на $E(k)$ флуктуаций диссипации энергии (описываемых плотностью вероятности (1.8)), предположив, что фиксированному значению ε отвечает простейший «обрывающийся пятитретевый спектр» (т. е. что $\varphi(x) = 1$ при $x \leqslant b$ и $\varphi(x) = 0$ при $x > b$ для некоторого $b > 0$)[1]. Осреднение по множеству возможных значений ε приводит к дополнительному «размазыванию» спектра; поэтому неудивительно, что для осредненного спектра $E(k)$ в этой работе получилась формула, соответствующая некоторой, зависящей от σ^2 (т. е. от R), функции $\varphi(x)$, нигде уже не обращающийся в нуль (см. ниже формулу (2.10)). Согласно Эллисону, получающийся вид спектра $E(k)$ при разумном выборе входящих в него параметров оказывается довольно близким к данным приведенных в [7] измерений. Поскольку модель обрывающегося пятитретевого спектра кажется все же очень грубой, авторами была рассмотрена более реальная модель, согласно которой при отсутствии флуктуаций диссипации

$$\varphi(x) = \exp(-\alpha x^2), \qquad \alpha > 0$$

В этом случае формула для осредненного спектра $E(k)$ имеет сложный вид; однако асимптотическое поведение $E(k)$ при $k \gg 1/\eta$ здесь описывается относительно несложным выражением (затухающим при $x = k\eta \to \infty$ много медленнее, чем $\exp(-\alpha x^2)$). После того как это выражение было сравнено с выводами работы Эллисона, относящимися к значениям $k \gg 1/\eta$, оказалось, что порядок затухания $E(k)$ при $k\eta \to \infty$ в обеих рассмотренных моделях является одинаковым. Последнее обстоятельство позволило надеяться, что поведение осредненного спектра в крайней коротковолновой области $k \gg 1/\eta$ при наличии флуктуаций диссипации энергии ε, имеющих логарифмически нормальное распределение вероятностей, будет мало зависеть от деталей поведения спектра при фиксированном ε; это соображение и послужило исходным пунктом исследования, результаты которого будут изложены ниже.

2. Итак, предположим, что при фиксированном значении ε спектр $E(k) = E(k; \varepsilon)$ задается формулой вида (1.2), где $\langle\varepsilon\rangle$ заменено на ε, а η — на $\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4}$. Рассмотрим осредненный спектр

$$E(k) = \langle E(k; \varepsilon)\rangle = \int_0^\infty E(k; \varepsilon) P(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{2.1}$$

где плотность вероятности $P(\varepsilon)$ задается формулами (1.8), (1.9). Естественно, какие-то предположения о виде функции $\varphi(x)$ здесь неизбежно приходится принять. Начнем с рассмотрения класса экспоненциально затухающих функций $\varphi(x)$, т. е. допустим, что

$$\varphi(x) = \exp[-(\alpha x)^s], \qquad \alpha > 0, \quad 0 < s < \infty \tag{2.2}$$

---

[1] Эти результаты содержатся в неопубликованной рукописи Т. Эллисона (Ellison T. H. Kolmogoroff's similarity theory of small scale motion and the effect of fluctuations in dissipation), любезно присланной им в 1967 году одному из авторов данной статьи.

при $x = k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4} \gg 1$. Заметим, что формула именно такого вида (с $s = 2$) была получена в работах [16, 17] (а также, исходя из совсем других соображений, в [18]); аналогичная формула с $s = 4/3$ была предложена в [19] и позже иначе обосновывалась в [20]; формула (2.2) с произвольным показателем s получается при некоторых из предположений, разобранных в [15].

Для определения поведения $E(k)$ при $k \gg 1/\eta$ надо подставить в (2.1) формулы (1.2) для $E(k; \varepsilon)$ и (2.2) для $\varphi(x)$, а $P(\varepsilon)$ задать выражением (1.8). Тогда, вводя новую переменную $y = \ln \varepsilon - m$, после несложных преобразований получаем

$$E(k) = \frac{C_1 e^{2m/3}}{\sqrt{2\pi}\sigma} k^{-5/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{h(y;\,\lambda)}\,dy \tag{2.3}$$

$$\lambda = (\alpha k \nu^{3/4} e^{-m/4})^s = (\alpha k \eta \exp(\sigma^2/8))^s \tag{2.4}$$

$$h(y; \lambda) = -\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{2y}{3} - \lambda \exp\left(-\frac{sy}{4}\right)$$

Подынтегральная функция в правой части (2.3) стремится к нулю при $y \to \pm\infty$ и имеет единственный максимум, острота которого неограниченно возрастает с ростом λ. Поэтому при большом λ здесь можно воспользоваться известным асимптотическим методом Лапласа (см., например, [21, 22]), т. е. приближенно заменить интеграл вкладом одной лишь точки максимума подынтегральной функции (обоснование законности такой замены намечено в конце этого раздела статьи). Функция e^h принимает наибольшее значение в точке $y = y_0$, являющейся корнем уравнения $h'(y; \lambda) = 0$ (где штрих означает дифференцирование по y). Это уравнение можно переписать также в виде

$$ze^z = \lambda_1, \quad z = \frac{s}{4}\left(y - \frac{2\sigma^2}{3}\right), \quad \lambda_1 = \lambda \frac{s^2\sigma^2}{16} \exp\left(-\frac{s\sigma^2}{6}\right) \tag{2.5}$$

после чего к нему становятся непосредственно применимы результаты раздела 2.4 книги [22]. В силу указанных результатов

$$y_0 = y_0(\lambda) = \frac{4}{s}\left(\ln \lambda - \ln \ln \lambda + \ln \frac{s^2\sigma^2}{16} + \ldots\right) \tag{2.6}$$

где многоточием обозначены члены, стремящиеся к нулю при $\lambda \to \infty$.

Условимся писать $a(\lambda) \sim b(\lambda)$, если $\lim\limits_{\lambda\to\infty} a(\lambda)/b(\lambda) = 1$.

Тогда формула (2.6) и уравнение

$$h'(y_0; \lambda) = 0$$

позволяют получить для радиуса влияния

$$\rho(y_0; \lambda) = |h''(y_0; \lambda)|^{-1/2}$$

точки максимума y_0 соотношение

$$\rho(y_0; \lambda) \sim \sigma(\ln \lambda)^{-1/2} \tag{2.7}$$

Далее, нетрудно проверить, что в данном случае выполняются условия теоремы 1.2.5 книги [21], гарантирующие возможность представления вклада точки максимума в виде

$$(2\pi)^{1/2}\rho(y_0; \lambda)\exp[h(y_0; \lambda)]$$

Следовательно, применение метода Лапласа (с учетом уравнения $h'(y_0; \lambda) = 0$) приводит к асимптотической формуле

$$E(k) \approx C_1 k^{-5/3} e^{2m/3} (\ln \lambda)^{-1/2} \exp\left[-\frac{y_0^2}{2\sigma^2} + \frac{2y_0}{3} - \frac{4}{s}\left(\frac{y_0}{\sigma^2} - \frac{2}{3}\right)\right] \tag{2.8}$$

где λ и y_0 определяются формулами (2.4) и (2.6). Выделив отдельно главный член в правой части (2.8), найдем, что

$$E(k) \approx A \exp[-8\sigma^{-2}(\ln k\eta)^2] \qquad (k\eta \gg 1) \tag{2.9}$$

Здесь $A = A(k)$ — функция, изменяющаяся медленнее, чем $\exp[-(\ln k\eta)^2]$ при изменении k (практически, по степенному закону), которую в первом приближении можно даже заменить постоянной. Следовательно, затухание $E(k)$ при $k \to \infty$ оказывается не зависящим от значения показателя s в формуле (2.2) и более быстрым, чем затухание любой отрицательной степени k (что обеспечивает сколь угодно высокую «среднеквадратичную гладкость» поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$). В то же время это затухание оказывается более медленным, чем экспоненциальное затухание типа $\exp[-(k\eta)^s]$ с любым показателем $s > 0$ и даже чем полученное в [15] затухание порядка $\exp[-\exp\{B(\ln k\eta)^{1/2}\}]$, также являющееся промежуточным между степенным и экспоненциальным.

Из независимости результатов (2.9) от s следует, что та же асимптотическая формула должна получиться и в пределе при $s \to \infty$, т. е. в случае обрывающегося пятитретевого спектра (когда $\varphi(x) = 1$, $x < 1/\alpha = b$ и $\varphi(x) = 0$, $x > 1/\alpha$). И действительно, для этого предельного случая Эллисоном (см. сноску на стр. 73) была получена следующая явная формула:

$$E(k) = C_1 \langle\varepsilon\rangle^{2/3} k^{-5/3} e^{-\sigma^2/9} \left\{\frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{4}{\sigma}\left(\ln \alpha k\eta - \frac{\sigma^2}{24}\right)\right]\right\} \tag{2.10}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\frac{-t^2}{2} dt$$

Эта формула при $k\eta \gg 1$ также приводит к результату (2.9). Отсюда уже ясно, что формула (2.9) будет справедлива и в случае любого затухания $E(k; \varepsilon)$ при $k \to \infty$ более быстрого, чем экспоненциальное затухание.

Пусть теперь $E(k; \varepsilon)$ затухает при $x = k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4} \to \infty$ медленнее, чем экспоненциальная функция (2.2). В этом предположении достаточно проанализировать случай, когда спектру отвечает функция $\varphi(x)$ вида

$$\varphi(x) = \exp\{-\alpha(\ln x)^s\} \quad \text{при } x \geqslant 1, \qquad 1 \leqslant s < \infty \tag{2.11}$$

(поведение $\varphi(x)$ при $x < 1$ неважно, так что можно, например, принять, что $\varphi(x) = 1$ при $x < 1$). Функциям (2.11) с $s = 1$, очевидно, отвечает степенное затухание неосредненных спектров $E(k; \varepsilon)$; при $s = 2$, $\alpha = 8/\sigma^2$ получается затухание, совпадающее с задаваемым формулой (2.9); при $1 < s < 2$ или $s = 2$, $\alpha < 8/\sigma^2$ — затухание, промежуточное между степенным и соответствующим (2.9), и, наконец, при $s = 2$, $\alpha > 8/\sigma^2$ или $s > 2$ затухание промежуточное между соответствующим (2.9) и экспоненциальным. При $\varphi(x)$ вида (2.11) осредненный спектр $E(k)$ снова задается формулой (2.3), но теперь уже

$$\lambda = \ln k\eta + \frac{\sigma^2}{8}, \qquad k(y; \lambda) = -\frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{2y}{3} - \alpha\left(\lambda - \frac{y}{4}\right)^s \tag{2.12}$$

Уравнение $h'(y_0;\ \lambda)=0$, определяющее точку $y=y_0$, в которой $e^{h(y;\ \lambda)}$ принимает наибольшее значение, здесь может быть переписано в виде

$$az=(\lambda_1-z)^{s-1},\quad a=\frac{16}{\alpha s\sigma^2}\quad z=\frac{y_0}{4}-\frac{\sigma^2}{6},\quad \lambda_1=\lambda-\frac{\sigma^2}{6} \tag{2.13}$$

Если $s>2$, то из (2.13) вытекает, что

$$z=\lambda_1-(a\lambda_1)^{1/(s-1)}+o(\lambda_1^{1/(s-1)})$$

т. е.

$$y_0=y_0(\lambda)=4\lambda+O(\lambda^{1/(s-1)}) \tag{2.14}$$

Далее легко проверить, что в этом случае

$$\rho(y_0;\ \lambda)=|h''(y_0;\ \lambda)|^{-1/2}\sim(\ln\lambda)^{\frac{2-s}{2(1-s)}}$$

и что вклад точки максимума $y=y_0$ в интеграл (2.3) асимптотически эквивалентен

$$(2\pi)^{1/2}\rho(y_0;\ \lambda)\exp[h(y_0;\ \lambda)]$$

Отсюда следует, что применение метода Лапласа к интегралу в правой части (2.3) в случае функции $\varphi(x)$ вида (2.11), где $s>2$, снова приводит к оценке вида

$$E(k)\approx A\exp[-8\sigma^{-2}(\ln k\eta)^2]$$

где $A=A(k)$ убывает при $k\eta\to\infty$ медленнее, чем $\exp[-(\ln k\eta)^2]$. Таким образом, затухание на бесконечности осредненного спектра $E(k)$ формулы (2.1) при наличии флуктуаций диссипации энергии ε, имеющих логарифмически нормальное распределение вероятностей (1.8), будет описываться формулой (2.9) во всех случаях, когда при отсутствии флуктуаций ε спектр $E(k;\ \varepsilon)$ затухает при $k\to\infty$ не медленнее, чем

$$\exp[-(\ln k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4})^{2+\delta}],\qquad \delta>0$$

Такое затухание $E(k;\ \varepsilon)$ является весьма медленным; поэтому сформулированный результат показывает, что при наличии флуктуаций ε, распределенных по логарифмически нормальному закону, порядок затухания осредненного спектра $E(k)$ на бесконечности при очень широких условиях будет определяться именно этими флуктуациями, а вовсе не характером поведения спектра $E(k;\ \varepsilon)$, соответствующего идеализированной модели турбулентности с постоянным значением ε.

Результаты, соответствующие случаю функции $\varphi(x)$ вида (2.11), где $s\leqslant 2$, менее интересны, так как столь медленное затухание спектра $E(k;\ \varepsilon)$ кажется мало правдоподобным; тем не менее для полноты приведем и их. Если $s=2$, то для корня уравнения $h'(y;\ \lambda)=0$ легко написать явную формулу; выделив далее снова главный член асимптотической оценки интеграла в формуле (2.3), придем к соотношению

$$E(k)\approx A\exp[-\beta(\ln k\eta)^2],\qquad \beta=\frac{8\alpha}{\alpha\sigma^2+8} \tag{2.15}$$

где, как обычно, $A=A(k)$ — множитель, затухающий при $k\eta\to\infty$ медленнее, чем экспоненциальная функция в правой части (2.15). Следовательно, при $s=2$ порядок затухания осредненного спектра $E(k)$ на бесконечности оказывается снова тем же, что и раньше, но только числовой коэффициент β при $(\ln k\eta)^2$ под знаком экспоненциальной функции теперь уже зависит и от α (т. е. от поведения неосредненного спектра $E(k;\ \varepsilon)$). При этом, если $\alpha\gg 8/\sigma^2$, то соответствующий коэффициент β оказывается очень близким к $8/\sigma^2$ и слабо зависящим от α, а при уменьшении α он также уменьшается и при $\alpha\ll 8/\sigma^2$ оказывается уже мало отличающимся от исходного коэффициента α. Если же $1<s<2$, то уравнение (2.13) приводит к результату

$$z=\lambda_1^{s-1}/a+o(\lambda_1^{s-1})$$

и здесь уже главный член асимптотической оценки $E(k)$ имеет вид

$$E(k) \approx A \exp[-\alpha(\ln k\eta)^s] \tag{2.16}$$

Таким образом, при более медленном, чем

$$\exp[-(\ln k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4})^2],$$

затухании спектра $E(k;\ \varepsilon)$ его «размазывание», создаваемое флуктуациями ε, имеющими логарифмически нормальное распределение вероятностей, вообще не меняет порядок затухания спектра турбулентности на бесконечности. Последний результат совершенно естественен, так как роль флуктуаций диссипации энергии оказывается очень малой уже при затухании $E(k;\ \varepsilon)$ порядка $\exp[-\alpha(\ln k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4})^2]$ с достаточно малым коэффициентом α. Наконец, если $s = 1$ (т. е. $E(k;\ \varepsilon)$ затухает на бесконечности, как некоторая отрицательная степень k), то осредненный спектр $E(k)$ также будет затухать на бесконечности, как та же степень k.

Для оценки интеграла в формуле (2.3) разобьем отрезок интегрирования на три части: от $-\infty$ до $y_0 - \rho(y_0;\ \lambda)\tau(\lambda)$, от $y_0 - \rho(y_0;\ \lambda)\tau(\lambda)$ до $y_0 + \rho(y_0;\ \lambda)\tau(\lambda)$ и от $y_0 + \rho(y_0;\ \lambda)\tau(\lambda)$ до $+\infty$ (здесь $\tau(\lambda)$ — некоторая функция, стремящаяся к бесконечности при $\lambda \to \infty$, притом достаточно медленно). Обозначим интегралы по этим отрезкам соответственно через I_1, I_2, I_3. В силу теоремы 1.2.5 книги [21] I_2 («вклад точки максимума в значение интеграла») во всех рассматриваемых случаях будет асимптотически эквивалентен выражению $(2\pi)^{1/2}\rho(y_0;\ \lambda)e^{h(y_0;\ \lambda)}$. Поэтому для обоснования метода Лапласа надо только доказать, что $I_1 / I_2 \to 0$ и $I_3 / I_2 \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Так как $h(y_0;\ \lambda)$ монотонно убывает по обе стороны от точки y_0, то в интегралах I_1 и I_3 удобно перейти к новой переменной $z = z(y)$, определяемой соотношением $h(y;\ \lambda) = h(y_0;\ \lambda) - z^2$, а множитель dy / dz заменить его максимальным значением в крайней правой (соответственно, левой) точке интервала интегрирования. Тогда можно написать следующую оценку величины $I_3(\lambda)$:

$$|I_3(\lambda)| \leqslant \exp[h(y_0;\ \lambda)] \int\limits_{z_1}^{\infty} e^{-z^2} \left| \frac{dy}{dz} \right| dz \leqslant \frac{\exp[h(y_0;\ \lambda)]}{|h'(y(z_1);\ \lambda)|} \int\limits_{z_1}^{\infty} e^{-z^2} 2z\, dz$$

$$z_1 = z_1(\lambda) = z(y_0 - \rho\tau)$$

Отсюда

$$|h'(y(z_1);\ \lambda)| \sim {}^1\!/_2 |h''(y_0;\ \lambda)|\rho^2(y_0;\ \lambda)\tau^2(\lambda) = {}^1\!/_2\tau^2(\lambda)$$

если только

$$|h''(y;\ \lambda)| \sim |h''(y_0;\ \lambda)| \quad \text{при } |y - y_0| \leqslant \rho(y_0;\ \lambda)\tau(\lambda)$$

Последнее условие всегда будет выполнено, если $\tau(\lambda)$ растет медленнее, чем $\rho^{-1}(y_0;\ \lambda)$ в случае экспоненциально затухающего неосредненного спектра, и медленнее, чем некоторая положительная степень λ в случае спектра, отвечающего функции (2.11). Для отношения $I_3(\lambda) / I_2(\lambda)$ легко получить следующую оценку:

$$\left| \frac{I_3(\lambda)}{I_2(\lambda)} \right| \sim \frac{2\exp(-z_1^2(\lambda))}{(2\pi)^{1/2}\rho(y_0;\ \lambda)\tau^2(\lambda)} \sim \frac{2\exp(-\tau^2(\lambda)/2)}{(2\pi)^{1/2}\rho(y_0;\ \lambda)\tau^2(\lambda)} \to 0$$

при $\lambda \to \infty$, если функция $\tau(\lambda)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Аналогично доказывается и соотношение $|I_1(\lambda) / I_2(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

3. Приведенные выше результаты были сформулированы в применении к трехмерному спектру турбулентности $E(k)$, важному для многих теоретических расчетов, но допускающему измерение лишь с помощью оптических и родственных им методов (ср. [4], гл. 9). Аналогичные оценки могут быть, однако, получены и для продольного и поперечного одномерных спектров $E_1(k)$ и $E_2(k)$, для определения которых достаточно иметь надежные данные о временно́м ходе одной из компонент скорости в фиксированной точке потока[1]. В самом деле, формула типа (2.1) будет справедлива и для осредненных одномерных спектров $E_1(k)$ или $E_2(k)$,

[1] При этом, разумеется, надо еще использовать гипотезу Тейлора о «замороженной турбулентности» (достаточно точную в коротковолновой области спектра), позволяющую перейти от временны́х изменений к пространственным (в направлении средней скорости течения).

только функцию $\varphi(x)$ надо будет заменить на $\varphi_1(x)$ или $\varphi_2(x)$. При этом надо иметь в виду, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ затухают при $x\to\infty$ даже быстрее, чем $\varphi(x)$ (причем $\varphi_1(x)$ быстрее, чем $\varphi_2(x)$; ср. [[23]]); поэтому все рассуждения применимы и к спектрам $E_1(k)$ и $E_2(k)$.

Остановимся еще на вопросе об области приложимости выведенных асимптотических формул для спектров турбулентности. Лежащее в их основе предположение о логарифмически нормальном распределении диссипации энергии ε, разумеется, представляет собой некоторую идеализацию; и теоретические соображения [[9; 10]] и данные измерений [[14]] (см. также первые две работы в сноске на стр. 72) показывают, что оно тем точнее, чем больше число R, причем при большом R оно хорошо выполняется в широком диапазоне значений ε, но на краях (в области очень больших ε) плотность вероятности $P(\varepsilon)$ начинает все же спадать быстрее, чем следовало бы из формулы (1.8). При естественном предположении, что $E(k;\ \varepsilon)$ убывает при $k\to\infty$ заметно быстрее, чем $\exp[-(\ln k\nu^{3/4}\varepsilon^{-1/4})^2]$, соответствующий осредненный спектр $E(k)$ будет описываться формулой (2.9) в широком диапазоне значений k таких, что $P(\varepsilon)$ еще хорошо описывается формулой (1.8) при значениях $\varepsilon=\exp(y+m)$, которым соответствует максимум подынтегральной функции в правой части (2.3). При дальнейшем возрастании k точка максимума этой функции $y_0(\lambda)=y_0(k)$ сдвигается в область все бо́льших значений y (т. е. ε); в конце концов ей начинают соответствовать значения ε, для которых $P(\varepsilon)$ убывает быстрее, чем по формуле (1.8), а тогда и порядок убывания $E(k)$ станет более быстрым, чем следовало бы из формулы (2.9). Поэтому, имея достаточно надежные данные о плотности $P(\varepsilon)$ и поведении осредненного спектра $E(k)$ (или $E_1(k)$, или $E_2(k)$), можно, по крайней мере в принципе, приближенно оценить и порядок затухания неосредненного спектра $E(k;\ \varepsilon)$ (определяющий функцию $y_0(k)$).

С последним замечанием отчасти связан также и вопрос о роли выбора интервала временного осреднения T, используемого при вычислении спектра. Согласно данным работы [[14]] (а также первых двух работ, указанных в сноске стр. 72), эмпирическое распределение мгновенных значений ε в нижнем слое атмосферы удовлетворительно описывается формулой (1.8) уже при осреднении порядка нескольких десятков секунд.

Однако следует иметь в виду, что согласно данным работы [[7]] значения ε в океане (при $R\approx 3\cdot 10^8$), определенные по записям пульсаций скорости продолжительностью в 5—10 *мин*, вполне могут отличаться в 5 раз (при практически одинаковых общих условиях наблюдения). Поэтому правдоподобно, что распределение вероятностей ε, определенное по данным за значительно больший промежуток времени (или полученное с помощью использования ряда записей, относящихся к различным точкам), будет описываться формулой вида (1.8) (но с большей дисперсией σ^2) на еще большем интервале значений. Если это так, то при увеличении времени осреднения T (или при добавлении еще и пространственного осреднения) будет возрастать также и диапазон значений k, к которым применимы рассмотрения данной работы, и одновременно будет возрастать параметр σ^2 (т. е. будет убывать скорость затухания спектра).

Иначе говоря, если в соответствии с (1.9) грубо оценить σ^2 с помощью соотношения $\sigma^2\approx {}^3/_4\mu\ln R$, где $\mu\approx 0.3\div 0.5$, то нужно еще дополнительно принять, что так будет обстоять дело лишь при использовании очень большого осреднения; уменьшение же осреднения приводит к уменьшению параметра σ^2 (т. е. требует использования вместо R более низкого значения «эффективного числа Рейнольдса» $R_{ef}=R_{ef}(T)$). Более подробный разбор всех этих вопросов требует, однако, дополнительных экспериментальных данных и явно выходит за рамки данной работы.

Авторы признательны М. А. Евграфову за полезное обсуждение методов обоснования асимптотических оценок интегралов и Т. Эллисону, К. Гибсону и Р. Стюарту, приславшим рукописи своих работ.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4, стр. 299—303.
2. Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 1, стр 19—21.
3. Обухов А. М. О распределении энергии в спектре турбулентного потока. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1941, № 4—5, стр. 453—466.
4. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 2. М., «Наука», 1967.
5. Kolmogorov A. N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 1, pp. 82—85.
6. Obukhov A. M. Some specific features of atmospheric turbulence. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 1, pp. 77—81.
7. Grant H. L., Stewart R. W., Moilliet A. Turbulence spectra from a tidal channel. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 2, pp. 241—268. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1964, № 1, стр. 71—99.)
8. Новиков Е. А. Изменчивость диссипации энергии в турбулентном потоке и распределение энергии по спектру. ПММ, 1963, т. 27, № 5, стр. 944—946.
9. Яглом А. М. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму характеристик турбулентности в инерционном интервале. Докл. АН СССР, 1966, т. 166, № 1, стр. 49—52.
10. Gurvich A. S., Yaglom A. M. Breakdown of eddies and probability distributions for small-scale turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2 (Supplement), pp. S59—S65.
11. Гурвич А. С., Зубковский С. Л. Об экспериментальной оценке флуктуаций диссипации энергии турбулентности. Изв. АН СССР, Сер. геофиз., 1963, № 12, стр. 1856—1858.
12. Понд С., Стюарт Р. У. Измерения статистических характеристик мелкомасштабных турбулентных движений. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 9, стр. 914—919.
13. Гурвич А. С. О распределении вероятностей квадрата разности скоростей в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1966, т. 2, № 10, стр. 1095—1098.
14. Холмянский М. З. Исследование микропульсаций производной скорости ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 4, стр. 423—430.
15. Яглом А. М. Асимптотическое поведение спектра турбулентности при различных моделях спектрального переноса энергии. Сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. К 60-летию Л. И. Седова». М., «Наука», 1969, стр. 643—661.
16. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2, стр. 331—334.
17. Saffman P. G. On the fine-scale structure of vector fields convected by turbulence fluid. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, No. 4, pp. 545—572.
18. Ellison T. H. The universal small-scale spectrum of turbulence at high Reynolds number. Mècanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS à Marseille), Paris, Ed. CNRS, 1962, pp. 113—121.
19. Pao G. H. Structure of turbulence velocity and scalar fields at large wave-numbers. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 6, pp. 1063—1075.
20. Parker E. N. Physical model of hydrodynamic turbulence. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 8, pp. 1592—1605.
21. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции, Изд. 2. М., Физматгиз, 1962.
22. De Bruijn N. G. Asymptotic methods in analysis. Amsterdam, North — Holland Publ., 1958. (Рус. перев.: де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
23. Алексеев В. Г., Яглом А. М. Примеры сравнения одномерных и трехмерных спектров скорости и температуры. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 8, стр. 903—907.