О ТЕРМОФОРЕЗЕ АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В ПОЧТИ СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМ РЕЖИМЕ

И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(*Москва*)

Путем решения линеаризованного модельного уравнения Больцмана получено выражение для силы, действующей на аэрозольную частицу, находящуюся в неоднородно нагретом газе.

Выбор метода, применяемого при теоретическом анализе явления термофореза, определяется безразмерным числом Кнудсена K, равным отношению длины свободного пробега газовых молекул к радиусу сферической аэрозольной частицы ($K = \lambda / R$). В предельном случае $K \to \infty$ (свободномолекулярный режим) выражение для скорости термофореза было получено Б. В. Дерягиным и С. П. Бакановым [1], Вальдманом [2, 3]. При больших, но конечных, числах Кнудсена (почти свободномолекулярный режим) тепловая сила была впервые вычислена Броком [4, 5].

Во всех цитируемых работах при постановке граничных условий на поверхности аэрозольной частицы использовалось предположение о том, что температура отраженных от поверхности частицы молекул равна температуре самой поверхности. Это предположение является нестрогим, так как в общем случае температура падающих и отраженных от поверхности частицы молекул, связана с температурой поверхности частицы коэффициентом аккомодации энергии, который в большинстве случаев отличен от единицы [6]. В данной работе получено выражение для скорости термофореза в почти свободномолекулярном режиме. Вычисления выполнены на основании функции распределения, которая найдена из решения линеаризованного модельного уравнения Больцмана со столкновительным оператором в форме Батнагара, Гросса и Крука [7].

Рассмотрим сферическую аэрозольную частицу радиуса $R \ll \lambda$, находящуюся в газе в поле градиента температуры. На больших расстояниях от частицы градиент температуры считается постоянным, а также предполагается, что давление будет постоянным. Введем сферическую систему координат с началом в центре частицы и полярной осью, направленной вдоль градиента температуры в невозмущенном газе. Сила, действующая на частицу, может быть найдена при помощи формулы

$$\mathbf{F} = -\int d\mathbf{S} \cdot \sum_{\pm} \int_{\pm} m\mathbf{v}\mathbf{v} f^{\pm}(\mathbf{v}, R, \theta)\, d\mathbf{v} \tag{1}$$

$$d\mathbf{S} = 2\pi R^2 \mathbf{n} \sin\theta d\theta$$

Здесь $\mathbf{n}$ — вектор нормали, θ — полярный угол, индексы плюс и минус здесь и в дальнейшем означают величины для молекул, отраженных от частицы и падающих на нее.

Для нахождения функции распределения воспользуемся модельным уравнением Больцмана со столкновительным членом в форме [7]. Это уравнение имеет вид

$$\mathbf{c} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = K_{11}(f_{eq} - f), \qquad \mathbf{c} = \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} \mathbf{v} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}$ — радиус-вектор, K_{11} — столкновительный параметр модели, f_{eq} — локально-максвелловская функция распределения.

При выполнении условия $\lambda|\nabla \ln T| \ll 1$ уравнение (2) может быть линеаризовано. Линеаризованная локально-максвелловская функция распределения дается выражением [8]

$$f_{eq} = f^{(0)}[1 + \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}(c^2 - {}^5/_2) + \nu(\mathbf{x}) + (c^2 - {}^3/_2)\tau(\mathbf{x}) + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{x})] \qquad (3)$$

$$f^{(0)} = n_0\left(\frac{m}{2\pi kT_0}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-mv^2}{2kT_0}\right), \qquad \mathbf{g} = \frac{(\nabla T)_\infty}{T_0}$$

Здесь $\nu(\mathbf{x})$, $\tau(\mathbf{x})$ — поправки к плотности и температуре, обусловленные наличием аэрозольной частицы, $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ — безразмерная скорость течения газа, возникающего вблизи аэрозольной частицы.

Будем искать функцию распределения в виде

$$f^{\pm} = f^{(0)}[1 + \mathbf{g}\cdot\mathbf{x}(c^2 - {}^5/_2) + a_1(\mathbf{g}\cdot\mathbf{c})S_{3/2}^{(1)}(\mathbf{c}^2) + \Phi^{\pm}(\mathbf{c}, \mathbf{x})] \qquad (4)$$

Здесь первые три слагаемых представляют собой распределение Чепмена — Энскога [9]. $\Phi(\mathbf{c}, \mathbf{x})$ — поправка, описывающая влияние аэрозольной частицы на распределение газовых молекул.

Подставляя (4) в (2) и выбирая K_{11} так, чтобы на больших расстояниях от частицы функция распределения точно переходила в распределение Чепмена — Энскога, будем иметь уравнение

$$\mathbf{c}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{r}} = \varepsilon\left\{\nu(\mathbf{r}) + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau(\mathbf{r}) + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{c}, \mathbf{r})\right\}, \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}}{R} \qquad (5)$$

Здесь величина ε для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, дается выражением

$$\varepsilon = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\frac{R}{\lambda}$$

В работе [10] развит метод решения уравнений типа уравнения (5), который годен для малых ε. Метод состоит в представлении решения в виде ряда по степеням ε. Поправка будет даваться выражением

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \ldots \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получаем систему уравнений для функций Φ_i. Имея в виду вычислить Φ_1, напишем только первые два уравнения системы. Эти уравнения имеют вид

$$\mathbf{c}\cdot\frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{r}} = 0 \qquad (7)$$

$$\mathbf{c}\cdot\frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{r}} = \varepsilon\left\{-\Phi_0 + \nu^{(0)}(\mathbf{r}) + \left(\mathbf{c}^2 - \frac{3}{2}\right)\tau^{(0)}(\mathbf{r}) + 2\mathbf{c}\cdot\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{r})\right\} \qquad (8)$$

Здесь величины $\nu^{(0)}(\mathbf{r})$, $\tau^{(0)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{r})$ вычислены при помощи свободно-молекулярной функции Φ_0.

При нахождении Φ_i на каждом этапе решения необходимо удовлетворить граничным условиям на поверхности частицы.

Будем предполагать, что молекулы отражаются от поверхности частицы с изотропным в пространстве скоростей максвелловским распределением. Температура отраженных молекул связана с температурой падающих и температурой поверхности частицы при помощи коэффициента аккомодации энергии, который определяется формулой

$$\alpha_e = \frac{E^- - E^+}{E^- - E_s}. \tag{9}$$

Здесь $E^\mp$ — потоки энергии через поверхность тела падающих и отраженных молекул, E_s — поток энергии, который уносили бы отраженные молекулы, если бы газ находился в равновесии со стенкой.

Функция распределения молекул, отраженных от поверхности частицы, будет иметь вид

$$f^+(\mathbf{c},\ 1,\ \theta) = f^{(0)}\{1 + \nu_r^{(0)}(s) + \nu_r^{(1)}(s) + (c^2 - {}^3/_2)\,[\tau_r^{(0)}(s) + \tau_r^{(1)}(s)]\} \tag{10}$$

Параметры $\nu_r^{(i)}(s)$, $\tau_r^{(i)}(s)$ находятся из условий

$$\mathbf{n}\cdot\left[\int\limits_+ \mathbf{v}f^+\,d\mathbf{v} + \int\limits_- \mathbf{v}f^-\,d\mathbf{v}\right] = 0 \qquad (r=1) \tag{11}$$

$$\mathbf{n}\cdot\left[\int\limits_+ \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2\mathbf{v}\,f^+\,d\mathbf{v} + \int\limits_- \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2\mathbf{v}\,f^-\,d\mathbf{v}\right] = -\varkappa_s\left(\frac{\partial T_s}{\partial r}\right) \qquad (r=1) \tag{12}$$

Здесь $\varkappa_s$ — теплопроводность частицы, T_s — температура частицы.

Соотношение (11) выражает условие отсутствия потока молекул через поверхность частицы, (12) — условие равенства радиального потока энергии на поверхности частицы радиальному потоку энергии в газе вблизи поверхности.

Распределение температуры частицы находится из решения однородного уравнения Лапласа, и оно имеет вид

$$T_s = T_0 + Ar\cos\theta \tag{13}$$

Из выражений (4), (9)—(13) будем иметь

$$\nu_r^{(0)}(s) = -{}^5/_{16}(1-\alpha_e)\,a_1\sqrt{\pi}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} \tag{14}$$

$$\tau_r^{(0)}(s) = {}^5/_8(1-\alpha_e)\,a_1\sqrt{\pi}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} \tag{15}$$

$$\nu_r^{(1)}(s) = \left[\left(\frac{1}{2}\alpha_e - 1\right)R - \frac{1}{4}\alpha_e^2 R\frac{\varkappa_f}{\varkappa_s}\right]\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} - \beta - \frac{1}{2}(1-\alpha_e)(\beta+\gamma) \tag{16}$$

$$\tau_r^{(1)}(s) = \left[(1-\alpha_e)R + \frac{1}{2}\alpha_e^2 R\frac{\varkappa_f}{\varkappa_s}\right]\mathbf{g}\cdot\mathbf{n} + (1-\alpha_e)(\beta+\gamma). \tag{17}$$

Здесь $\varkappa_f$ — теплопроводность газа, β и γ — величины, определяемые формулами

$$\beta = \frac{2}{\pi}\int\limits_- c_r\,e^{-c^2}\,\Phi_1^-(\mathbf{c}, 1, \theta)\,d\mathbf{c}$$

$$\gamma = -\frac{1}{\pi}\int\limits_- \mathbf{c}^2 c_r\,e^{-c^2}\,\Phi_1^-(\mathbf{c}, 1, \theta)\,d\mathbf{c}$$

Для нахождения $\Phi_1^-(\mathbf{c},\ 1,\ \theta)$ необходимо вычислить $\nu^{(0)}(\mathbf{r})$, $\tau^{(0)}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{r})$ при помощи свободномолекулярной функции распределения. Уравнение (7) показывает, что свободномолекулярная функция распределения постоянна вдоль траекторий молекул. Для траекторий, начинающихся на бесконечности, свободномолекулярная функция распределения будет такая же, как в невозмущенном потоке газа для траекторий, начинающихся на поверхности частицы, такая же, как функция распределения отраженных от частицы молекул. Метод вычисления моментов от свободномолекулярной функции распределения содержится в работах [11–13].

В результате использования этого метода получим следующие выражения для моментов $\nu^{(0)}(\mathbf{r})$ и $\tau^{(0)}(\mathbf{r})$:

$$\nu^{(0)}(\mathbf{r}) = -\frac{2a_1}{\sqrt{\pi}} g \cos\theta \left\{ \xi(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{8} + \frac{5\pi(1-\alpha_e)}{192}\right]\right\} \tag{18}$$

$$\tau^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{2a_1}{\sqrt{\pi}} g \cos\theta \left\{ 2\xi(r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{7}{24} + \frac{5\pi(1-a_e)}{96}\right]\right\} \tag{19}$$

$$\xi(r) = \frac{5\pi(1-\alpha_e)}{64}\left\{ r\left[1-\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{1/2}\right] - \frac{r}{3}\left[1-\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{3/2}\right]\right\}$$

В силу свойств ортагональности полиномов Сонина члены нулевого порядка по R/λ в выражении для $\mathbf{G}$ могут возникнуть только от интегрирования по скоростям функции распределения отраженных молекул. Легко видеть из (14) и (15), что сумма членов нулевого порядка в выражении для $\mathbf{G}$ обращается в нуль. Таким образом, $|\mathbf{G}| \sim R/\lambda$, поэтому при определении поправки первого порядка из уравнения (8) член, содержащий $\mathbf{G}$, можно отбросить.

Для нахождения функции распределения падающих молекул на поверхности частицы воспользуемся уравнением (8), в котором $\Phi_0^- = 0$, $\nu^{(0)}(\mathbf{r})$ и $\tau^{(0)}(\mathbf{r})$ даются выражениями (18) и (19).

Уравнение (8) для функции $\Phi_1^-(\mathbf{c}, 1, \theta)$ в сферических координатах будет иметь вид

$$c_r \frac{\partial \Phi_1^-}{\partial r} + \frac{c_\theta}{r}\frac{\partial \Phi_1^-}{\partial \theta} + \frac{c_\varphi^2 + c_\theta^2}{r}\frac{\partial \Phi_1^-}{\partial c_r} -$$

$$-\left(\frac{c_\varphi c_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{c_r c_\varphi}{r}\right)\frac{\partial \Phi_1^-}{\partial c_\varphi} + \left(\frac{c_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta - \frac{c_r c_\theta}{r}\right)\frac{\partial \Phi_1^-}{\partial c_\theta} = \tag{20}$$

$$= \varepsilon\left\{\nu^{(0)}(\mathbf{r}) + (c^2 - 3/2)\tau^{(0)}(\mathbf{r})\right\}$$

В этом уравнении в силу азимутальной симметрии нет члена $\partial\Phi_1^-/\partial\varphi$, так как он обращается в нуль. Решение уравнения (20) можно найти стандартными методами для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В результате решения уравнения (20) получим следующее выражение для функции $\Phi_1^-(\mathbf{c}, 1, \theta)$:

$$\Phi_1^-(\mathbf{c}, 1, \theta) = \varepsilon\left\{\int_1^\infty \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2c^2 - (c_\theta^2 + c_\varphi^2)}}\left[\nu^{(0)}(\mathbf{r}) + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau^{(0)}(\mathbf{r})\right]\right\} \tag{21}$$

Зная функции распределения падающих и отраженных молекул на поверхности частицы с помощью формулы (1) можно получить выражение для тепловой силы. Это выражение имеет вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^*\{1 + 0.491(1-\alpha_e) - [0.267\ \alpha_e(1 - 1/2\alpha_e\ \varkappa_f/\varkappa_s) +$$

$$+ 0.0672 - 0.0015\alpha_e - 0.0679\ (1-\alpha_e)^2]R/\lambda\} \tag{22}$$

$$\mathbf{F}^* = -5/4\pi n_0 R^2 k\lambda(\nabla T)_\infty$$

Сила сопротивления при движении частицы в газе с постоянной скоростью $\mathbf{u}^{sph}$ в почти свободномолекулярном режиме дается формулой Шиманского [12]. Приравняв силу сопротивления тепловой силе, получим выражение для скорости термофореза, которое имеет вид

$$\mathbf{u}^{Sph} = -\frac{6}{(8+\pi)}\left\{1 + 0.491\,(1-\alpha_e) - \frac{R}{\lambda}\left[0.267\,\alpha_e\left(1 - \frac{1}{2}\,\alpha_e\,\frac{\varkappa_f}{\varkappa_s}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 0.0672 - 0.0015\alpha_e - 0.0679\,(1-\alpha_e)^2\right]\right\}\left(1 - 0.4\,\frac{R}{\lambda}\right)^{-1}\frac{\eta}{\rho T_0}\,(\nabla T)_\infty$$

Здесь η и ρ — вязкость и плотность газа.

Поступило 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерягин Б. В., Баканов С. П. О теории термопреципитации высокодисперсных аэрозольных систем. Коллоидн. ж., 1959, т. 21, вып. 4, стр. 377.
2. Waldmann L. Über die Krafteines inhomogenen Gases auf kleine suspendierte Kugeln. Z. Naturfosch., 1959, vol. 14a, p. 589.
3. Waldmann L. Rarefied gas dynamics. Acad. Press, N. Y., 1961, p. 323.
4. Brock J. R. The thermal force in the transition region. J. Colloid and Interface Sci., 1967, vol. 23, p. 488.
5. Brock J. R. Experiment and theory for the thermal force in the transition region. J. Colloid and Interface Sci., 1967, vol. 25, p. 393.
6. Сб. «Взаимодействие газов с поверхностями», М., «Мир», 1965.
7. Bhatnagar P. L., Gorss E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. Phys. Rev., 1954, vol. 94, p. 511.
8. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, p. 141.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. Jaffe G. Zur Methodik der kinetischen Gastheorie. Annalen d. Phys., 1930, Ser. 5, vol. 6, p. 195.
11. Szymanski Z. Some flow problems of rarefied gases. Arch. Mech. Stos. (Warsaw), 1956, vol. 8, p. 449.
12. Szymanski Z. Some flow problems of rarefied gases. Arch. Mech. Stos. (Warsaw), 1957, vol. 9, p. 35.
13. Liu V. C., Pang S. C., Jew H. Sphere drag in flows of almost — free molecules. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, p. 788.