

РАСЧЕТ ВЯЗКОГО ГИПЕРЗВУКОВОГО УДАРНОГО СЛОЯ С ПОДВОДОМ МАССЫ ПРИ УМЕРЕННО МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. Л. АНКУДИНОВ

(Москва)

Двумерная стационарная задача вязкого гиперзвукового течения около нетонких гладких тел исследуется в рамках двухслойной модели Ченга тонкого ударного слоя (скачок, ударный слой) для области, не ограничивающейся окрестностью точки торможения. Рассматриваются условия заданной температуры стенки, теплоизолированной поверхности и условия вдува с поверхности газа, однородного с газом в основном потоке.

Предлагается форма преобразования уравнений вязкого ударного слоя в обобщенных переменных Мизеса, позволяющая рассматривать задачу в полуполосе единым образом для затупленных и острых плоских и осесимметричных тел без разложения в ряд по продольной координате в окрестности критической точки и раскрывающая особенность решения в остром носике. В разностных методах, не требующих вычисления старшей производной, предложенное преобразование позволяет избежать раскрытия особенности на стенке, характерной для задачи в рассматриваемых переменных.

Приводятся некоторые результаты расчета ударного слоя на сфере и остром конусе.

Обозначения

x^* — расстояние вдоль поверхности тела, отсчитываемое от критической точки,
 y^* — расстояние по нормали к поверхности тела,
 u^*, v^* — составляющие скорости в направлениях x^* и y^* ,

T^* — температура,

ρ^* — плотность,

p^* — давление,

I^* — энтальпия,

H^* — полная энтальпия,

R — газовая постоянная,

ψ^* — функция тока,

μ^* — коэффициент вязкости,

k^* — коэффициент теплопроводности,

V_∞^* — скорость набегающего потока,

β — угол поверхности тела с осью,

l^* — характерный линейный размер,

Re — число Рейнольдса,

P — число Прандтля,

R_w^*, r^* — радиусы продольной кривизны поверхности и поперечного сечения осесимметричного тела,

c_p^*, c_v^* — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме,

μ_0^* — коэффициент вязкости при температуре торможения набегающего потока,

ν — параметр, равный нулю в плоском случае и единице в осесимметричном.

Индексы ∞, w относятся соответственно к величинам в набегающем (невозмущенном) потоке и на поверхности тела.

Соответствующие величины без звездочек в тексте считаются безразмерными

$$x = \frac{x^*}{l^*}, \quad y = \frac{y^*}{l^*}, \quad u = \frac{u^*}{V_\infty^*}, \quad v = \frac{v^*}{V_\infty^*}$$

$$T = \frac{T^*}{V_\infty^{*2}/c_p^*}, \quad I = \frac{I^*}{V_\infty^{*2}}, \quad H = \frac{H^*}{V_\infty^{*2}}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_\infty^*}$$

$$p = \frac{p^*}{\rho_\infty^* V_\infty^{*2}}, \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0^*}, \quad r = \frac{r^*}{l^*}, \quad \psi = \frac{\psi^*}{\rho_\infty^* V_\infty^* l^{*(1+\nu)}}$$

$$Re = \frac{V_\infty^* l^* \rho_\infty^*}{\mu_0^*}, \quad P = \frac{\mu^* c_p^*}{k^*}, \quad \kappa = \frac{c_p^*}{c_v^*}$$

1. Рассматривая двумерную стационарную задачу гиперзвукового обтекания совершенным газом гладких нетонких (плоских и осесимметричных) тел в рамках теории тонкого вязкого ударного слоя [1] с использованием двуслойной модели Ченга [2, 3], можно получить системы уравнений соответственно для двух характерных областей (слоев) возмущенного потока около поверхности. Уравнения ударного слоя

$$\begin{aligned} \rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*}, & \frac{\rho^* u^{*2}}{R_w^*} &= \frac{\partial p^*}{\partial y^*} \\ \rho^* \left(u^* \frac{\partial H^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial H^*}{\partial y^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial y^*} \frac{\mu^*}{P} \frac{\partial}{\partial y^*} \left[H^* - (1-P) \frac{u^{*2}}{2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x^*} \rho^* u^* r^{*v} + \frac{\partial}{\partial y^*} \rho^* v^* r^{*v} &= 0, & p^* &= \rho^* R T^*, \quad \mu^* = u^*(T^*) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Упрощение уравнений скачка на условной поверхности раздела двух слоев (линии L в плоскости x^*y^*) дает так называемые модифицированные соотношения Ренкина—Гюгонио для скачка

$$\begin{aligned} \rho_\infty^* v_\infty^* (u_l^* - u_\infty^*) &= \mu_l^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_l, & p_l^* &= \rho_\infty^* v_\infty^{*2} \\ \rho_\infty^* v_\infty^* (H_l^* - H_\infty^*) &= \frac{\mu^*}{P} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^*} \left[H^* - (1-P) \frac{u^{*2}}{2} \right] \right\}_l \\ \rho_l^* v_l^* &= \rho_\infty^* v_\infty^* \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индекс l относится к величинам на линии раздела L .

Использование уравнений (1.2) в качестве внешнего граничного условия системы (1.1) дает возможность исследовать область собственно ударного слоя независимо от области перехода через скачок. Решение для скачка можно получить путем сращения с решением для собственно ударного слоя (после расчета задачи собственно ударного слоя).

Рассмотренная модель вязкого ударного слоя может быть использована для широкого диапазона чисел Рейнольдса — от режима полностью размазанного слоя до течения с идеальным скачком.

2. Ниже рассматривается задача собственно ударного слоя (система (1.1)) при граничных условиях на стенке, соответствующих вдуву однородного газа с поверхности и заданной температуре поверхности.

Формально оба эти условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u^* &= 0, & \rho^* v^* &= c(\rho^* v^*)_a \\ & \text{при } y^* &= 0 \\ ak^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} &= bc_p^* (\rho^* v^*)_a (T^* - T_a^*) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь безразмерные постоянные a , b и c равны 0 или 1 в зависимости от типа граничных условий:

при вдуве с условием баланса тепла на стенке

$$a = b = c = 1, \quad (\rho^* v^*)_a = (\rho^* v^*)_w, \quad T_a^* = T_i^*$$

при заданной температуре стенки

$$a = c = 0, \quad b = 1, \quad T_a^* = T_w^*(x^*), \quad (\rho^* v^*)_a \neq 0$$

где T_i^* — температура вдуваемого газа, однородного с газом в основном потоке.

Видно, что форма (2.1) включает в себя также условия теплоизолированной поверхности без вдува

$$a = 1, \quad (\rho^* v^*)_a = 0$$

и условия вдува при заданной температуре стенки

$$(\rho^* v^*)_a = (\rho^* v^*)_w \neq 0, \quad a = 0, \quad b = c = 1$$

и при теплоизолированной поверхности

$$(\rho^* v^*)_a = (\rho^* v^*)_w, \quad a = c = 1, \quad b = 0$$

Такая унифицированная форма граничного условия удобна в расчетной практике при составлении программы для вычислительной машины (для упрощения перехода от одного варианта расчета, отличающегося граничным условием, к другому).

Рассмотрим следующее преобразование (см. п. 4):

$$s = x^j, \quad \zeta = \left(K \frac{\Psi - \Psi_w}{1 - \Psi_w} \right)^{1/2}, \quad \Psi = \frac{2\nu\psi}{r^{1+\nu}}$$

$$p^\circ = \frac{p - p_0}{r^{2j}}, \quad U = \frac{u}{r^j \zeta}, \quad \Theta = \frac{H - H_a}{r^{1-j}}, \quad K = \text{const} > 0 \quad (2.2)$$

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{для плоских тел,} \\ 1 & \text{для осесимметричных тел,} \end{cases} \quad j = \begin{cases} 1 & \text{для затупленных тел} \\ 1/2 & \text{для острых тел} \end{cases}$$

$p_0 = p(s = 0)$, $H_a = I_w$ для заданной температуры стенки, $H_a = H_\infty$ при теплоизолированной поверхности, при вдуве охладителя

$$H_a = \begin{cases} I_i & \text{для затупленного тела} \\ I_w(x = 0) \equiv I_w & \text{для острого тела} \end{cases}$$

Обезразмеренные уравнения (1.1) и условия (1.2), (2.1) в координатах s, ζ примут вид уравнения ударного слоя

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{(K 2\nu)^2}{4R_e} \mu \rho U \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{(K 2\nu)^2}{4R_e} \mu \rho U^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ r \frac{d\Psi_w}{dx} (\zeta^2 - K) - (1 + \nu) \frac{dr}{dx} [\zeta^2 (1 - \Psi_w) + K\Psi_w] \right\} \times$$

$$\times (1 - \Psi_w) r^{1-j} \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \left\{ r \frac{d\Psi_w}{dx} (\zeta^2 - K) - (1 + \nu) \frac{dr}{dx} K\Psi_w + \right.$$

$$\left. + [2j - (\nu + 1)] \frac{dr}{dx} \zeta^2 (1 - \Psi_w) \right\} (1 - \Psi_w) r^{1-j} U + (1 - \Psi_w)^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{2p^\circ r^{1-j}}{U\rho} \frac{dr}{dx} j + j \frac{r^{1-j}}{U\rho} \frac{r}{x} s \frac{\partial p^\circ}{\partial s} + \frac{\zeta r^{2(1-j)}}{2\nu K \rho R_w} \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ r \frac{d\Psi_w}{dx} (\zeta^2 - K) - (1 + \nu) \frac{dr}{dx} [\zeta^2 (1 - \Psi_w) + K\Psi_w] \right\} \right\} +$$

$$+ r \left(\frac{r}{x} \right)^{1-j} j \zeta^2 (1 - \Psi_w)^2 \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{1}{P} \frac{(K2^\nu)^2}{4R_e} \mu \rho U \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \frac{(K2^\nu)^2}{4R_e} \left(1 - \frac{1}{P}\right) \mu \rho U^2 \zeta r^{3j-1} \left(\zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + U \right) \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ r \frac{d\Psi_w}{dx} (\zeta^2 - K) - (1 + \nu) \frac{dr}{dx} [\zeta^2 (1 - \Psi_w) + K\Psi_w] \right\} \times \\ \times (1 - \Psi_w) r^{1-j} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{dr}{dr} \zeta (1 - j) (1 - \Psi_w) r^{1-j} \Theta + \\ + \zeta \frac{dH_a}{dx} (1 - \Psi_w)^2 r + r \left(\frac{r}{x} \right)^{1-j} j \zeta (1 - \Psi_w)^2 \frac{\partial \Theta}{\partial s} \\ \frac{\partial p^\circ}{\partial \zeta} = \frac{\zeta^2 (1 - \Psi_w)}{R_w 2^{\nu-1} K} r^{1-j} U, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho I \end{aligned} \quad (2.3)$$

условия на внешней границе (при $\zeta = K^{1/2}$)

$$\begin{aligned} \frac{K2^{\nu-1}}{R_e} \frac{1}{\sin \beta} \mu \rho U \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \left[\frac{K2^{\nu-1}}{R_e} \frac{1}{\sin \beta} \mu \rho U + \zeta r^{1-j} (1 - \Psi_w) \right] U - \\ - \cos \beta r^{1-2j} (1 - \Psi_w) = 0 \\ \frac{K2^{\nu-1}}{R_e P} \frac{1}{\sin \beta} \mu \rho U \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + r^{1-j} (1 - \Psi_w) \Theta + \frac{K2^{\nu-1}}{R_e} \frac{1}{\sin \beta} \left(1 - \frac{1}{P}\right) \times \\ \times \mu \rho U^2 \zeta \left(\zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + U \right) r^{3j-1} - (H_\infty - H_a) (1 - \Psi_w) = 0 \\ p^0 = \frac{\sin(\beta + \beta_0) \sin(\beta - \beta_0)}{r^{2j}}, \quad \beta_0 = \beta(s=0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

условия на поверхности тела (при $\zeta = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{r^{1-j}}{3\mu} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \mu}{\partial I} - \frac{\mu}{I} \right) U - \left(2p^\circ \frac{dr}{dx} j + js \frac{r}{x} \frac{\partial p^\circ}{\partial s} \right) (1 - \Psi_w)^2 \times \\ \times r^{1-j} \left(\frac{3K2^\nu}{4R_e} \mu \rho^2 U^2 \right)^{-1} + \frac{K}{2} \left[r \frac{d\Psi_w}{dx} + (1 + \nu) \frac{dr}{dx} \Psi_w \right] \times \\ \times (1 - \Psi_w) r^{1-j} \left(\frac{3K2^\nu}{4R_e} \mu \rho \right)^{-1} = 0, \quad \Psi_w = -c \frac{2^\nu}{r^{1+\nu}} \int_0^x (\rho \nu)_w r^\nu dx \\ a \frac{\mu}{R_e P} \frac{K2^{\nu-1}}{(1 - \Psi_w)} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \rho U = b \rho \nu [r^{1-j} \theta + (H_a - I_i)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Преобразование (2.2) дает возможность получить единую форму уравнений вязкого ударного слоя для плоских и осесимметричных затупленных и острых нетонких тел в стандартной области независимых переменных $s \geq 0$, $0 \leq \zeta \leq K^{1/2}$, позволяющую проводить интегрирование без разложения в ряд по продольной координате в окрестности критической точки тела. Кроме того, в уравнениях не возникает на поверхности тела ни особенности, свойственной чистому преобразованию Мизеса, ни неопределенности, характерной для переменных x , ζ , при расчете коэффициентов квазилинеаризованной системы для определенного класса вычислительных методов, типа [4] (не требующих в своем алгоритме расчета высшей производной или ее конечно-разностного представления). Следует, однако, отметить, что последнее достигается усложнением граничного условия на стенке.

При отсутствии вдува граничное условие (2.5) выглядит проще ($rd\Psi_w/dx = \Psi_w = 0$), еще более упрощается оно для теплоизолированной

стенки ($\partial\theta/\partial\xi = 0$) и для случая $\mu \sim T$ ($\partial\mu/\partial I - \mu/I = 0$), но особенно простой вид оно имеет, когда при теплоизолированной стенке без вдува рассматриваются течения около клина или конуса ($p^* \equiv 0$). В последнем случае первое соотношение в (2.5) становится

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$$

Подобное же рассмотрение (преобразование (2.2) при $j = 1$) возможно и для пограничного слоя на затупленных телах, т. е. для случая, когда вместо второго уравнения системы (1.1) имеем $\partial p^*/\partial y^* = 0$, а температура, скорость и давление на внешней границе — известные функции от x^* .

Интегрирование параболической системы (2.3) с условиями (2.4) и (2.5) производилось по методу работы [4]. Детали и особенности применения метода к рассматриваемой задаче в работе не приводятся.

3. Расчеты вязкого ударного слоя, результаты которых представлены на фиг. 1 и 2, проведены для следующих случаев.

Сфера без вдува (фиг. 1, а)

$$M_\infty = \infty, \quad \kappa = 5/3, \quad Re = 20, \quad P = 0.75 \\ T_w = 0.015, \quad (\rho v)_w = 0, \quad \mu = \sqrt{T}$$

Сфера со вдувом (фиг. 1, б)

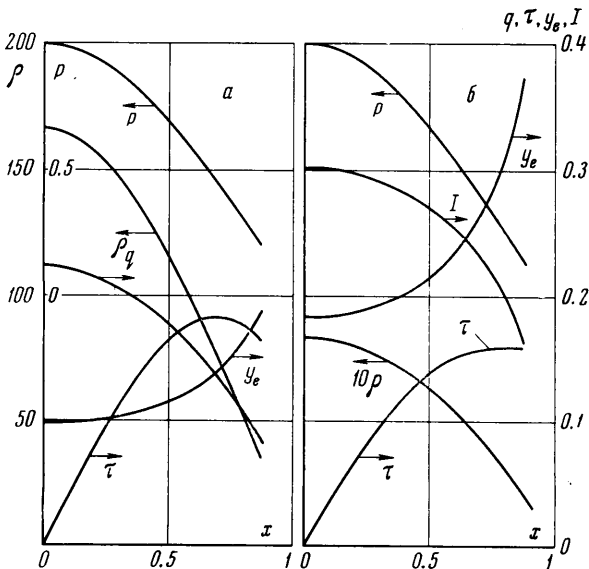
$$M_\infty = \infty, \quad \kappa = 5/3, \quad Re = 20, \quad P = 0.75 \\ T_i = 0.015, \quad (\rho v)_w = 0.2, \quad \mu = \sqrt{T}$$

Острый конус с углом полураствора 45° без вдува (фиг. 2)

$$M_\infty = \infty, \quad \kappa = 4/3, \quad Re = 24, \quad P = 0.71 \\ T_w = 0.0625, \quad \mu = T$$

Вдвух рассмотрен только для сферы. Решение для сферы доведено до точки, близкой к месту отрыва ударного слоя (где давление на стенке становится равным нулю). Представленные результаты относятся к малым числам Рейнольдса, при которых эффективность вдува, вообще говоря, невелика (расчеты проводились и для больших чисел Рейнольдса до $Re \sim 2000$). Решение для конуса приводится в переменной подобия [2].

Проведенные расчеты хорошо соответствуют результатам работы [2] (конус, критическая точка затупленного тела), сравнение с которыми проводилось в целях контроля правильности работы программы для ЭВМ. Расчет для области скачка не производился.



Фиг. 1

Фиг. 1

На фигурах принято

$$x = x^* / R_w^*, \quad \tau = \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_w \frac{1}{V_\infty^{*2} \rho_\infty^*}$$

$$q = \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_w \frac{1}{V_\infty^{*3} \rho_\infty^*}, \quad \chi = \frac{(\kappa - 1) V_\infty^* \rho_\infty^* x^*}{\mu_0^* \cos \beta}$$

4. Использование в задаче переменных Мизеса представляет собой существенный момент, так как дает возможность избежать определения неизвестной границы, позволяет с принятой в теории ударного слоя точностью свести проблему к задаче с известными границами.

В случае заостренного тела разделяющая линия L считается присоединенной к носу.

Если искать в области $s \geq 0, 0 \leq \zeta \leq K^{1/2}$ решение вида

$$U = \frac{u}{\zeta r^j}, \quad \Theta = \frac{H - H_a}{r^{1-i}}$$

$$p^\circ = \frac{p - p_0}{r^{2k}}, \quad \text{где } U|_{x=0} \equiv 0 \quad (4.1)$$

$$\Theta|_{x=0} \neq 0, \quad p^\circ|_{x=0} \neq 0$$

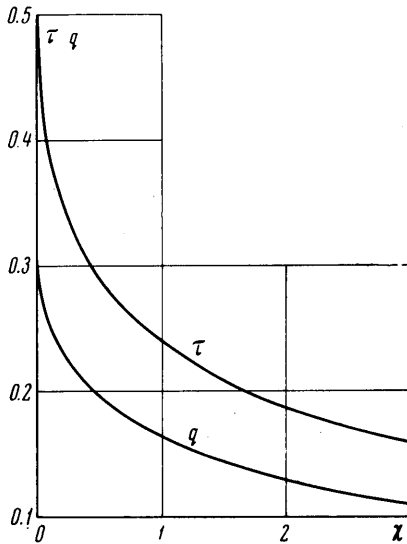
и конечны, $j > 0, p_0 = \text{const} = p(s = 0)$, то, используя граничные условия задачи (стыкуя вид решения (4.1) с внешними граничными условиями), можно получить некоторые (необходимые) оценки величин j, i, k и их конкретные значения в рассматриваемых случаях затупленных и острых тел, а именно

$$j = i = k =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{для затупленных тел} \\ 1/2 & \text{для заостренных тел} \end{cases}$$

Чтобы функции решения были регулярными по продольной координате в носике (не возникало бесконечных производных), естественно рассмотреть вместо x переменную $s = x^j$.

Граничное условие для функции U на поверхности тела получается из требования конечности производной $\partial U / \partial \zeta^2$ на стенке (с использованием первого уравнения импульсов).



Фиг. 2

Поступило 17 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Cheng H. K. The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. IAS Paper, 1963, No. 63—92. (Рус. перев.: ЦАГИ, БНИ, Переводы, 1964, № 110).
3. Анкудинов А. Л. Расчет вязкого гиперзвукового обтекания при умеренных числах Рейнольдса. В сб. «Аэродинамическое нагревание при гиперзвуковых скоростях потока». (Сб. работ). Тр. ЦАГИ, 1968, вып. 1106, стр. 176—191.
4. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», М., «Наука», 1964, стр. 304—325.