

К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРМОВОЙ ЧАСТИ ПЛОСКОГО ТЕЛА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТИ ОБТЕКАНИЯ

А. Н. КРАЙКО, Р. К. ТАГИРОВ

(Москва)

На примере кормовой части плоского тела рассматриваются два вопроса оптимального профилирования: построение контура минимального волнового сопротивления при заданной подъемной силе и определение оптимального (по сопротивлению) контура с учетом силы трения. Сила трения определяется с использованием уравнений пограничного слоя (в интегральной форме), а для внешнего невязкого потока предполагаются справедливыми соотношения в простой волне.

1. Пусть задан равномерный поток совершенного невязкого и нетеплопроводного газа с показателем адиабаты κ и числом Маха $M_\infty \geq 1$. Ось x прямоугольной системы координат xy направим параллельно невозмущенному потоку, а ее начало совместим с начальной точкой образующей ac кормовой части плоского тела. На габариты кормовой части наложены ограничения $0 = x_a \leq x \leq x_c \leq 1$, $y_c \leq y \leq 0$, где y_c — заданная константа, за характерный размер взята максимально допустимая длина, а нижние индексы приписаны параметрам в соответствующих точках.

Рассмотрим задачу построения контура ac , удовлетворяющего перечисленным габаритным ограничениям и обеспечивающего минимум волнового сопротивления χ при заданной подъемной силе Y , которые определены равенствами

$$\chi = \int_a^c p \, dy, \quad Y = \int_a^c p \, dx \quad (1.1)$$

При решении будем предполагать, что в области влияния искомого контура отсутствуют ударные волны. В этом случае течение имеет вид простой волны и на участках контура, обтекаемых газом

$$p = p(y'), \quad \frac{dp}{dy'} = \frac{\kappa p M^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \right) \quad (1.2)$$

Здесь p — давление, а M — число Маха, которое есть известная функция y' .

Можно показать, что если весь искомый контур обтекается газом и при этом удовлетворяет классическому условию оптимальности (уравнению Эйлера), то образующая ac прямолинейна. Однако в общем случае при помощи такого решения нельзя удовлетворить всем условиям задачи, что особенно наглядно видно при фиксированном x_c , когда имеется единственный оптимальный контур указанного класса, обладающий вполне определенной подъемной силой. В связи с этим в [1] в качестве возможного выхода была предложена оптимальная конфигурация (так называемое разрывное безударное решение), содержащая начальный участок краевого экстремума. Этот участок, не удовлетворяя уравнению Эйлера, строится так, что волны сжатия, которые образуются при его обтекании, фокусируются в граничной точке облас-

ти влияния. В то же время, как и в задаче без подъемной силы [2], представляется целесообразным в качестве другого возможного решения рассмотреть конфигурацию (фиг. 1), которая содержит торец: $x \equiv 1$ — участок краевого экстремума по длине ¹.

В (1.2) следует иметь в виду, что при $y' < 0$ с ростом $|y'|$ давление на контуре падает и даже может обратиться в нуль. С другой стороны, условия обтекания тела в целом обычно ограничивают минимальное значение давления, при достижении которого поток перестает обтекать соответствующую часть поверхности (т. е. происходит отрыв). Примем, что при наличии торца bc реализуется именно такая ситуация, причем давление p^+ , действующее на торец (или на участок, получающийся при его варьировании), будем считать известным и независимым от формы искомого контура. Так, если при $x > 1$ контур имеет продолжение, где $y \equiv y_c$, то можно пользоваться формулой

$$p^+ = p_\infty / M_\infty^{3/2} \quad (1.3)$$

которая неплохо аппроксимирует результат работы [4]. Наконец, в рассматриваемой постановке имеет смысл (по крайней мере, при $p^+ > 0$) ограничиться контурами ac , на которых всюду $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.

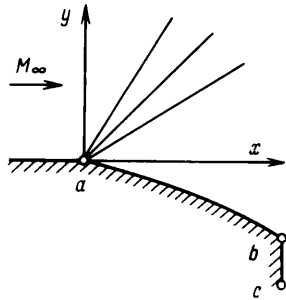
Задача определения оптимальной образующей ac , которая состоит из участка ab , обтекаемого газом, и участка краевого экстремума bc , формулируется на контуре тела и представляет собой обычную изопериметрическую вариационную задачу с одним независимым переменным. При ее решении допускается разбиение ab на начальный отрезок краевого экстремума: $y \equiv 0$ и следующий за ним участок двустороннего экстремума, заканчивающийся в точке b . При отсутствии торца точки b и c совпадают.

Проведенное исследование показало, что при Y из диапазона $p^+ \leq Y \leq p_\infty$ оптимальный контур кормовой части состоит из прямолинейного участка двустороннего экстремума ab , начинающегося в точке a , и торца $x \equiv 1$. Наклон участка ab находится по заданному Y при помощи равенства $p = Y$, следующего при $x_b = 1$ из (1.1), причем $p = \text{const}$ — известная (в силу соотношений для простой волны) однозначная функция θ . Наконец, размер торца, т. е. y_b , и волновое сопротивление χ определяются равенствами

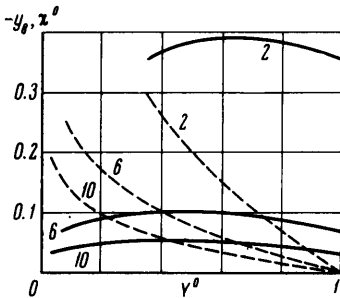
$$y_b = \text{tg } \theta, \quad \chi = (y_c - y_b) p^+ + y_b p.$$

В качестве примера были просчитаны плоские кормовые части для $\kappa = 1.4$, для давления на торец p^+ , определенного по (1.3), для $y_c = -1$ и ряда значений M_∞ . Некоторые результаты расчета приведены на фиг. 2, на которой для каждого $Y^\circ = Y/p_\infty$ из диапазона $M_\infty^{-3/2} \leq Y^\circ \leq 1$ сплошными кривыми даны значения $\chi^\circ = -\chi/p_\infty$, а штриховыми — ординаты точки b . Цифры над кривыми — значения M_∞ .

¹ Отметим также, что торец может появляться и при построении тонких профилей максимального качества [3].



Фиг. 1



Фиг. 2

Для случая $M_\infty = 1.9742$, $\kappa = 1.4$ и $y_c = -0.834$ в [1] приведен оптимальный профиль с фокусировкой волн сжатия, который имеет $Y^\circ = 0.105$. Сравнение его и оптимального профиля с торцом (при $p^+ = 0$) показало, что профиль с торцом ($y_b = -0.798$) при том же Y° обеспечивает выигрыш по χ° почти на 70%. Такому выигрышу по χ° отвечает уменьшение коэффициента волнового сопротивления C_x на 4%.

2. В настоящее время построение оптимальных контуров сопел и кормовых частей тел производится без учета сил трения. Поэтому вопрос о влиянии учета трения при решении вариационной задачи на форму оптимального контура, а также о возможном дополнительном увеличении тяги (или уменьшении сопротивления) остается открытым. В общем случае учет трения (даже в рамках теории пограничного слоя) существенно усложняет решение соответствующих вариационных задач. В то же время для плоской кормовой части при использовании уравнений пограничного слоя в интегральной форме исследование существенно упрощается, причем результаты, которые можно получить при этом, интересны не только сами по себе, но и с точки зрения оценки погрешности общепринятого способа профилирования.

Исходя из сказанного, рассмотрим задачу построения кормовой части плоского тела, обеспечивающей минимум суммы волнового сопротивления при идеальном обтекании и интеграла сил трения, действующих на тело, т. е. минимум величины

$$\chi = \int_a^c p \, dy + \int_a^c \tau_w \, dx \quad (2.1)$$

где τ_w — трение на поверхности тела. Будем рассматривать задачу без заданной подъемной силы, а прочие условия (в том числе габаритные ограничения на контур) примем такими же, как в предыдущем пункте.

Для определения трения на стенке воспользуемся результатами интегральной теории турбулентного пограничного слоя, развитой в [5]. В соответствии с этим

$$\tau_w = \kappa \varphi_0 p M^2 z^{-1/6} \quad (2.2)$$

$$\varphi_0 = \alpha \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^\beta \left(\frac{H}{M} \right)^{1/4}, \quad \alpha = 0.0129 (T_w^\circ)^{-0.51} \left(\frac{2}{\kappa - 1} \right)^{1/6} R^{-1/4}$$

$$T_w^\circ = \frac{T_w}{T_0}, \quad R = \frac{u_0 \rho_0 L}{\mu_w}, \quad u_0 = \sqrt{2c_p T_0}, \quad \beta = \frac{\kappa + 1}{8(\kappa - 1)} - 0.863$$

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = r \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) - 1, \quad z = \left(\frac{\delta^*}{L} \right)^{5/6}$$

$$r = \left(\frac{9}{7} T_w^\circ + 1 \right) + \frac{9}{7} \left[1 - \left(\frac{17}{7} P^{-27/10} \right)^{7/6} \right] (1 - T_w^\circ)$$

Здесь T_w — температура стенки, которую будем считать заданной и одинаковой для всего контура; T_0 и ρ_0 — температура и плотность адиабатически заторможенного невозмущенного потока; μ_w — вязкость газа при $T = T_w$; L — максимально допустимая длина кормовой части; c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении; R и P — числа Рейнольдса и Прандтля и, наконец, δ^* и δ^{**} — толщины вытеснения и потери импульса пограничного слоя. Как и ранее, M и p — известные функции y' в силу соотношений для простой волны, а α , β , T_w° , R , P , u_0 и r — константы, которые не зависят от формы искомого контура.

Величина z , входящая в выражение для τ_w , определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$z' + f_1zy'' - f_2 = 0 \tag{2.3}$$

$$f_1 = \frac{5H}{4\kappa p M^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{\kappa p M^2}{H} - p \right), \quad f_2 = \frac{5\varphi_0 H}{4 \cos \theta}$$

в котором штрихом, как и прежде, обозначена полная производная по x вдоль контура тела.

Если на обтекаемом газом участке оптимизируемого контура имеются точки излома (например, точка a), то результаты, получающиеся в случае использования для перехода через них уравнения (2.3), которое основано на приближении пограничного слоя, вообще говоря, неверны. По этой причине класс рассматриваемых контуров следует ограничить в соответствии с условиями применимости уравнений пограничного слоя. В качестве такого ограничения потребуем, чтобы кривизна участка ab , обтекаемого газом, ни в одной точке, кроме концевой точки b , не превышала по модулю некоторую заранее заданную константу K . Для участков с отрицательной кривизной, которые здесь только и рассматриваются, сформулированное условие можно записать в форме

$$y''(1 + y'^2)^{-3/2} + K - k = 0 \quad (k \geq 0) \tag{2.4}$$

Константу K для применимости приближения пограничного слоя можно взять в несколько раз меньше, чем начальная толщина пограничного слоя (или δ_a^*), отнесенная к L , т. е. положить $K = L / N\delta_a^*$ при $N \gg 1$.

Таким образом, возникает вариационная задача о построении контура ac , реализующего минимум функционала (2.1) с τ_w из (2.2) при наличии дифференциальных связей (2.3) и (2.4), габаритных ограничений предыдущего пункта и условия $k \geq 0$. Решение этой задачи проводится с использованием переменных множителей Лагранжа $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ и приводит к следующим результатам.

В общем случае оптимальный контур состоит из трех участков: начального участка краевого экстремума ad , участка двустороннего экстремума db и торца bc . Участок ad плавно (т. е. без разрыва y') примыкает к известному контуру слева от точки a , имеет постоянную кривизну и определяется уравнением (2.4) при $k = 0$. Так как на ad допустимы лишь односторонние вариации $\delta k \geq 0$, то условие оптимальности этого участка формулируется в виде неравенства. Последнее имеет вид $\lambda_2 \geq 0$, где переменный множитель Лагранжа λ_2 определяется уравнением

$$\lambda_2'' - 3y'y''(1 + y'^2)^{-4}\lambda_2' + \alpha_1(1 + y'^2)^{3/2} = 0 \tag{2.5}$$

$$\alpha_1 = (\lambda_1\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3z^{-1/5})y'' - z^{-6/5}\varphi_4$$

$$\varphi_1(y') = 2f_1f_2y' + f_1^2f_2 + f_2y'y'' + f_1y'f_2, \quad \varphi_2(y') = 2py' + y'p_{y'y'}$$

$$\varphi_3(y') = 0.04(f_1^2f_3 + 10f_1f_3y' + 5f_1y'f_3 + 25f_3y'y'), \quad f_3 = \kappa\varphi_0pM^2$$

$$\varphi_4(y') = 0.04(5f_2f_3y' - 4f_1f_2f_3 - 5f_2y'f_3)$$

Здесь нижним индексом y' обозначены производные по y' . Начальными условиями для интегрирования (2.5) служат условия обращения в нуль λ_2 и λ_2' в точке d .

Множитель λ_1 всюду на ab определяется уравнением

$$\lambda_1' = \lambda_1 f_1 y'' + f_3 / 5z^{5/5} \quad (2.6)$$

которое интегрируется при $\lambda_{1b} = 0$.

Форма участка двустороннего экстремума db , который плавно (без разрыва y') примыкает к участку ad , определяется уравнением

$$y'' = \varphi_4 / (\lambda_1 \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 z^{-1/5}) z^{6/5} \quad (2.7)$$

а оптимальный размер торца (т. е. ордината y_b) находится из условия

$$p^+ - p_b = \left[\frac{\kappa M^2 p}{2\sqrt{M^2 - 1}} \sin 2\theta + \frac{\varphi_5}{5z^{1/5}} \right]_b \quad (\varphi_5 = f_1 f_3 + 5f_3 y') \quad (2.8)$$

Можно показать, что $\varphi_5 \sim R^{-1/4}$, а $z \sim R^{-\omega}$, где $\omega < 5/4$. Поэтому с увеличением числа Рейнольдса второе слагаемое в квадратных скобках уменьшается, и в пределе при $R \rightarrow \infty$ условие (2.8) переходит в известное условие Буземана [1]. Наконец, условие того, что торец есть участок краевого экстремума, имеет вид

$$\left[\frac{\kappa p M^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \sin^2 \theta + \frac{y' \varphi_5 - 5f_3}{5z^{1/5}} \right]_b \geq 0 \quad (2.9)$$

Можно показать, что условия (2.8) и (2.9) сохраняются и в осесимметричном случае, а также во внутренней задаче, т. е. в случае сопла, если при этом рассматривается нижняя полуплоскость.

Построение оптимального контура в соответствии с приведенными условиями проводится в следующем порядке. Для заданных κ , M_∞ , p^+ , L , y_c , δ_a^* , T_w° , T_0 , ρ_0 , c_p , P , $N \gg 1$ и закона для вычисления μ как функции T определяются число Рейнольдса R и модуль максимально допустимой кривизны K . Затем выбирается абсцисса x_d правой концевой точки участка ad , на котором

$$y = [\sqrt{1 - (Kx)^2} - 1] / K, \quad y' \equiv \operatorname{tg} \theta = -Kx / \sqrt{1 - (Kx)^2} \quad (2.10)$$

Параметры невязкого потока на стенке затем находятся по формулам для течения Прандтля — Майера, а z — интегрированием (2.3) при начальном условии $z(0) = (\delta_a^* / L)^{5/4}$. При расчете вместо конечных соотношений, описывающих течение Прандтля — Майера, удобнее использовать дифференциальную связь $p' = \varphi_4 y''$, а число M находить по формуле

$$M = \left\{ \frac{2}{\kappa - 1} \left[\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right) \left(\frac{p_\infty}{p} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] \right\}^{1/2}$$

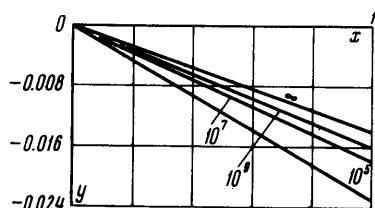
После определения z_d проводится расчет участка db , который заключается в одновременном интегрировании от $x = x_d$ до $x = x_b = 1$ уравнений (2.3), (2.6) и (2.7). При этом в качестве начальных условий берутся y_d и y_d' , найденные из (2.10), значение z_d и величина λ_{1d} , которая сначала задается произвольно, а затем подбирается так, чтобы при фиксированном x_d в точке b выполнялось условие $\lambda_{1b} = 0$. После того, как это условие оказывается удовлетворенным, проверяется выполнение равенства (2.8). Если оно не выполняется, то изменяется протяженность начального участка, т. е. x_d , и описанная процедура повторяется.

Затем проверяется неравенство $\lambda_2 \geq 0$ на ad , для проверки которого необходимо вычислить λ_2 в каждой точке участка ad , и условие (2.9).

С этой целью уравнения (2.3), (2.5) и (2.6) с учетом (2.10) интегрируются от $x = x_d$ до $x = 0$. В качестве граничных условий в точке d берутся найденные значения z_d и λ_{1d} и равенства $\lambda_{2d} = \lambda_{2d}' = 0$. Если в результате проверки выяснится, что нарушается неравенство $\lambda_2 \geq 0$ на ad или условие (2.9), то это значит, что в данном случае оптимальная конфигурация отличается от рассмотренной. В частности, нарушение условия (2.9) показывает, что длина оптимальной кормовой части меньше L .

Начальный выбор x_d и λ_{1d} обычно основывается на результатах расчетов, выполненных для близких условий, в частности, на результатах расчета контуров, оптимальных не по полному, а лишь по волновому сопротивлению (при тех же ограничениях на габариты и кривизну). Такие контуры, которые будем называть идеальными, также состоят их трех участков: участка постоянной (максимальной по модулю) кривизны ad , прямолинейного участка двустороннего экстремума db , плавно сопрягающегося с ad , и торца bc . Так как параметры невязкого течения в рассматриваемом случае зависят только от θ , то построение идеального оптимального контура начинается с определения θ из условия (2.8) без второго слагаемого в квадратных скобках. По найденному θ при помощи (2.10) находят x_d и y_d , после чего ордината y на прямолинейном участке db может быть найдена по формуле:

$$y = y_d + (x - x_d) \operatorname{tg} \theta.$$



Фиг. 3

Полное сопротивление идеального контура включает как волновое сопротивление, так и сопротивление трения, которое рассчитывается так же, как и ранее. На прямолинейном участке, где $y'' = 0$, уравнение (2.3), а затем и (2.6) можно проинтегрировать в квадратурах. В итоге найдем, что на db функция z растет по линейному закону, а для λ_{1d} с учетом условия $\lambda_{1b} = 0$ получим формулу

$$\lambda_{1d} = f_3 \{ [z_d + (1 - x_d) f_2]^{-1/5} - z_d^{-1/5} \} / f_2$$

где f_2 и f_3 вычисляются по постоянным параметрам на db . Значения x_d и λ_{1d} , найденные таким путем, служат первым приближением при построении контура, реализующего минимум функционала (2.1).

В соответствии с описанной процедурой на ЭВМ был проведен расчет большого количества оптимальных контуров плоских кормовых частей. Типичные конфигурации даны на фиг. 3, где изображены контуры, отвечающие $\kappa = 1.4$, $M_\infty = 4.0$, $P = 0.7$, $p^+ = 0$, $T_w^\circ = 0.5$, $y_c = -1.0$, $\delta_a^*/L = 0.002$, $N = 25$ и, следовательно, $K = 20$. Различные числа Рейнольдса даны на фиг. 3 цифрами над кривыми. Как видно из фигуры, контур, оптимальный при $R = 10^9$, весьма близок к оптимальному контуру при $R = \infty$, т. е. к идеальному контуру, построенному без учета сил трения. С уменьшением R это различие увеличивается, причем оптимизация с учетом трения обеспечивает большее расширение потока. В то же время результаты расчетов показывают, что учет трения весьма слабо сказывается на форме участков db , которые, как и в идеальном случае, практически прямолинейны (изменение θ на db не превышает 1%). В соответствии с этим контур, практически совпадающий с оптимальным, можно взять из семейства идеальных контуров (с начальным участком максимально допустимой кривизны), если ординату точки b выбирать в соответствии с полным условием (2.8).

Выигрыш, который получается при оптимизации по функционалу (2.1) в сравнении с оптимизацией по волновому сопротивлению, дает разность $\Delta\chi^\circ = \chi^\circ - \chi_\infty^\circ$, где, как и ранее, $\chi^\circ = -\chi / p_\infty$, а χ_∞° — значение χ° , найденное при том же R для идеального контура, т. е. контура, оптимального

при $R = \infty$. Наряду с этим интересно рассмотреть изменения каждого слагаемого в (2.1), которые (при известном $\Delta\chi^\circ$) характеризуются разностью $\Delta\chi_\tau^\circ = \chi_{\infty\tau}^\circ - \chi_\tau^\circ$. Здесь $\chi_\tau^\circ = \chi_\tau / p_\infty$, χ_τ — второе слагаемое в (2.1), а остальные обозначения аналогичны введенным при определении $\Delta\chi^\circ$.

Следует отметить, что в использованном при решении вариационной задачи выражении для χ не учтен вытесняющий эффект пограничного слоя, вызывающий изменение давления на стенке. В исследуемом случае этот эффект можно учесть, если рассмотреть функционал

$$\chi_1 = \int_a^c p dy + \int_a^c \tau_w dx + \int_a^c \frac{\kappa p M^2 \cos \theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \delta^* dx \quad (2.11)$$

где τ_w и $\delta^* = z^{1/6}$ находятся так же, как и ранее, а остальные величины — известные функции y' . В соответствии с этим для контуров, изображенных на фиг. 3, были вычислены разности $\Delta\chi_1^\circ = \chi_1^\circ - \chi_{1\infty}^\circ$, определенные аналогично $\Delta\chi^\circ$. Полученные χ_1° и $\Delta\chi_1^\circ$ вместе с χ° , $\Delta\chi^\circ$ и $\Delta\chi_\tau^\circ$, найденных в тех же случаях для различных R , имеют следующие значения:

R	$= 10^5$	10^7	10^9
χ°	$= 0.0278$	0.0468	0.0547
$\Delta\chi^\circ$	$= 0.0063$	0.0008	0.0001
$\Delta\chi_\tau^\circ$	$= 0.0096$	0.0016	0.0002
χ_1°	$= 0.0371$	0.0515	0.0558
$\Delta\chi_1^\circ$	$= 0.0111$	0.0034	0.0022

Как видно отсюда, при оптимизации происходит заметное перераспределение вкладов в χ волнового сопротивления, которое увеличивается, и интеграла сил трения, который уменьшается. Само χ изменяется в меньшей степени, чем каждое из слагаемых в отдельности. Интересно отметить, что в рассмотренных случаях близкие значения для χ_1 и $\Delta\chi_1^\circ$ получаются при замене второго и третьего интегралов в (2.11) разностью $(\delta_b^{**} \rho_b w_b^2 - \delta_a^{**} \rho_\infty w_\infty^2) L^{-1} \cos \theta_b \equiv \kappa (\delta_b^{**} \rho_b M_b^2 - \delta_a^{**} \rho_\infty M_\infty^2) L^{-1} \cos \theta_b$ где ρ и w — плотность и модуль скорости невязкого потока.

Решение аналогичной вариационной задачи при заданной подъемной силе показало, что отличие контуров и выигрыш в χ здесь оказываются существенно меньшими, чем в приведенных примерах.

Поступило 13 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
2. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 178—182.
3. Miele A., Darnoulakis J. N. Maximum lift — to — drag ratio airfoils at moderate supersonic speeds. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 3, pp. 471—477.
4. Korst H. H. A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4, pp. 593—600. (Рус. перев.: В сб.: «Механика», М., Изд-во иностр. лит., 1957, № 5, стр. 49—63).
5. Авдеевский В. С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4, стр. 11—16.