

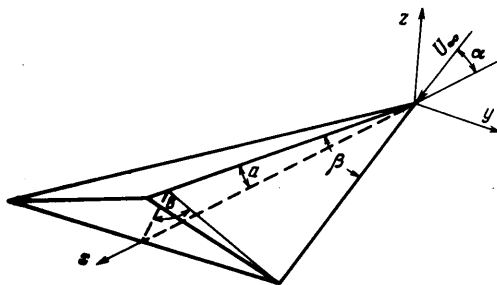
## ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

А. Л. ГОНОР, Н. А. ОСТАПЕНКО

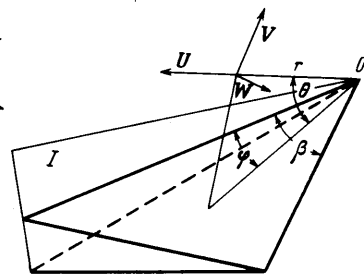
(Москва)

Решение прямой задачи о гиперзвуковом обтекании тонкого треугольного крыла со сверхзвуковыми передними кромками дано в работах [1, 2]. Ниже метод, предложенный в работе [1], обобщается на случай крыла конечной толщины, течение около которого имеет качественно отличную структуру по сравнению с тонким крылом.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком газа (фиг. 1). В ортогональ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ной системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , показанной на фиг. 2, система уравнений конического течения примет вид

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 &= 0 \\
 v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \operatorname{tg} \theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} = C, \quad v \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{1}{\rho^\gamma} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho^\gamma} &= 0 \\
 v \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{\cos \theta} \left[ \frac{\partial (v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] + 2\rho u &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $u, v, w$  — проекции скорости на оси  $r, \theta, \varphi$ , отнесенные к скорости набегающего потока  $U_\infty$ ; давление и плотность  $p, \rho$  отнесены к величинам  $\rho_\infty U_\infty^2$  и  $\rho_\infty$ ;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей. Первые два уравнения (1.1) представляют собой проекции уравнения Эйлера на направления осей  $r$  и  $\theta$ . Три последних выражают условия сохранения энергии, энтропии и массы частицы.

Введем новую независимую переменную  $\psi = \psi(\theta, \varphi)$ , удовлетворяющую уравнению

$$v \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$$

где  $\psi = \text{const}$  поверхность тока в коническом течении. Тогда система (1.1) преобразуется к форме

$$\begin{aligned} \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 &= 0, & \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} &= C \\ \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \operatorname{tg} \theta &= -\frac{1}{\rho \theta_\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{p}{\rho^\gamma} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\psi) + 2 \frac{u}{w} \cos \theta &= 0, & w \theta_\varphi &= v \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если связать систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с одной из верхних граней крыла (фиг. 2), то условия на ударной волне после замены

$$\theta = \varepsilon \bar{\theta}, \quad v = \varepsilon \bar{v}, \quad \rho = \varepsilon^{-1} \bar{\rho}, \quad (\varepsilon = (\gamma - 1) / (\gamma + 1))$$

( $\varepsilon$  — малый параметр) примут вид (здесь и дальше черта опущена)

$$\begin{aligned} u^* &= \cos(a + \alpha) [\cos \varphi + \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos b \sin \varphi - \varepsilon \theta^* \operatorname{tg}(a + \alpha) \sin b] \\ v^* &= -\theta_\varphi^* [\cos(a + \alpha) \sin \varphi - \sin(a + \alpha) \cos b \cos \varphi] - \\ &- (1 + m_0) \sin(a + \alpha) \sin b + \varepsilon \cos(a + \alpha) (\theta_\varphi^* \sin \varphi - \theta^* \cos \varphi) - \\ &- \varepsilon \sin(a + \alpha) \cos b (\theta_\varphi^* \cos \varphi + \theta^* \sin \varphi) - \varepsilon \theta_\varphi^{*2} \sin(a + \alpha) \sin b \\ w^* &= -\cos(a + \alpha) [\sin \varphi - \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos b \cos \varphi + \varepsilon \theta_\varphi^* \operatorname{tg}(a + \alpha) \sin b] \\ p^* &= \sin^2(a + \alpha) \sin^2 b + \varepsilon p_1^* \\ p_1^* &= \sin 2(a + \alpha) \sin b (\theta^* \cos \varphi - \theta_\varphi^* \sin \varphi) + \sin 2b \sin^2(a + \alpha) \times \\ &\times (\theta^* \sin \varphi + \theta_\varphi^* \cos \varphi) - \sin^2(a + \alpha) \sin^2 b - M_\infty^{-2} \\ \rho^* &= (1 + m_0)^{-1}, \quad m_0 = \varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon) \operatorname{csc}^2(a + \alpha) M_\infty^{-2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Смысл коэффициентов  $a, b$  и  $\alpha$  ясен из фиг. 1,  $\theta^*(\varphi)$  — форма ударной волны.

В условиях (1.3) отброшены члены порядка  $\varepsilon^{1+m}$  по сравнению с единицей, где  $m > 0$ , при этом необходимо, чтобы  $a$  было порядка  $\varepsilon^{1/2+m}$ .

Учитывая, что главный член у давления (1.3) постоянен по крылу, и отбрасывая в системе уравнений (1.2) члены, порядок которых заведомо выше первого, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = w, \quad w \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \theta &= -\frac{1}{\rho \theta_\psi} \frac{\partial p_2}{\partial \psi}, \quad u^2 + w^2 = \Delta^2(\psi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\psi) + 2 \frac{u}{w} &= 0, \quad w \theta_\varphi = v, \quad p = p^*(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon p_2(\varphi, \psi, \varepsilon) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если форма поперечного сечения крыла отличается от ромба и имеет уравнение  $\theta = \varepsilon \theta^\circ(\varphi)$ , то граничное условие на поверхности крыла запишется в виде

$$v - w \theta_\varphi^\circ = 0 \quad (1.5)$$

**2. Решение краевой задачи.** Введем новые переменные  $\Delta(\psi)$  и  $\tau(\varphi, \psi)$  и запишем  $u$  и  $w$  в форме

$$u = \Delta \cos \tau, \quad w = \Delta \sin \tau \quad (2.1)$$

Тогда, используя первые и третьи уравнения систем (1.3) и (1.4), найдем

$$\Delta^2(\varphi') = \cos^2(a + \alpha) [1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b + 2\varepsilon \sin b \operatorname{tg}(a + \alpha) (\theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi') - \varepsilon \sin 2b \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \times (\theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi' + \theta^{*'} \sin \varphi')] \quad (2.2)$$

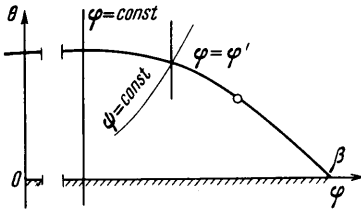
$$\tau = -[\varphi + f(\varphi')],$$

$$f(\varphi') = a_1 + \varepsilon b_1(\varphi'), \quad a_1 = -\operatorname{arc} \sin \frac{\operatorname{tg}(a + \alpha) \cos b}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b}}$$

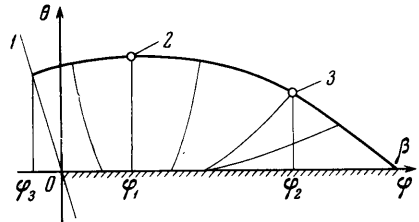
$$b_1(\varphi') = \frac{\operatorname{tg}(a + \alpha) \sin b}{1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b} [(\theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi' + \theta^{*'} \sin \varphi') + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) (\theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi')]$$

Штрихи означают, что соответствующие величины вычислены в точке пересечения ударной волны (фиг. 3) с линией тока ( $\varphi' = \varphi$ ).

Исследование выражения (2.2) для  $\tau$  позволяет сделать вывод, что  $w$  не обращается в нуль в точке  $\varphi = 0$ , как это имеет место в случае тонкого треугольного крыла, когда плоскость симметрии является линией стека-



Фиг. 3



Фиг. 4

ния. Из (2.2) следует, что существует некоторая координатная линия  $\varphi = \varphi_1$ , отличная от  $\varphi = 0$ , на которой располагается линия тока с нулевой поперечной составляющей скорости  $w$ . Таким образом, толщина крыла  $a$  приводит (фиг. 4) к появлению линии стекания 2, отличной от плоскости симметрии 1.

Из четвертых уравнений систем (1.2), (1.3) и шестого уравнения системы (1.4) следует:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\sin^2(a + \alpha) \sin^2 b} (p_1^{*'} - p_1^* - p_2) \right] \quad (2.3)$$

Выражение (2.1) позволяет найти интеграл четвертого уравнения системы (1.4)

$$\frac{\rho \theta_{\psi}}{w} = \frac{\rho' \theta_{\psi'}}{w'}$$

Отсюда получим, интегрируя по  $\psi$  от поверхности крыла вдоль линии  $\varphi = \text{const}$

$$\theta = \theta^\circ(\varphi) + \int_{\varphi^\circ(\varphi)}^{\varphi'} \frac{\rho' w}{\rho w'} \theta_{\psi'} \psi_{\varphi'} d\varphi'$$

Учитывая, что

$$\theta_{\psi'} \psi_{\varphi'} \equiv \frac{d\theta'}{d\varphi'} - \left( \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right)', \quad \frac{d\theta'}{d\varphi'} = \theta_{\varphi'^*}$$

найдем

$$\begin{aligned} \theta_{\psi'} \psi_{\varphi'} = & \frac{(1 + m_0) \sin(a + \alpha) \sin b}{w'} \left\{ 1 + \varepsilon \left[ \frac{\text{ctg}(a + \alpha)}{(1 + m_0) \sin b} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\theta_{\varphi'^*} \cos \varphi' - \theta_{\varphi'^*} \sin \varphi') + \frac{\text{ctg} b}{(1 + m_0)} (\theta_{\varphi'^*} \cos \varphi' + \theta_{\varphi'^*} \sin \varphi') \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в выражение для  $\theta$ , получаем

$$\theta = \theta^\circ(\varphi) + (1 + m_0) \sin(a + \alpha) \sin b \int_{\varphi^\circ(\varphi)}^{\varphi'} \frac{w}{w'^2} R d\varphi' \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} R = & 1 + \varepsilon \left[ \frac{\text{ctg}(a + \alpha)}{(1 + m_0) \sin b} (\theta_{\varphi'^*} \cos \varphi' - \theta_{\varphi'^*} \sin \varphi') + \right. \\ & \left. + \frac{\text{ctg} b}{(1 + m_0)} (\theta_{\varphi'^*} \cos \varphi' + \theta_{\varphi'^*} \sin \varphi') + \frac{1}{\sin^2(a + \alpha) \sin^2 b} (p_1'^* - p_1^* - p_2) \right] \end{aligned}$$

Граничное условие (1.5) накладывает на неизвестную функцию  $\theta^\circ(\varphi)$  одно из двух условий

$$\frac{\partial \theta^\circ}{\partial \varphi} = 0, \quad w|_{\varphi' = \varphi^\circ(\varphi)} = 0 \quad (2.6)$$

из которых воспользуемся первым  $\theta^\circ = \text{const}$ , соответствующим схеме обтекания Ферри (фиг. 4).

При выборе указанного условия на части поверхности крыла около плоскости симметрии возникают особенности, связанные с наличием энтропийного слоя. Метод построения корректного решения в этой области приведен в работе [2].

Таким образом, приняв схему течения, изображенную на фиг. 4, где  $\mathcal{Z}$  — конус Маха, необходимо считать  $\psi^\circ = \beta$  справа от  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi^\circ = \varphi_3$  слева от  $\varphi = \varphi_1$ , что соответствует представлению о физической природе течения в ударном слое и, как это будет видно из дальнейшего, необходимо для построения замкнутого решения задачи ( $\varphi_3$  — линия тока, пересекающая ударную волну в плоскости симметрии).

Интегрируя второе уравнение системы (1.4) от ударной волны, где  $p_2 = 0$ , вдоль линии  $\varphi = \text{const}$  и сохраняя главные члены, получаем

$$p_2 = \sin(a + \alpha) \sin b \int_{\varphi}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} (\theta_{\varphi\varphi} + \theta) d\varphi' \quad (2.7)$$

Если теперь проинтегрировать (2.5) и подставить в (2.7), то

$$p_2 = \sin(a + \alpha) \sin b (\theta_{\varphi\varphi}^\circ + \theta^\circ) \int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' + \quad (2.8)$$

$$+ 2 \sin^2(a + \alpha) \sin^2 b (1 + m_0) \{ [(\cos \varphi + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \sin \varphi) (z + z') +$$

$$+ (\sin \varphi - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \varphi) (z' + z'')] \int_{\varphi'}^{\varphi} \left[ \frac{w^3}{w'^2} \int_{\varphi^0}^{\varphi'} \frac{w}{w'^2} d\varphi' \right] d\varphi' -$$

$$- 2(\sin \varphi - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \varphi) (z + z'') \int_{\varphi'}^{\varphi} \left[ \frac{w^3}{w'^2} \int_{\varphi^0}^{\varphi'} \frac{u}{w'^2} d\varphi' \right] d\varphi' \}$$

В выражении (2.8) отброшены члены, содержащие множителями  $\varepsilon p_{24}$  и  $\varepsilon p_{2\varphi\varphi}$ , которые имеют более высокий порядок малости по сравнению с оставленными членами [2].

Подставив  $p_2$  в (2.5) и положив  $\varphi' = \varphi$ , получим интегро-дифференциальное уравнение для формы ударной волны

$$z + \delta \{ 2[(z \cos \varphi - z' \sin \varphi) + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) (z \sin \varphi + z' \cos \varphi)] L_2 - L_1 \} +$$

$$+ \varepsilon (1 + m_0) (z^0 + z^{0'}) L_3 - z^0 = \quad (2.9)$$

$$= 2(1 + m_0) \varepsilon \delta \{ (z + z'') [2(\sin \varphi - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \varphi) L_4 -$$

$$- (\cos \varphi + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \sin \varphi) L_5] - (z' + z''') \times$$

$$\times (\sin \varphi - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \varphi) L_5 \}$$

$$z = \varepsilon \frac{\operatorname{ctg}(a + \alpha)}{\sin b} \theta^*(\varphi), \quad z^0 = \varepsilon \frac{\operatorname{ctg}(a + \alpha)}{\sin b} \theta^0(\varphi),$$

$$\delta = \varepsilon (1 + m_0) \cos(a + \alpha) \quad (2.10)$$

$$L_1 = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} \left\{ 1 + \frac{3 + 2m_0}{1 + m_0} [z(\varphi') \cos \varphi' - z'(\varphi') \sin \varphi' + \right.$$

$$\left. + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) (z'(\varphi') \cos \varphi' + z(\varphi') \sin \varphi')] \right\} d\varphi'$$

$$L_2 = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} d\varphi', \quad L_4 = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \left[ \frac{w}{w'^2} \int_{\varphi'}^{\varphi} \left[ \frac{w^3}{w'^2} \int_{\varphi^0}^{\varphi'} \frac{u}{w'^2} d\varphi' \right] d\varphi' \right] d\varphi'$$

$$L_3 = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \left[ \frac{w}{w'^2} \int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' \right] d\varphi', \quad L_5 = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \left[ \frac{w}{w'^2} \int_{\varphi'}^{\varphi} \left[ \frac{w^3}{w'^2} \int_{\varphi^0}^{\varphi'} \frac{w}{w'^2} d\varphi' \right] d\varphi' \right] d\varphi'$$

Итак, получено уравнение для формы ударной волны, где  $\varphi^0 = \beta$  справа от  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi^0 = \varphi_3$  слева от  $\varphi = \varphi_1$ . Решив уравнение для каждой области, можно определить основные параметры задачи. Структура уравнения такова, что для него может быть решена задача Коши с тремя граничными условиями, т. е. для решения задачи в целом располагаем шестью произвольными.

Известны три условия: два в точке  $\varphi = \varphi_2$  — плавное сопряжение плоского участка ударной волны с криволинейной частью, и одно на оси симметрии (фиг. 1). Остаются три произвольных, и, казалось бы, что в точке  $\varphi = \varphi_1$  можно «состыковать»  $z^{(n)}(\varphi_1)$  для  $n = 0, 1, 2$ . Но известно, что в точке пересечения линии стекания с крылом градиент давления  $p_\varphi$  при  $\varphi = \varphi_1$  равен нулю.

Исследование условий обращения в нуль  $p_\varphi$  и  $w$  позволяет найти точное значение  $\varphi_1 = -a_1$  и установить <sup>1</sup>, что  $z'(\varphi_1) = 0$ . Таким образом, количество произволов уменьшается до двух, и в точке  $\varphi = \varphi_1$  могут быть состыкованы  $z^{(n)}(\varphi_1)$  для  $n = 0$  и  $1$ .

Уравнение (2.9) может быть решено справа от точки  $\varphi = \varphi_1$  так же, как это делалось в работе [1] — разложением  $z$  в ряд в точке  $\varphi = \varphi_2$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(\varphi_2)}{n!} (\varphi - \varphi_2)^n \quad (2.11)$$

с последующим отысканием коэффициентов  $z^{(n)}(\varphi_2)$ . При этом функционалы  $L_i(\varphi_2)$  (2.10) легко вычисляются.

Некоторую трудность представляет собой решение уравнения (2.9) слева от точки  $\varphi = \varphi_1$ . Однако, разложив  $z$  в ряд в точке  $\varphi = 0$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(0)}{n!} \varphi^n \quad (2.12)$$

Здесь  $L_i(0)$  можно вычислить с необходимой точностью.

В частности, если ограничиться четырьмя членами в разложениях (2.11), (2.12), то в итоге задача сведется к решению трансцендентного уравнения относительно  $z''(0)$ .

**3. Расчет обтекания крыла с ромбовидным поперечным сечением.** Рассмотрим случай  $z^0(\varphi) = 0$  и  $m_0 = 0$ , что соответствует  $M_\infty = \infty$  и поперечному сечению крыла в форме ромба. Подставляя выражение для плоской волны  $z = a_2 \sin(\beta - \varphi)$  в уравнение (2.9), найдем

$$a_2 = \frac{\delta}{K} \left[ 1 + \delta \frac{N - L}{K \sin(\beta + a_1)} \right] \csc \left( \beta + a_1 - \frac{M\delta}{K \sin(\beta + a_1)} \right)$$

$$N = \sin \beta - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \beta, \quad K = \cos(a + \alpha) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b}$$

$$L = \frac{\sin^2 b \operatorname{tg}^2(a + \alpha) [\cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos \beta - \sin \beta]}{1 + |\operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b|}$$

$$M = \frac{\operatorname{tg}^2(a + \alpha) \sin^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b} [\cos \beta + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \sin \beta]$$

Функционалы (2.10) запишутся в виде

$$L_1 = \frac{1 + 3a_2 N}{\Delta_1} \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta + \sigma)}, \quad L_4 = \frac{\sin 2(\varphi + \sigma)}{2\Delta_1} d$$

$$L_2 = \frac{1}{\Delta_1} \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta + \sigma)}, \quad L_5 = -\frac{\sin^2(\varphi + \sigma)}{\Delta_1} d$$

$$d = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3(\beta + \sigma) \sin^3(\varphi + \sigma) +$$

$$+ \frac{\sin(\beta - \varphi) \sin 2(\varphi + \sigma) \operatorname{ctg}(\beta + \sigma)}{2 \sin(\beta + \sigma)} - \frac{1}{3} \cos^3(\varphi + \sigma),$$

$$\sigma = a_1 - Ma_2, \quad \Delta_1 = K[1 + a_2 L]$$

<sup>1</sup> Следует отметить, что есть вторая возможность удовлетворить этим условиям, если потребовать равенства нулю кривизны скачка в точке стекания. Однако это приводит к тривиальному решению, соответствующему равномерному потоку справа от линии стекания.

Точка  $\varphi_2$  определится из уравнения

$$\sin(\varphi_2 + \sigma) = \frac{1}{\Delta_1} \left( \varepsilon \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} p^* \right)^{1/2}$$

$$p^* = \sin^2(a + \alpha) \sin^2 b \{ 1 + 2a_2 [\sin \beta - \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos b \cos \beta] - \varepsilon \}$$

Для коэффициентов разложения (2.11) получим

$$z_2 = z(\varphi_2) = a_2 \sin(\beta - \varphi_2), \quad z_2' = -a_2 \cos(\beta - \varphi_2),$$

$$z_2'' = \frac{z_2' [2 - (\varphi_2 + a_1)^2] - F(\varphi_2 + a_1)^2 z_2}{(\varphi_2 + a_1) [2 + F(\varphi_2 + a_1)]}$$

$$z_2''' = -(z_2 + z_2'')F - z_2', \quad F = 2 \operatorname{ctg}(\varphi_2 + \sigma) + \frac{\operatorname{ctg} \varphi_2 + \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha)}{1 - \cos b \operatorname{tg}(a + \alpha) \operatorname{ctg} \varphi_2}$$

Прежде чем написать необходимые соотношения слева от точки  $\varphi = \varphi_1$ , проведем некоторые оценки. Для наклона ударной волны в точке

$$\varphi_3 = -\operatorname{tg}(a + \alpha) \cos bz(\varphi_3) + O(\varepsilon a^3)$$

получим соотношение

$$z'(\varphi_3) = \operatorname{ctg}(a + \alpha) \cos b + O(\varepsilon a^2) \quad (3.1)$$

Порядок коэффициентов в разложении (2.12) можно оценить следующим образом, учитывая, что

$$\varphi_3 \sim \varepsilon a, \quad \varphi_1 \sim a, \quad z_0 = z(0) \sim \varepsilon, \quad z_0' \sim a, \quad z_0'' \sim 1, \quad z_0''' \sim a^{-1}.$$

Тогда, если отбросить члены порядка выше  $\varepsilon^2$ , функционалы  $L_2$  и  $L_1$  запишутся в виде:

$$L_2 = -\frac{1}{\cos(a + \alpha) (1 + Tz_0'')^2} \{ Tz_0'' \ln[(1 - z_0'') \sin^2(a + \alpha)] - 1 + (1 - z_0'') \sin^2(a + \alpha) \} \quad (3.2)$$

$$L_1 = (1 + 3z_0)L_2, \quad T = \frac{\operatorname{tg}^2(a + \alpha) \sin^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2(a + \alpha) \cos^2 b} \quad (3.3)$$

Функционалы  $L_4$  и  $L_5$ , вычисленные в точке  $\varphi = 0$  при аналогичных предположениях, имеют следующие порядки:

$$L_4 \sim \varepsilon a, \quad L_5 \sim \varepsilon^2 a^2 \quad (3.4)$$

Таким образом, учитывая соотношения (3.2)–(3.4), уравнение (2.9) в точке  $\varphi = 0$  запишем в виде

$$z_0 + \frac{\varepsilon(1 + z_0)}{(1 + Tz_0'')^2} \{ Tz_0'' \ln[(1 - z_0'') \sin^2(a + \alpha)] - 1 + (1 - z_0'') \sin^2(a + \alpha) \} = 0$$

Аналогично условие (3.1) представится в форме

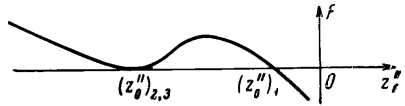
$$z_0'' z_0 \operatorname{tg}(a + \alpha) \cos b - z_0' + \operatorname{ctg}(a + \alpha) \cos b = 0$$

В точке  $\varphi = \varphi_1$  имеем  $z'(\varphi_1) = 0$ ,  $z(\varphi_1 - 0) = z(\varphi_1 + 0)$ , или в принятых обозначениях

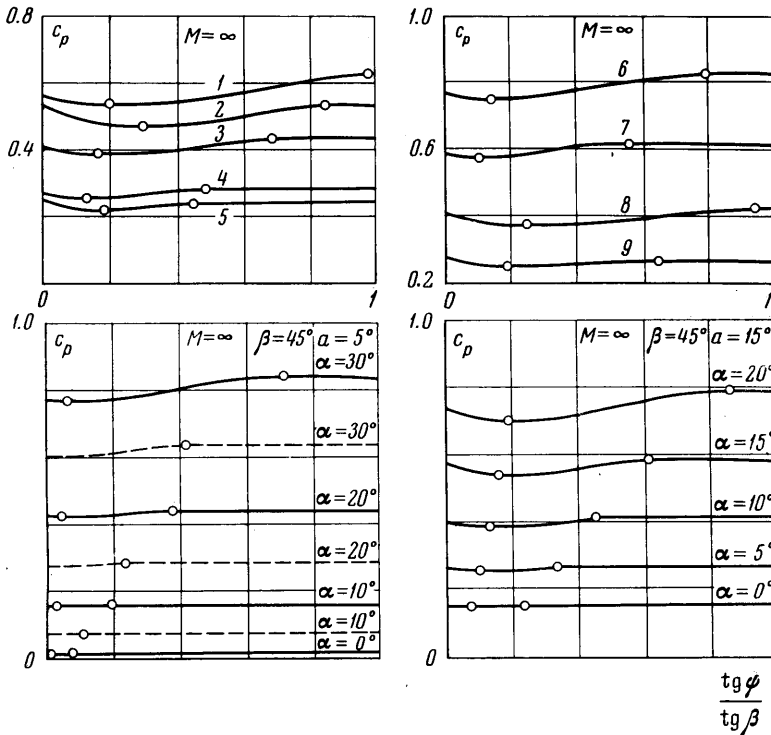
$$\begin{aligned} z_0' + z_0'' \varphi_1 + 1/2 z_0''' \varphi_1^2 &= 0 \\ z_0 + z_0' \varphi_1 + 1/2 z_0'' \varphi_1^2 + 1/6 z_0''' \varphi_1^3 &= \\ &= z_2 + z_2'(\varphi_1 - \varphi_2) + 1/2 z_2''(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + 1/6 z_2'''(\varphi_1 - \varphi_2)^3 \end{aligned}$$

Эта система соотношений сводится, как легко проверить, к одному трансцендентному уравнению относительно  $z_0''$ , после решения которого легко определяются остальные коэффициенты разложения (2.12). Уравнение имеет три действительных корня, два из которых кратные (фиг. 5). Физический смысл задачи требует, чтобы  $z_0'' + z_0$  было меньше нуля. Исследование показывает, что  $(z_0'')_1$  при некоторых  $a$  и  $\alpha$  становится больше нуля, и задача сводится к отысканию кратного корня.

На фиг. 6 построены кривые распределения давления при  $M = \infty$ , рассчитанные по четвертой формуле системы (1.3) для разных  $a$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ : 1 —  $a = 10^\circ$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ ; 2 —  $a = 20^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ; 3 —  $a = 10^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ ; 4 —  $a = 10^\circ$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 35^\circ$ ; 5 —  $a = 20^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 40^\circ$ ; 6 —  $\alpha = 25^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ; 7 —  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ; 8 —  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ; 9 —  $\alpha = 10^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ . Кривые 6–9 построены для  $a = 10^\circ$ . Исследование выражения (2.8) показывает, что  $p_2 < 0$ . Это свидетельствует о том, что давление на оси симметрии падает от ударной волны к телу. На фиг. 7 нанесены кривые распределения давления при  $M = \infty$  на плоском треугольном крыле (штриховая линия) и рассчитанные по данной теории (сплошные линии), что дает возможность оценить влияние толщины крыла  $a$  на распределение давления.



Фиг. 5



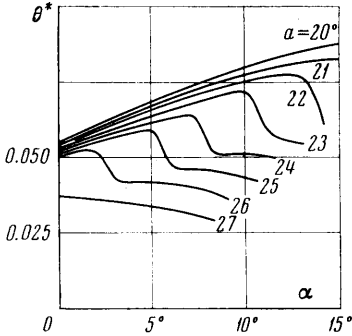
Фиг. 6

Фиг. 7

На фиг. 8 построены кривые отхода ударной волны в плоскости симметрии для различных  $a$  ( $20^\circ \leq a \leq 27^\circ$ ),  $\beta = 45^\circ$  в зависимости от  $a$ . Кривые ограничены слева  $\alpha = 0$ , справа  $\alpha$ , соответствующими режиму отсоединения ударной волны от передних кромок. Вид кривых указывает



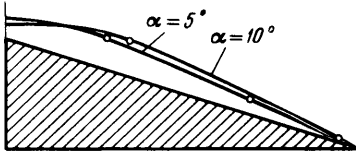
на то, что, начиная с некоторого  $\alpha$ , отход волны в плоскости симметрии  $l$  начинает уменьшаться, при этом толщина ударного слоя над гранями крыла увеличивается (фиг. 9) ( $M = \infty, a = 25^\circ$ ).



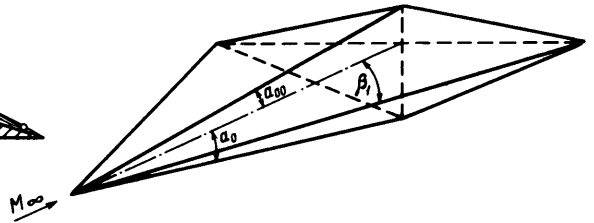
Фиг. 8

По-видимому, такое поведение ударной волны можно объяснить одновременным влиянием двух факторов: с одной стороны, увеличение отхода ударной волны с увеличением угла атаки, что наблюдается обычно на тонком треугольном крыле, с другой — уменьшение отхода за счет увеличения интенсивности растекания газа от плоскости симметрии с увеличением угла атаки. Таким образом, для разных толщин крыла  $a$  существуют соответствующие им углы атаки  $\alpha$ , при которых начинается преобладающее влияние второго фактора.

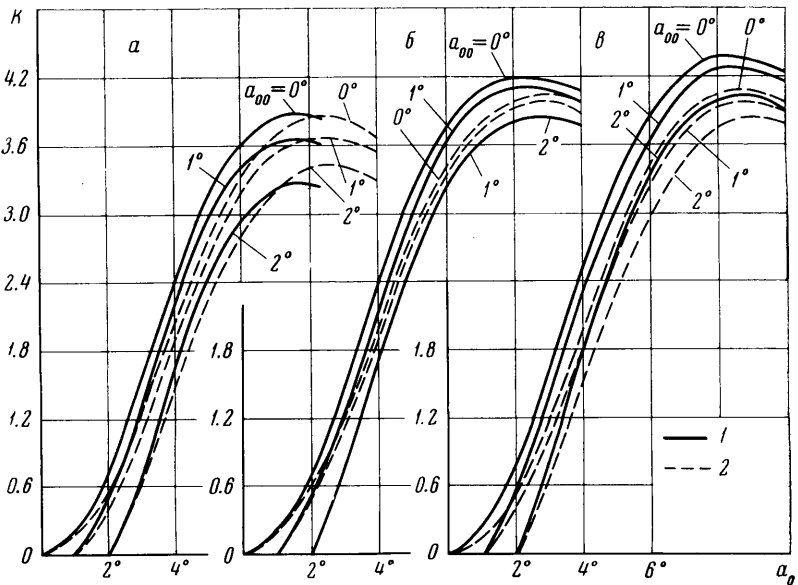
Найденное решение позволяет исследовать поведение аэродинамического качества крыла, составленного из двух крыльев рассмотренного типа при обтекании под нулевым углом атаки (фиг. 10). Расчеты проводились для различных значений площади миделя  $S$ . Каждая кривая (сплошные линии —



Фиг. 9

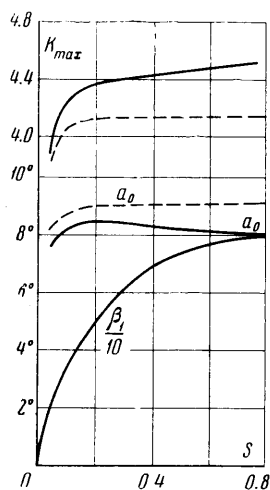


Фиг. 10

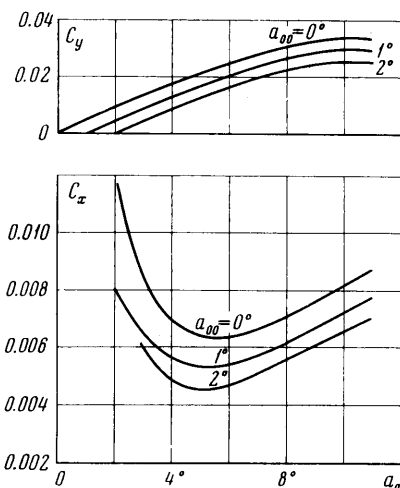


Фиг. 11

данная теория, штриховые — теория Ньютона) выстраивалась при фиксированной толщине  $a_{00}$  верхней половины крыла и переменной толщине  $a_0$  нижней половины (фиг. 11). Здесь а) —  $S = 0.05$ , б) —  $S = 0.1$ , в) —  $S = 0.2$ . Коэффициент трения  $C_\tau$  считался постоянным и равным  $2 \cdot 10^{-3}$ . Следует отметить, что максимальным качеством обладает крыло, у которого  $a_{00}$  верхняя толщина равна нулю. Как и следовало ожидать (фиг. 12),



Фиг. 12



Фиг. 13

кривая (сплошная линия) максимального аэродинамического качества, построенная по приведенному решению, лежит выше кривой максимального качества, построенной по формуле Ньютона с учетом трения. На фиг. 12 представлены значения геометрических характеристик (сплошные линии — данная теория, штриховые — теория Ньютона) оптимального крыла в зависимости от площади миделя  $S$ . Зависимость подъемной силы и сопротивления от угла  $\alpha_0$  показана на фиг. 13 для  $S = 0.1$ . Обращает на себя внимание поведение сопротивления, которое с увеличением толщины крыла уменьшается до некоторого минимума, а затем начинает возрастать.

Поступило 9 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. Теория обтекания крыла гиперзвуковым потоком. ПММ, 1970, № 3.
2. Гонор А. Л., Остапенко Н. А. Теория гиперзвукового обтекания крыла. М., 1969 (НИИ механики МГУ, отч. № 897).