

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СРЫВНЫМИ ЗОНАМИ

В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

Возрастание числа Рейнольдса приводит в конечном счете к переходу ламинарного течения в турбулентное. Однако исследования предельной формы ламинарных течений и соответствующих решений уравнений Навье — Стокса при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности дает понимание физической природы ламинарных течений при больших докритических значениях числа Рейнольдса. Их результаты лежат в основе таких важных приближенных методов расчета, как классическая теория пограничного слоя при безотрывном обтекании тел.

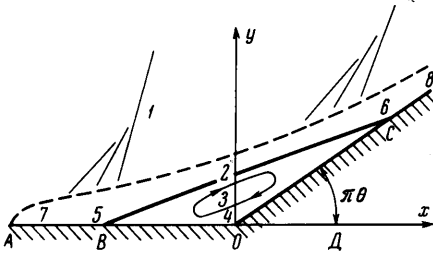
В данной работе делается попытка выяснить структуру предельного состояния для сравнительно простого случая — плоского стационарного сверхзвукового течения со срывной зоной.

Проведен анализ предельного вида решений уравнений Навье — Стокса при стремлении числа Рейнольдса R к бесконечности с использованием известного принципа сращения асимптотических разложений, представляющих собой решение в различных характерных областях течений.

Приведены уравнения и краевые условия, которые позволяют полностью описать картину течения. Для области присоединения выполнены численные расчеты распределения давления и тепловых потоков, результаты которых сравниваются с экспериментальными данными. Предложен простой приближенный метод расчета внутреннего течения в области отрыва.

1. Рассмотрим в качестве примера плоский стационарный сверхзвуковой поток с ламинарной зоной отрыва около угла (фиг. 1).

На фиг. 1 цифрами отмечены характерные области течения, которые необходимо будет рассмотреть для полного решения задачи: 1 — внешний невязкий сверхзвуковой поток, 2 — зона смешения, 3 — область возвратных течений, 4 — пограничный слой на дне возвратного течения, 5 — окрестность точки отрыва, 6 — область присоединения, 7, 8 — пограничный слой перед областью отрыва и за областью присоединения.



Фиг. 1

Если точка отрыва B не находится в малой окрестности передней кромки тела A , то коэффициент давления в точке отрыва и в развитой срывной зоне будет величиной порядка $\varepsilon^{1/2}$ ($\varepsilon = R^{-1/2}$). Этот результат получен экспериментально, а также на основе физических соображений [1] и установлен путем асимптотического анализа и прямого численного интегрирования уравнений Навье — Стокса при $R \rightarrow \infty$ [2].

В окрестности точки отрыва градиенты давления велики, а распределение в основном определяется «свободным взаимодействием» сверхзвукового потока с пограничным слоем. Продольный размер этой области имеет порядок $\varepsilon^{3/4}$ [2]. (В дальнейшем будем использовать только безразмерные величины, причем все линейные размеры отнесены к AO , а компоненты скорости и плотность — к их значениям в невозмущенном потоке, давление — к удвоенному скоростному напору, энтальпия — к квадрату скорости.)

Если $\theta = O(\varepsilon^{1/2})$, то в окрестности с размером $\varepsilon^{3/4}$ около угловой точки O всегда существует область свободного взаимодействия, течение в которой может быть безотрывным или же включать в себя небольшую (того же порядка) область отрыва. Течение в этом случае, назовем его (1), в первом приближении описывается уравнениями, полученными в работе [2], во всей области, кроме малой окрестности угловой точки с размером $O(\varepsilon)$.

Для задачи о свободном взаимодействии в области с масштабом $O(\varepsilon^{3/4})$ исследование течения в малой окрестности точки O должно дать разрыв краевого условия и условие перехода от ветви решения, включающей отрыв и предотрывное течение, к ветви течения с присоединением потока. Подробное описание этого случая не входит в задачу данной работы. Однако заметим, что существование такого типа предельного перехода дает обоснование возможности использования уравнений пограничного слоя для описания небольших зон отрыва (например, [3]).

При $\theta = O(1)$ длина зоны отрыва $O(1)$. При увеличении θ возможны два случая: (2) точка отрыва делит AO на части одного порядка по величине, тогда коэффициент давления и поперечный размер зоны отрыва $O(\varepsilon^{1/2})$ [2]; (3) отрыв почти с передней кромки, когда угол отрыва не лимитирован условиями течения свободного взаимодействия и может быть $O(1)$. Этот случай будет рассмотрен позднее.

Рассмотрим подробно случай (2). При $\varepsilon \rightarrow 0$ внутри области отрыва с размера $x \sim 1$, $y \sim \varepsilon^{1/2}$ в силу уравнения неразрывности $v/u \sim \varepsilon^{1/2}$, где u и v — продольный и поперечный компоненты скорости. При сверхзвуковом течении в области 1 для устранения контактного разрыва между течениями в областях 1 и 3 необходимо ввести в рассмотрение область 2 — зону смещения с $x \sim 1$, $y \sim \varepsilon$. Для ее описания удобно использовать систему координат s , $n_2 = n/\varepsilon$, где s идет вдоль линии тока, проходящей через точку отрыва, а n — по нормали к ней. Индексом снизу отмечаются трансформированные переменные, сохраняющие величину $O(1)$ в соответствующей области.

Известно, что при $n_2 \rightarrow -\infty$ нормальный компонент скорости в зоне 2 имеет порядок $O(\varepsilon)$. Из условия срачивания решений в областях 2 и 3 следует, что v в области 3 не может быть меньше, чем $O(\varepsilon)$, а тогда $u \geq O(\varepsilon^{1/2})$. Но при этом инерционные члены уравнений Навье — Стокса будут для области 3 по порядку величины больше, чем главные вязкие, следовательно, течение в пределе $R \rightarrow \infty$ в области 3 невязкое. Для области 2 верны обычные оценки теории пограничного слоя

$$s_2 = s, \quad n_2 = n/\varepsilon, \quad u(s, n; \varepsilon) \sim u_2(s_2, n_2) + \dots + v(s, n; \varepsilon) = \\ = \varepsilon v_2(s_2, n_2) + \dots \quad (1.1)$$

Подстановка их в уравнения Навье — Стокса и предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к классическим уравнениям пограничного слоя, которые для краткости опущены. Применение принципа срачивания асимптотических разложений для областей 2, 1, 3, 7 дает граничные и начальные условия

$$u_2(s, +\infty) = u_1(s, 0), \quad u_2(s, -\infty) = u_3(s, 0), \quad p_2(s) = p_1(s, 0) \quad (1.2) \\ u_2(0, \psi_2) = u_7(x_B, \psi_2), \quad H_2(s, +\infty) = H_1(s, 0), \quad H_2(0, \psi_2) = H_7(x_B, \psi_2)$$

где H — энтальпия торможения, p — давление.

Заметим, что начальные условия следуют из того обстоятельства, что возмущение скорости $O(\varepsilon^{1/2})$, а течение в области 5 для $\psi = O(\varepsilon)$ является локально-невязким [2].

Рассмотрим теперь окрестность точки присоединения в масштабе области 3. Поверхность контактного разрыва BC , поперек которой перепад давлений отсутствует, должна подходить к поверхности OC под конечным углом. Из точки C в область 1 уходит скачок уплотнения. В противном случае давление в критических точках B и C области невязкого течения 3 оказалось бы существенно различным, хотя через них проходит одна и та же линия тока. При повороте потока на конечный угол для области 2 с толщиной $O(\varepsilon)$ оценки теории пограничного слоя, разумеется, не пригодны, так как продольный и поперечный компоненты скорости оба $O(1)$ и $\Delta p = O(1)$. Поэтому необходимо ввести в рассмотрение область 6. Сращивание с областью 2 дает поперечный масштаб $O(\varepsilon)$, а продольный после этого в силу уравнения неразрывности — также $O(\varepsilon)$. Для изучения течения в этой области введем локальную систему координат с осями, направленными вдоль OC и по нормали с деформацией, вытекающей из приведенных выше оценок

$$\begin{aligned}x_{62} &= \varepsilon^{-1}[(x - x_c) \cos \pi\theta + (y - y_c) \sin \pi\theta] \\y_{62} &= \varepsilon^{-1}[-(x - x_c) \sin \pi\theta + (y - y_c) \cos \pi\theta]\end{aligned}$$

Все функции течения имеют порядок $O(1)$. Если вставить эти оценки и (1.3) в уравнения Навье — Стокса и перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, то получатся уравнения Эйлера. Общая теория таких локально невязких течений развита в работе [4]. Сращивание решения в области 6 с решениями в областях 1, 2, 3 дает необходимые краевые условия. В первом приближении задача для области 6 свелась к изучению падения полубесконечной сверхзвуковой струи на плоскость под углом $\pi\theta$, при этом $p_6(x_6 \rightarrow -\infty) = p_3(x_c, y_c)$. Профиль скорости падающей струи совпадает с профилем скорости в области 2 в точке C . Решение этой задачи, а также в вязком подслое, который приходится рассматривать, чтобы удовлетворить условиям прилипания, приведено в п. 4.

Как было показано выше, течение в области 3 в первом приближении невязкое и, следовательно, не может удовлетворять условию прилипания к поверхности тела на границе COB . Поэтому необходимо ввести в рассмотрение область 4, в которой уравнения должны содержать по крайней мере главные вязкие члены уже в первом приближении.

Порядок величины продольного компонента скорости определяется условиями сращивания с решением в области 6 и равен $O(1)$. Продольный размер $O(1)$. Дальнейшие оценки вполне аналогичны приведенным для области 2. Уравнения для области 4 — это обычные уравнения пограничного слоя. (Чтобы не рассматривать локальную ε -окрестность точки O , будем считать, что угол имеет небольшое скругление с подходящим радиусом кривизны, например $O(\varepsilon^{1/2})$.) Граничные условия в системе координат, связанной с телом (n направлено по внешней нормали к срывной зоне)

$$\begin{aligned}s_4 &= s, & n_4 &= n/\varepsilon, & n_4 &= 0, & u_4 &= v_4 = 0, & u_4(s_4, -\infty) &= u_3(s, 0) \\H_4(s, 0) &= h_0, & H_4(s_4, -\infty) &= H_3(s, 0) \\u_4(s_4, n_4) &= u_6(-\infty, y_6), & H_4(s_4, n_4) &= H_6(-\infty, y_6)\end{aligned}\quad (1.4)$$

Здесь h_0 соответствует температуре стенки.

2. Рассмотрим теперь подробнее течение в области 3. Прандтль [5] показал, а позднее Бэтчелор [6] строго доказал, что в пределе $R \rightarrow \infty$ плоское стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с замкнутыми линиями тока стремится к невязкому течению с постоянной завихрен-

ностью, если только не все линии тока рециркуляционной области проходят через слой смешения, являющийся частью ее границы и вырождающийся в пределе в поверхность контактного разрыва. Условие для определения величины завихренности в общем случае приведено в работе [7].

Для расчета течения сжимаемого газа в области \mathcal{Z} , кроме уравнений Эйлера, координат точек отрыва и присоединения (условия для точек отрыва и присоединения получают при использовании решений для областей 5 и 6), условий равенства нулю нормального компонента скорости на твердых границах и условий совместности (равенство давления и нормального к границе компонента скорости на поверхности контактного разрыва между областями 1 и 3), необходимо еще два дополнительных условия, например распределение полного давления и энтальпии торможения по струйкам тока. Для незамкнутых течений их дают условия в набегающем потоке.

Используя уравнения Навье — Стокса, найдем такие соотношения, которые выполняются независимо от величины числа R . Среди всех возможных невязких течений искомое течение, получающееся из вязкого при $R \rightarrow \infty$, должно удовлетворять этим соотношениям. (Эта идея лежит в основе доказательства, данного в работе [6] для несжимаемой жидкости.) Уравнения Навье — Стокса

$$\rho \operatorname{grad} (1/2 V^2) - \rho \mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V} + \operatorname{grad} p = \operatorname{grad} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{V}) + \operatorname{div} (2\mu D) \quad (2.1)$$

$$\rho V T \operatorname{grad} S = \Phi + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T) \quad (2.2)$$

Здесь μ и λ — первый и второй коэффициенты вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, D — симметричная часть тензора скоростей деформаций, Φ — функция диссипации, T, S — температура и энтропия, V — модуль скорости.

Используя (2.2), найдем циркуляцию градиента S вдоль произвольной замкнутой линии тока, она должна быть равна нулю, так как энтропия — однозначная функция точки

$$\oint [\Phi + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T)] \frac{dl}{\rho T V} = 0 \quad (2.3)$$

где dl — элемент длины вдоль линии тока. Поскольку Φ линейно зависит от λ и μ , а отношения λ, μ и κ не зависят от R , или по крайней мере стремятся к константам $O(1)$, то (2.3) одно из искомого соотношений. Второе получается при вычислении с помощью (2.1) и (2.2) циркуляции вдоль произвольной замкнутой линии тока от градиента энтальпии торможения

$$\oint [\rho V T \operatorname{grad} S + \mathbf{V} \operatorname{grad} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{V}) + \mathbf{V} \operatorname{div} (2\mu D)] \frac{dl}{\rho V} = 0 \quad (2.4)$$

Формулы (2.3), (2.4) замыкают задачу для сжимаемого газа. При выполнении этих условий предельное невязкое течение имеет распределение параметров торможения по струйкам тока, близкое к их распределению в аналогичном вязком потоке с очень малым, но конечным значением коэффициента вязкости.

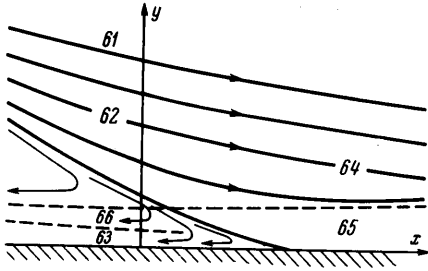
Для течения несжимаемой жидкости условие типа (2.3) позволяет считать завихренность постоянной, но не дает ее величины. Для определения ее необходимо выполнить условие стационарности течения в пограничном слое [7], о необходимости которого говорится в работе [6]. Другое условие для нахождения температуры можно получить, используя уравнение энер-

гии. Вывод аналогичных условий для течения сжимаемой жидкости дает

$$\oint \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{n=0} ds + \oint [\rho uv]_{n \rightarrow \infty} ds = 0 \quad (2.5)$$

$$\oint \left[\frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial n} + \mu \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{u^2}{2} \right) \right]_{n=0} ds = 0 \quad (2.6)$$

Интегрирования в (2.5) и (2.6) проведены в пределах областей 2 и 4 (индексы при переменных на соответствующих участках пути интегрирования для краткости опущены). Области отрыва 5 и присоединения 6 выброшены. Это возможно, как показано в работе [7], если размеры таких областей стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а течение в них является для $\psi \sim \varepsilon$ локально-невязким. Оба условия в рассматриваемом случае выполнены. Заметим еще, что (2.6) имеет простой физический смысл — равенство нулю полного потока энергии через замкнутый контур.



Фиг. 2

В заключение полезно заметить, что второй интеграл (2.5) является конечным, так как

$$\rho_i v_i \rightarrow -n_i \frac{\partial u_3}{\partial s}(s, 0) / \partial s_i + \varphi(s_i), \quad u_i \rightarrow u_3(s_i, 0) \quad \text{при } n \rightarrow -\infty \quad (i = 2, 4) \quad (2.7)$$

Подставив (2.7), можно видеть, что коэффициент при n тождественно равен нулю.

3. Решение уравнений Эйлера для дозвукового течения в области 3 при использовании условий (2.3) — (2.6) представляется весьма трудоемким. Ситуация существенно упрощается, если интенсивность вихревого движения в области 3 невелика. В пользу такого допущения свидетельствуют многочисленные экспериментальные данные для сверхзвуковых течений с развитыми срывными зонами различных типов. Метод расчета удобно построить с помощью разложения в ряд по малому параметру ω , равному завихренности. С относительной погрешностью $\omega^2 \ll 1$ течение в первом приближении будет несжимаемым (как в теории Рэлея — Янсена). Возмущения давления и, в силу срачивания с областью 1, отклонения формы границы BC от прямолинейной также $O(\omega^2)$. Поскольку угол отрыва $O(\varepsilon^{1/2})$, а угол COD $O(1)$, практически при решении нужно рассмотреть две части области 3 отдельно. Для первой из них имеем

$$x_{31} = x + a, \quad y_{31} = y / \varepsilon^{1/2} \quad (3.1)$$

$$u(x, y; \varepsilon) = \omega u_{31}(x_{31}, y_{31}) + \dots, \quad v(x, y; \varepsilon) = \omega \varepsilon^{1/2} v_{31}(x_{31}, y_{31}) + \dots$$

$$p(x, y; \varepsilon) = p_{30} + \omega^2 p_{31}(x_{31}, y_{31}) + \dots, \quad \rho(x, y; \varepsilon) = \rho_{30} + \omega^2 \rho_{31}(x_{31}, y_{31}) + \dots$$

где a — расстояние OB. В области 31, имеющей в первом приближении вид треугольника (фиг. 3, а), в котором совершается течение несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью, равной ω , окрестность точки O с длиной $x \sim \varepsilon^{1/2}$ в масштабе области 31 сплюснута в вертикальную прямую, через которую жидкость втекает снизу и вытекает сверху. Для исследования окрестности точки O (область 32) нужно ввести

$$x_{32} = x / \varepsilon^{1/2}, \quad v(x, y; \varepsilon) = \omega v_{32}(x_{32}, y_{32}) \quad (3.2)$$

Остальные переменные такие же, как в 31. Эта область имеет вид полубесконечной полосы (фиг. 3, б). Условия срачивания дают связь

$$u_{32}(-\infty, y_{32}) = u_{31}(a, y_{31}) \quad (3.3)$$

Решения для области 31 имеют вид

$$u_{31} = y_{31} - 1/2 k x_{31}, \quad v = 1/2 k x_{31}, \quad k = \operatorname{tg} \angle CBO \quad (3.4)$$

где k , ρ_{30} определяются из решения для области 5.

Решение для области 32, или для всей области 3, если отрыв происходит с носка пластины в точке A при достаточно больших значениях $\lambda\theta$, легко находится в виде суммы подходящей гармонической функции и частного решения уравнения Пуассона. Уравнения, как видно из дальнейшего, достаточно решить для $\omega = -1$. Гармоническую функцию легко отыскать, используя отображение треугольной области на полуплоскость (интеграл Кристоффеля — Шварца) и интеграл Пуассона, решающий первую краевую задачу для полуплоскости.

Распределение скорости в области 3 найдено с точностью до множителя, равно-го ω . Для определения ω и ρ_{30} нужно провести решение уравнений для областей 2 и 4 и воспользоваться условиями (2.5) и (2.6). Будем для областей 2 и 4 искать решения в виде разложений по параметру ω функций течения, уже выписанных в переменных пограничного слоя (3.5)

$$u_i(s, n) = u_{i0}(s, n) + \omega u_{i1}(s, n) + \dots, \quad v_i(s, n) = v_{i0}(s, n) + \omega v_{i1}(s, n) + \dots$$

$$p_i(s, n) = p_{i0} + \omega^2 p_{i2}(s) + \dots, \quad H_i(s, n) = H_{i0}(s, n) + \omega^2 H_{i1}(s, n) \quad (i = 2, 4)$$

Подстановка (3.5) в уравнения пограничного слоя дает

$$\rho_{i0} u_{i0} \frac{\partial u_{i0}}{\partial s} + \rho_{i0} v_{i0} \frac{\partial u_{i0}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu_{i0} \frac{\partial u_{i0}}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial \rho_{i0} u_{i0}}{\partial s} + \frac{\partial \rho_{i0} v_{i0}}{\partial n} = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho_{i0} u_{i0} \frac{\partial H_{i0}}{\partial s} + \rho_{i0} v_{i0} \frac{\partial H_{i0}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\mu_{i0}}{\sigma} \frac{\partial H_{i0}}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left[\mu_{i0} \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial}{\partial n} \frac{u_{i0}^2}{2} \right] = 0$$

Граничные условия для этого приближения (3.7)

$$u_{20}(s, \infty) = u_1(s, 0), \quad u_{20}(s, -\infty) = 0, \quad H_{20}(s, \infty) = H_1(s, 0), \quad H_{20}(s, -\infty) = H_3(s, 0)$$

$$u_{40}(s, 0) = v_{40}(s, 0) = 0, \quad u_{40}(s, -\infty) = 0, \quad H_{40}(s, 0) = h_0, \quad H_{40}(s, -\infty) = H_3(s, 0)$$

Начальные условия обсуждались выше и здесь не выписаны. В отличие от течения несжимаемой жидкости [7] при решении (3.6), (3.7) на этом этапе нужны итерации для нахождения величины энthalпии торможения на граничной линии тока области 3 — $H_3(s, 0)$, которая удовлетворяет условию (2.6) с точностью до $O(\omega^2)$. На этом этапе получается распределение тепловых потоков к телу всюду, кроме областей присоединения и отрыва.

Уравнения для u_{i1} , v_{i1} , очевидно, оказываются линейными, как и для случая несжимаемой жидкости [7], и не требуют итераций. Приведем лишь краевое условие для u_{i1} , чтобы показать, что для решения не надо заранее знать ω

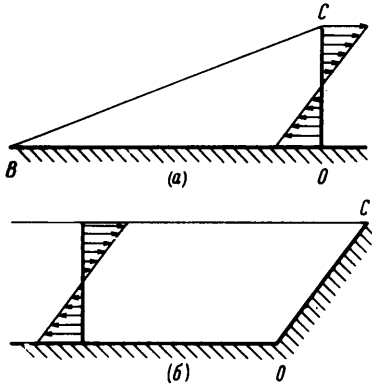
$$u_{21}(s, \infty) = 0, \quad u_{21}(s, -\infty) = u_{31}(s, 0), \quad u_{41}(s, -\infty) = u_{31}(s, 0)$$

Два первых приближения по параметру ω нужно подставить в формулу (2.5). В результате получится линейное уравнение для определения завихренности

$$\oint \mu_{i0} \frac{\partial u_{i0}}{\partial n} \Big|_{n=0} ds + \omega \left[\oint \mu \frac{\partial u_{i1}}{\partial n} \Big|_{n=0} ds + \oint u_{31}(s, 0) v_{31}(s, -\infty) ds \right] = 0 \quad (3.8)$$

4. Переходим к решению задачи для области присоединения. Выше было показано, что в области с координатами (1.3) получается задача о падении под углом $\lambda\theta$ невязкой струи. Это — подобласть 62 на фиг. 3. Здесь 1 — внешний сверхзвуковой поток; 63 — вязкий подслон с тем же продольным масштабом, что область 62; 66 — промежуточная область, значение которой объясняется ниже. Области 64 и 65 — локально невязкая и вязкая части области свободного взаимодействия, в которой расположена критическая точка течения. Будет показано, что на распределение давления в этих областях существенно влияет вязкость и поэтому полный перепад давления в области присоединения отличается от перепада, вычисленного по теории Чепмена — Корста на величину порядка $R^{-1/4}$. Ис-

ходные профили распределения параметров при $x_{62} \rightarrow -\infty$ совпадают с профилями зоны смещения при $s_2 = s_{2c}$. Слева область покоя, соответствующая ε -окрестности критической точки области \mathcal{E} . Поворот сверхзвукового потока в масштабе $x_{62} \sim 1$ осуществляется около плавной границы, соответствующей толщине вытеснения вихревой части течения, и с точностью до Δp^3 описывается соотношениями для простой волны.



Фиг. 3

В силу уравнения Бернулли на поверхность тела может попасть только такая струйка тока, в которой давление торможения $P_0 \geq p_6$ при $x_6 \rightarrow +\infty$. Если $P_0 > p_6(\infty)$, то в масштабе локально-невязкой области существует критическая точка и местный максимум давления. Если $P_0 = p_6(\infty)$, то давление растет монотонно, а критическая точка смещена в бесконечность в масштабах δ^2 .

В работе [8], основываясь на результатах [4], рассматривалось невязкое присоединение несжимаемой жидкости. Исходя из гипотезы о неустойчивости такого течения с критической точкой.

из всех возможных отобрано решение с критической точкой в бесконечности. Течение, рассматриваемое в данной работе, имеет существенно другие краевые условия. Это позволяет в ряде случаев доказать необходимость выполнения условия $P_0 = p_6(\infty)$.

Заметим, что как показано ниже, это не означает смещения критической точки на бесконечное расстояние в масштабах тела. Просто она оказывается в рассмотренной далее области свободного взаимодействия, замыкающей область присоединения. Отсюда следует важный вывод о существенном влиянии вязкости в окрестности точки присоединения уже в первом приближении.

Докажем, что критическая точка не может существовать в конечной области невязкого течения, если вихревая часть струи меняет при малых Δp толщину вытеснения δ как дозвуковая струйка тока.

Допустим, что критическая точка существует. Справа от нее возвратного течения нет, и при $x \rightarrow +\infty$ течение становится плоскопараллельным, а $d\delta/ds \rightarrow 0$. Давление стремится к пределу или возрастая, или убывая. Если $dp/ds < 0$, то для дозвуковой струйки тока $d\delta/ds < 0$. Но тогда $d^2\delta/ds^2 > 0$ и давление в сверхзвуковом потоке на внешней границе должно было бы возрастать. Если предположить, что $dp/ds > 0$, то для толщины вытеснения вихревой области, ведущей себя как дозвуковая струйка тока, $d\delta/ds > 0$. Но тогда $d^2\delta/ds^2 < 0$ и давление в сверхзвуковом потоке должно было бы расти. Мы опять пришли к противоречию. Заметим, что приведенное выше достаточное условие выполняется обязательно, по крайней мере, для двух случаев: (1) число M_1 не слишком велико; (2) угол падения $\pi\theta$ мал. В последнем случае $\Delta p \sim \pi\theta$, в силу уравнения Бернулли на критической линии тока $\Delta u \sim u \sim (\pi\theta)^{1/2}$. Тогда $d\delta/ds$ определяется в основном пристеночным слоем с толщиной $\sim (\pi\theta)^{1/2}$, так как изменение толщины основной части вихревого слоя $\sim (\pi\theta)$. Но в этом слое число $M \sim (\pi\theta)^{1/2}$ и может быть выбрано достаточно малым.

Численные расчеты проведены с помощью модифицированного метода интегральных соотношений А. А. Дородницына с использованием двух полос. Границей полос была верхняя ветвь нулевой линии тока. В отличие от обычной схемы для вычисления значений скорости в соответствующих интегралах использовались точные данные о распределении параметров торможения. Давление и поперечный компонент скорости линейно интер-

полировались между границами полос. Такой тип интерполяции существенно повышает точность. На фиг. 4 проведено сравнение результата расчета распределения давления с экспериментальными данными работы [1]. Поскольку в эксперименте поток отрывался практически с передней кромки, необходимые для расчетов профили распределения параметров торможения в конце зоны смешения взяты в соответствии с известным автомобильным решением.

Рассмотренное выше решение для области 2 (ниже для краткости отбросим первую цифру индекса для подобластей области 6), не удовлетворяет условиям прилипания на поверхности тела. Поэтому необходимо рассмотреть пограничный слой 3 с масштабом координат и функций течения, выбранных, как обычно, так, чтобы главные вязкие и инерционные члены уравнений Навье — Стокса имели одинаковый порядок, а также удовлетворялись условия срачивания с соседними областями

$$x_3 = -x_2, \quad y_3 = y_2 / \varepsilon^{1/2} \quad (4.1)$$

$$u(x, y; \varepsilon) = u_3(x_3, y_3) + \dots,$$

$$v(x, y; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_3(x_3, y_3) + \dots$$

$$p(x, y; \varepsilon) = p_3(x_3, y_3) + \dots,$$

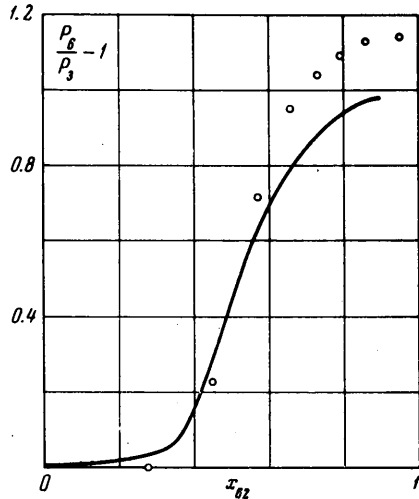
$$H(x, y; \varepsilon) = h_0 + \alpha(\varepsilon) H_3(x_3, y_3) + \dots$$

Функция $\alpha(\varepsilon)$ и внешнее краевое условие найдено ниже из условий асимптотического срачивания; заметим только, что $\alpha(0) = 0$. Подстановка (4.1) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ приводят к уравнениям пограничного слоя. Краевые условия

$$u_3(x_3, 0) = v_3(x_3, 0) = H_3(x, 0) = 0, \quad u_3(x_3, +\infty) = -u_2(x_3, 0) \quad (4.2)$$

Пограничный слой развивается в масштабе x_2 из $-\infty$ на дне возвратного течения области 2, в котором $u_2(-\infty, 0) = 0$. Метод решения таких задач предложен в работе [9].

Для того чтобы начать интегрирование уравнений области 3, а также для исследования течения в непосредственной окрестности критической точки течения, нужно сначала исследовать асимптотику решения для области 2 при $x_2 \rightarrow +\infty$. Как показано выше, в области плоскопараллельного вихревого невязкого течения, к которому стремится поток в области 2 при $x_2 \rightarrow +\infty$, скорость на стенке обращается в нуль. Пусть Δ — безразмерный малый параметр и отклонение $p_2 - p_2(\infty) = O(\Delta)$. В основной части вихревого слоя 2 $u_2 = O(1)$, тогда в силу уравнений Бернулли, расхода и сохранения энтропии вдоль линий тока изменение толщины линий тока $O(\Delta)$. Эти оценки неверны вблизи поверхности тела, где скорости малы. Там в силу тех же уравнений скорость и возмущения скорости имеют одинаковый порядок $O(\Delta^{1/2})$. Так как $(\partial u_2 / \partial n_2) \sim O(1)$, то толщина этого слоя $O(\Delta^{1/2})$. Внешнее краевое условие показывает, что на границе с основным сверхзвуковым потоком $v_2 \sim \Delta$, т. е. наклон линий тока $O(\Delta)$, а смещение за счет изменения толщины пристеночного слоя $O(\Delta^{1/2})$. Тогда продольный размер $x_2 \approx \Delta^{-1/2}$.



Фиг. 4

Для пристеночного слоя области 2 введем координаты и функции течения

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_2 / \Delta, \quad x = x_2 \Delta^{1/2}, \quad p_2(x_2, \psi_2, \Delta) = p_2(\infty) + \Delta p(x) \\ \rho_2(x_2, \psi_2; \Delta) &= \rho_2(\infty, 0) + \dots, \quad u_2(x_2, \psi_2; \Delta) = \Delta^{1/2} u(x, \psi) + \dots \\ v_2(x_2, \psi_2; \Delta) &= \Delta^{3/2} v(x, \psi) + \dots, \quad n_2(x_2, \psi_2; \Delta) = \Delta^{1/2} n(x, \psi) + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь индексы для функций и координат, имеющих порядок $O(1)$ при $x_2 \rightarrow +\infty$, опущены. Подстановка (4.3) в уравнения Эйлера дает

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial n}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho u}, \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0, \quad p + \frac{\rho u^2}{2} = \frac{\rho u(\infty, \psi)}{2} \quad (4.4)$$

Линия, на которой ψ достигает минимума, определяется из условия $p(x) = 1/2 \rho u^2[\infty, \psi]$. Сращивание с внешним сверхзвуковым потоком дает

$$[M^2(\infty) - 1]^{1/2} [p(x) - p(\infty)] = \frac{d}{dx} \left\{ \lim_{\psi \rightarrow \infty} [n(x, \psi) - n(\infty, \psi)] \right\} \quad (4.5)$$

Решение (4.3) — (4.5) выполняется в квадратурах

$$u_2(x_2, 0) \rightarrow \frac{2p_2(\infty)}{\rho_2(\infty, 0) a x_2} \quad \text{при} \quad x_2 \rightarrow +\infty, \quad a = \left(\frac{\partial u_2}{\partial n_2} \right) \Big|_{n_2=0, x_2 \rightarrow \infty} \quad (4.6)$$

Используя (4.3) и (4.6), можно заметить, что при $x_2 \sim \varepsilon^{-1/4}$ во всем слое, изменение толщины которого определяет затухание возмущений давления, главные вязкие члены становятся того же порядка, что и инерционные. В области свободного взаимодействия 5 в соответствии с приведенными оценками координаты и функции течения имеют вид

$$\begin{aligned} x_5 &= x_2 \varepsilon^{1/4}, \quad y_5 = y_2 / \varepsilon^{5/4}, \quad p(x, y; \varepsilon) = p_{50} + \varepsilon^{1/6} p_5(x_5, y_5) + \dots \\ \rho(x, y; \varepsilon) &= \rho_5(x_5, y_5) + \dots, \quad H(x, y; \varepsilon) = H_5(x_5, y_5) + \dots, \\ u(x, y; \varepsilon) &= \varepsilon^{1/4} u_5(x_5, y_5) + \dots \\ v(x, y; \varepsilon) &= \varepsilon^{3/4} v_5(x_5, y_5) + \dots, \quad \psi_5 = \psi / \varepsilon^{3/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подстановка (4.7) в уравнения Навье — Стокса приводит при $\varepsilon \rightarrow 0$ к уравнениям пограничного слоя и краевой задаче о свободном взаимодействии с внешним сверхзвуковым потоком. Метод решения подобной задачи развит в работе [2], включая численное решение. Единственное отличие состоит в том, что уже в первом приближении ρ — плотность переменная, так как энтальпия торможения на внешней границе и стенке отличается на $O(1)$. Рассмотрим поведение решения при $x_5 \rightarrow 0$. Это необходимо для сращивания с областью 3 и нахождения внешних краевых условий для уравнения энергии в области 3. Для этого нужно рассмотреть поведение решения области 5 в масштабах

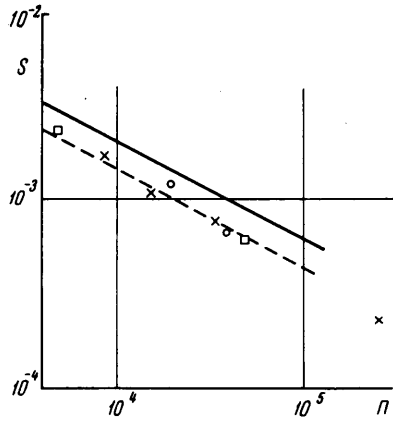
$$x_5, \quad w = \frac{\psi_5}{(-2 \ln x_5)^{1/2}}, \quad H(x_5, w); \quad u_5(x_5, \psi_5) = -\frac{1}{x_5} u_6(x_5, w) \quad (4.8)$$

Подставив (4.8) в уравнения пограничного слоя для области 5, переписанные в переменных Мизеса при $x_5 \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} u_6 &= \frac{4}{[\rho_5^{(1)} a^2 (M^2(\infty) - 1) \rho_5^{(2)}]^{1/2}} = \left(\frac{2A}{\rho_5^{(2)}} \right)^{1/2}, \quad \eta_6 = w \left(\frac{\sigma \sqrt{\rho_5^{(1)}}}{\rho_5^{(1)} \mu_5^{(1)} \sqrt{2A}} \right)^{-1/2} \\ (g_6^{\omega-1/2} g_6')' + \eta_6 g_6' &= 0, \quad g_6(0) = h_0 / H_5^{(1)}, \quad g_6(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

где σ — число Прандтля, ω — показатель степени, если $\mu \sim T^\omega$, $g_6 = H/H_5^{(1)}$. Индексами 1 и 2 сверху отмечены значения переменных на внешней границе области и на стенке. Физический смысл полученного результата состоит в том, что при ускорении возвратного течения из области 5 в области 2 и 3 в части струек тока области 5 с новым распределением энthalпии торможения, обусловленным эффектами теплопроводности в области 5 и определенным (4.9), после ускорения эффект теплопроводности становится внепорядковым. Это и дает область 6. Применение принципа сращения для областей 3 и 6 дает

$$\alpha(\varepsilon) = (-\ln \varepsilon^{1/2})^{-1/2}, \quad H_3(x_3, \psi_3) \rightarrow \frac{g_6'(0) H_5^{(1)} \psi_3}{[\rho_5^{(1)} \mu_5^{(1)} 2A^{1/2} / \sigma \rho_5^{(1)}]^{1/2}} \quad \text{при } \psi_3 \rightarrow \infty \quad (4.10)$$



Фиг. 5

Уравнение и краевые условия для области 3, в которой тепловой поток достигает максимального значения, удобно интегрировать в переменных

$$\xi = m^2 \int_{-\infty}^x \rho^{(2)} \mu^{(2)} u^{(1)2} dx, \quad \zeta = m u^{(1)} \int_0^y \rho dy$$

$$u = u^{(1)} f'(\xi, \zeta), \quad m^2 = a [\rho_5^{(1)} \rho_5^{(2)} (M^2(\infty) - 1)]^{1/2} / 2 \rho_5^{(2)} \mu_5^{(2)}$$

Здесь индекс 3 для краткости не указывается

$$(N f'')' + (du^{(1)} / d\xi) (\rho^{(1)} / \rho - f'^2) = u^{(1)} (f' f'' - f' f''') \quad (4.11)$$

$$[(N / \sigma) g'] + K u^{(1)2} (N f' f'')' = u^{(1)} (f' g' - f' g'')$$

$$N = \rho \mu / \rho^{(2)} \mu^{(2)}, \quad g(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = f''(\xi, 0) = 0, \quad g'(\xi, \infty) = f'(\xi, \infty) = 1$$

$$K = \frac{(\sigma - 1) (-\ln \varepsilon^{1/2})^{1/2}}{\sigma} \frac{m}{g_6'(0) H_5^{(1)}} \left(\frac{\mu_5^{(1)} \sqrt{2A \rho_5^{(1)}}}{\sigma} \right)^{1/2}$$

Распределение скорости на внешней границе области 3 получается при решении задачи для области 2, а $g_6'(0)$ — в результате решения (4.9).

Результаты численного решения задачи (4.11) позволили получить данные о максимальных значениях тепловых потоков в области присоединения. Поскольку расчет срывной зоны в целом не завершен, то результаты, приведенные на фиг. 5, относятся к падению сверхзвуковой струи с ламинарной зоной смешения; это и есть локальная задача для области 6.

Результаты расчета приведены в виде зависимости максимального значения числа Стэнтона S от параметра Π , зависящего от числа Рейнольдса R и угла падения струи. Введение этих параметров можно оправдать следующими рассуждениями.

Если учесть, что продольный размер области присоединения $l \sim \delta / \sin \lambda \theta$, где δ — толщина зоны смешения, а скорость того же порядка, что в набегающем потоке, то, используя, например, переменные Дородницына — Лиза, получим оценку для максимального теплового потока q

$$q \sim \mu_2 H_1 g_2' (\rho_2 u_1 / \mu_1 l \sigma^2)^{1/2} \quad (4.12)$$

Тогда для корреляции результатов удобно использовать параметры

$$S = q / \rho_2 u_1 H_1 \sim (\mu_2 \sin \alpha / \rho_2 u_1 \delta)^{1/2} = \Pi \quad (4.13)$$

где индексами 1, 2 отмечены значения величин в вязком потоке и на стенке. В этих переменных результаты расчетов укладываются близко к единой прямой (в логарифмическом масштабе). В работе [10], исходя из представления о возможности использовать для вязкого подслоя формулу для теплового потока на плоской пластине длиной l , предложены те же корреляционные параметры. Заметим, что частичный успех такого некорректного подхода обеспечивается тем, что для качественных рассуждений оказывается несущественным вид функций g_2' в формуле (4.12).

На фиг. 5 для сравнения приведена корреляционная прямая, представляющая собой обработанные в работе [10] экспериментальные данные.

Крестиками отмечены результаты расчетов, проведенные при M в сверхзвуковом потоке перед областью δ , равном 3, $R = 10^5$, $f = 0$, $g_2 = 0.05$ (или 0.15, 0.25, 0.35), $g_1 = 0.5$. (Здесь R вычислено по длине зоны смещения, f — значение безразмерной функции тока для линии тока, приходящей на стенку, в переменных Дородницына — Лиза для зоны смещения 2 (фиг. 1), g_1 и g_2 — значения энthalпии торможения в области покоя и на стенке, отнесенные к их величине во внешнем потоке.) Остальные точки соответствуют расчетам, в которых изменялся какой-либо один из указанных выше параметров; белый кружок соответствует $g_1 = 0.9$, черный $f = -0.4$, белый квадрат $R = 10^4$ и 10^6 . Качественное согласие с результатами расчетов есть, количественное расхождение может быть связано с двумя причинами: во-первых, экспериментальные данные относятся к диапазону чисел M от 10 до 20; во-вторых, при обработке результатов экспериментов предполагалось, что толщина слоя смещения в области присоединения равнялась сумме толщин оторвавшегося пограничного слоя и автомодельной зоны смещения, начинающейся в точке отрыва. Пунктирной кривой на фиг. 5 показана попытка исправить последнее допущение. Согласие данных улучшается.

Поступило 30 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman D. R., Kuehn R. M., Larson H. K. Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NASA Rept, 1958, 1356.
2. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
3. Елькин Ю. Г., Нейланд В. Я. О расчете характеристик ламинарных зон отрыва. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5, стр. 812—820.
4. Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в областях с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
5. Prandtl L. Über Flügigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. d. III Internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.
6. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, p. 2.
7. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, № 1.
8. Таганов Г. И. К теории стационарных срывных зон. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
9. Нейланд В. Я. О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях. ПММ, 1966, т. 30, № 4.
10. Bushnell D. M., Weinstein L. M. Correlation of peak heating for reattachment of separated flows. J. Spac., 1968, vol. 9, № 9.