

## ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР

СЕМИНАРЫ<sup>1</sup>

Общий семинар Института проблем механики АН СССР под руководством  
А. Ю. Ишлинского

Пятьдесят девятое заседание 2 X 1969 г. Г. К. Пожарицкий (Москва). *Задачи преследования в системах с импульсными ограничениями на управления \**.

Шестидесятое заседание 16 X 1969 г. В. А. Пальмов (Ленинград). *Распространение вибраций в нелинейной среде \**.

Шестидесять первое заседание 30 X 1969 г. Л. Е. Калихман (Москва). *Магнитная азодинамика струйного течения вязкой плазмы внутри магнитосферы Земли.*

Со стороны Солнца на Землю набегают корпускулярный поток полностью ионизованной плазмы водорода со скоростью (вблизи Земли) около 400 км/сек и температурой около 500 °С; тепловая скорость при этом составляет около 0.1 среднемассовой. Магнитное поле Земли (в исходном состоянии дипольное, симметричное относительно оси север — юг) под действием этого потока, поперечного к оси диполя, искажается, как бы прижимаясь к оси диполя и вытягиваясь по потоку. Граница возникающей в результате магнитосферы приобретает вытянутую по потоку форму; согласно некоторым опубликованным работам ветви ее на большом удалении от Земли смыкаются. В силу чрезвычайной разреженности потока плазмы, его следовало бы рассматривать как свободно-молекулярный с длиной свободного пробега, сравнимой с размерами магнитосферы. Однако вследствие заряженности частиц они взаимодействуют на больших расстояниях (радиус корреляции порядка 10 км). Кроме того, внутри магнитосферы возникают волны и прочие коллективные взаимодействия. Оценки показывают, что вследствие всего этого континуальное описание более правильно, чем дискретное. Внешнее обтекание магнитосферы уже изучалось раньше. Задача заключалась в изучении происходящего внутри магнитосферы с грубым учетом диссипации. Схема явления следующая. Вне магнитосферы плазма считается высокопроводящей, а магнитное поле — замороженным в нее, вблизи границы магнитосферы изнутри имеется вихревой слой, в котором сосредоточен основной магнитный поток; ближе к середине — область возвратного течения.

Должны быть совместно решены уравнения гидродинамики с учетом амперовой силы и уравнения Максвелла с учетом закона Ома и вклада в напряженность электрического поля за счет движения плазмы. В случае, когда магнитная вязкость равна гидродинамической, уравнения индукции сразу интегрируются и дают конечную связь между индукцией и скоростью потока, что позволяет, зная профиль скоростей, находить индукцию. В этом предположении задача решалась методом интегральных соотношений с введением отдельно толщины вихревого слоя вблизи границы магнитосферы и толщины оставшейся части; толщина магнитосферы при этом считалась заданной (принималась равной 10 радиусам Земли). Задавался суммарный расход и считалось, что отсутствует градиент давления, а тангенциальная скорость и магнитная индукция на границе постоянны, так же как и коэффициенты задачи (вязкости, проводимость); рассмотрен численный пример.

Шестидесять второе заседание 13 XI 1969 г. В. М. Ентов (Москва). *Плоские задачи теории фильтрации с предельным градиентом.*

В ряде случаев — при движении воды в глинизированных породах и при движении смолистых и парафинистых нефтей — обнаруживаются отклонения от линейного закона фильтрации Дарси, которые могут быть описаны в первом приближении законом фильтрации с предельным (начальным) градиентом. В координатах градиент давления — скорость фильтрации, этот закон изображается прямой, не проходящей через начало координат. В условиях плоской задачи требование, чтобы градиент давления не был меньше порогового значения, приводит к появлению вблизи критических точек потока застойных зон — областей нулевой скорости.

В ряде случаев решить соответствующие нелинейные задачи можно, переходя по аналогии с газовой динамикой к переменным годографу, т. е. принимая за независимые переменные модуль скорости фильтрации  $w$  и угол  $\theta$ , образуемый скоростью фильтрации с осью  $x$ , а за искомую величину — функцию тока  $\psi$ . Для определения  $\psi(w, \theta)$  возникает линейная краевая задача в области, имеющей вид полуполосы в разрезе. Точное решение этой задачи можно получить в тех случаях, когда задача вырождается в первую краевую задачу для полуполосы без разреза. Так получается решение о те-

<sup>1</sup> Подробности о содержании семинаров, отмеченных звездочкой, см. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 3.

чений, создаваемом бесконечной цепочкой скважин в неограниченном пласте и пласте, ограниченном непроницаемой границей (сбросом), и некоторых других видах течения. Таким же образом получают предельные решения, позволяющие получить нижнюю оценку размеров застойных зон в более сложных случаях.

Общая краевая задача для полуполосы с разрезом после применения интегрального преобразования по переменной  $w$  приводится к парным интегральным уравнениям, сводимым затем к уравнению Фредгольма. Для достаточно больших и достаточно малых значений предельного градиента этим путем удается получить эффективное приближенное решение соответствующих задач. Так построены границы застойных зон для течения, создаваемого парой равнодебитных источников, и течения, создаваемого парой источников — сток.

Другой аспект рассматриваемых задач состоит в том, что уравнения нелинейной фильтрации являются аналогом уравнений продольного сдвига нелинейно-упругих и пластических тел. Отсюда следует вариационный принцип для задач нелинейной фильтрации и теорема единственности для задач в ограниченных областях. С другой стороны, для задач фильтрации в бесконечных областях и их аналога — движения вязко-пластических жидкостей и бесконечных областях — возможны решения с различным поведением на бесконечности.

Шестьдесят третье заседание 27 XI 1969 г. Ю. Н. Благовещенский (Москва). *Некоторые математические модели накопления поврежденных при испытаниях на длительную прочность* \*.

Шестьдесят четвертое заседание 11 XII 1969 г. Л. А. Галин (Москва). *Некоторые математические вопросы изменения численности и распространения популяций* \*.

Шестьдесят пятое заседание 8 I 1970 г. Р. Л. Салгайик (Москва). *Некоторые модели развития трещин в хрупких телах* \*.

Шестьдесят шестое заседание 22 I 1970 г. В. Н. Калашников (Москва). *Об эффекте Томса*.

Эффект Томса состоит в снижении гидравлического сопротивления при добавлении к движущейся в трубе жидкости малых добавок водорастворимых полимеров. Эффект наблюдается при достаточно больших числах Рейнольдса, причем концентрации добавок весьма малы (граммы на тонну), так что вязкость раствора почти не отличается от вязкости воды.

Существуют два подхода к объяснению этого эффекта; один исходит из того, что раствор представляет собой вязко-упругую жидкость и гашение турбулентных пульсаций обусловлено релаксационными процессами в ней. Согласно другому, полимер образует в растворе дискретные образования — ассоциации макромолекул, сопоставимые по размерам с колмогоровским масштабом турбулентности; в медленных движениях эта дискретность не проявляется из-за малости времени релаксации образований, с чем связано и слабое влияние на вязкость, в быстрых же — частицы ведут себя как жесткие, и связанная с ними дополнительная диссипация способствует снижению сопротивления.

Возможны, по-видимому, оба эффекта. Однако опыт показывает, что ряд растворов, не проявляя вязко-упругих свойств, (или теряя их со временем) способен снижать сопротивление (например, раствор гуаровой смолы).

С другой стороны, в растворах полимеров, снижающих сопротивление, наличие «частиц» внешне не обнаруживается (например, они свободно фильтруются). Однако датчик термоанемометра в ламинарном потоке раствора полимера фиксирует наличие значительных пульсаций, отвечающих образованиям размером 2—3 мм. По мере деградации раствора частота пульсаций растет, а амплитуда падает, что можно объяснить разрушением ассоциатов. Другой эффект — «экранирование» трубки полного напора ассоциатами — допускает моделирование на суспензиях твердых частиц. Это позволяет по величине снижения показаний трубки полного напора оценивать объемную концентрацию и размеры дискретных образований в потоке. Даже при малом весовом содержании добавок, объемное содержание ассоциатов весьма значительно. Это показывает, что ассоциаты содержат большое количество «захваченной» воды.

Обычно считается, что добавки «подавляют» турбулентность. Однако опыты с затопленными струями показали, что в них гашения турбулентности (носящей чисто инерционный характер) не происходит, напротив, уровень турбулентности увеличивается, что привело к предположению, что добавки влияют на зарождение турбулентности в переходной зоне. Это согласуется с тем фактом, что для шероховатых поверхностей (в области автомодельности по числу Рейнольдса) эффект снижения сопротивления не наблюдается. Наконец, известно, что эффект Томса начинает наблюдаться при определенной толщине переходного слоя на стенке. По оценке для исследованных полимеров эта величина близка к размерам ассоциатов.

Шестьдесят седьмое заседание 5 II 1970 г. А. С. Компанеец (Москва). *Уравнения движения сплошной среды с внутренним надмолекулярным вращением.*

Уравнения гидродинамики получаются из микроскопических уравнений путем усреднения. Но при этом приходится делать предположения о том, что средний квадрат скорости равен средней скорости в квадрате. Последнее справедливо лишь в том случае, когда можно выделить физически бесконечно малый объем, который, однако, может быть большим по сравнению с микромасштабами, чтобы можно было пренебречь флуктуациями. Такое выделение невозможно, однако, в области больших градиентов, например вблизи вихревой нити. Здесь требуется найти поправку к уравнениям обычной гидродинамики с учетом дальних корреляций. Одним из простых случаев является тот, когда можно принять, что взаимные повороты разных частей объема жидкости коррелированы на значительно больших расстояниях, чем деформации этих частей. В этом приближении при записи плотности функции Лагранжа для жидкости (диссипацией пренебрегается) к обычной трансляционной кинетической энергии должна быть добавлена кинетическая энергия вращения, пропорциональная квадрату ротора скорости с коэффициентом пропорциональности, имеющим смысл некоторого момента инерции. Соответствующим варьированием получаются уравнения движения, порядок которых оказывается на два порядка выше, чем у обычных, в связи с чем необходимо добавление двух дополнительных граничных условий. Интегрирование этой системы в случае вихревой нити приводит к устранению особенности на последней; распределение окружной скорости оказывается не монотонно спадающим с удалением от нити, а проходит через максимум. Аналогичное рассмотрение возможно и в случае упругой среды, но при этом речь уже идет не о поворотах частиц, а, скорее, о качаниях. Этот эффект не проявится при распространении продольных волн, но скажется на поперечных.

В случае анизотропной жидкости (возможно, при плавлении, в ходе которого обычно изотропизация наступает спустя заметное время) возникают трудности кинематического описания в симметрических переменных. Это можно сделать с помощью четырех параметров Эйлера, используя кватернионную технику (спинорное представление)

Семинар по механике сплошной среды под руководством Л. А. Галина

Девяносто четвертое заседание 3 X 1969 г. В. С. Никишин, Г. С. Шапиро (Москва). *Задачи теории упругости для слоистых сред* \*.

Девяносто пятое заседание 10 X 1969 г. Н. Д. Кейсер (Москва). *Задача Лэмба для неоднородного упругого полупространства* \*.

Девяносто шестое заседание 17 X 1969 г. С. М. Мхигарян (Ереван)<sup>1</sup>. *Некоторые контактные задачи для полуплоскости с упругими накладками* \*.

Девяносто седьмое заседание 14 XI 1969 г. А. Ф. Улитко (Киев). *Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости* \*.

Девяносто восьмое заседание 21 XI 1969 г. Р. И. Нигматулин, В. Н. Николаевский (Москва). *Диффузия вихря и баланс момента количества движения.*

Закон сохранения момента количества движения в случае классических (неполярных) сред приводит только к условию симметрии тензора напряжений, а нетривиальных результатов следует ожидать лишь для сред с микроструктурой. Однако если рассматривать объемы, характерные размеры которых оказываются сопоставимыми с масштабом поля градиента скоростей, то баланс моментов количества движения неизбежно включает в себя кинетический момент вихревого движения неполярной жидкости.

Показано, что закон сохранения момента количества движения в потоке несжимаемой стоксовой жидкости в частном случае сводится к уравнению диффузии вихря. Анализ проводился в двух вариантах при эйлеровом и лагранжевом представлениях кинетического момента жидкой частицы. Были введены соответствующие понятия моментов инерции и дано уравнение для скорости изменения лагранжева момента инерции жидкой частицы.

Девяносто девятое заседание 12 XII 1969 г. В. Н. Николаевский (Москва). *Ударные адиабаты в гетерогенных смесях веществ.*

Было дано изложение гидродинамической теории ударного сжатия смесей различных конденсированных веществ. Обсуждались дополнительные возможности исследованных свойств веществ при высоких давлениях и температурах, связанных с тем, что

<sup>1</sup> Работа выполнена совместно с Н. Х. Арутюняном.

материал фаз сжимается не по адиабате Гюгонио для того же материала в монолитном состоянии, поскольку одна из фаз разогревается сильнее, а другая — слабее. Известным примером является ударная адиабата пористого вещества (пустые поры — одна из «фаз» смеси). Показано, что эффектом аномального ударного разогрева можно объяснить возможность иницирования реакции в пористых и смесевых ВВ при более слабых ударных воздействиях, нежели в монолитном ВВ.

Сотое заседание 16 XII 1969 г. В. М. Сафрай (Москва). *Некоторые задачи механики двухфазных сред.*

Рассматривались некоторые теоретические вопросы гидродинамики дисперсных сред, исходя из представления о двухфазной системе как о двух взаимопроникающих сплошных средах.

Получены выражения для вязкости жидкой фазы двухфазной системы, в предельных случаях переходящие в известные формулы Эйнштейна, Тейлора и Гута и Марка для разбавленных дисперсных систем.

Изучалось влияние взвешенных частиц на устойчивость течения вязкой жидкости. Указана возможность особого механизма потери устойчивости при течениях двухфазных сред, в связи с чем была изучена устойчивость стационарного одномерного и однородного движения среды. Показано, что существенную роль в решении вопроса об устойчивости играет учет давления в диспергированной фазе. Была рассмотрена модельная задача о пульсационном движении жидкой фазы в дисперсной системе, твердая фаза которой покоится, причем ее концентрация случайным образом зависит от координат. Подробно рассмотрен случай, когда флуктуации концентрации распределены по гауссовому закону, а число Рейнольдса основного потока мало. Показано, что случайные крупномасштабные флуктуации концентрации приводят к появлению дополнительного потока жидкости по сравнению с движением через решетку частиц с однородной концентрацией.

В заключение в гомогенном приближении была рассмотрена задача о движении дисперсной системы в канале с проницаемыми стенками. Показано, что в ряде случаев коэффициент гидравлического сопротивления канала уменьшается за счет проницаемости стенок.

Сто первое заседание 30 I 1970 г. Э. Л. Аэро (Ленинград). *Механика жидкокристаллических сред*<sup>1</sup>.

Рассматривалось построение механики и термодинамики жидкокристаллических сред на основе общих уравнений механики сред с моментными напряжениями. Применительно к жидкокристаллической среде с учетом особенностей ее молекулярной организации были рассмотрены кинематические характеристики моментной среды, такие как локальный момент импульса, момент инерции, угловая скорость собственного вращения. Получены уравнения термодинамики деформирования жидкокристаллической среды, учитывающие эмпирические закономерности ее упруго-вязкого поведения.

Основной результат заключается в следующем: обратимые процессы в такой среде описываются функцией свободной энергии, зависящей помимо плотности и температуры, еще от градиентов направлений локальной оси анизотропии среды. Необратимые же процессы описываются диссипативной функцией, которая зависит как от градиентов скорости потока и градиентов температуры, так и от разности угловой скорости вращения оси анизотропии и угловой скорости самой жидкости в данной точке.

Упругие законы и реологические соотношения в механике жидкокристаллической среды имеют, конечно, более сложный вид по сравнению с обычной или вязкоупругой жидкостью. В частности, такая среда характеризуется не двумя, а пятью коэффициентами вязкости, а упругие соотношения содержат не две, а четыре независимых константы. Приведены значения этих констант и коэффициентов вязкости, полученные сопоставлением решений уравнений равновесия и простейших динамических задач жидкокристаллической среды с опытными данными.

Сто второе заседание 6 II 1970 г. П. М. Белоцерковский (Москва). *Задача о соударении двух струй идеальной жидкости с разными скоростями на свободной поверхности.*

Рассматривалась плоская задача об истечении струй идеальной жидкости из двух каналов с параллельными стенками, смежные стороны которых образуют угол. В общем случае, когда плотности жидкостей и значения скорости на свободной поверхности различны, течение имеет разрыв вдоль линии тока, разделяющей струи. Задача сведена к решению некоторой нелинейной системы интегральных уравнений, которое получается в виде формальных рядов по степеням параметра  $\varepsilon$  — отношения констант Бернулли двух струй. Течение описывается кусочно-аналитическими функциями.

<sup>1</sup> Работа выполнена совместно с А. Н. Булыгиным.

Сто третье заседание 20 II 1970 г. О. В. Рысев (Москва). *Некоторые вопросы разлета в пустоту газовых масс, обладающих симметрией.*

Рассматривалась изэнтропический разлет в пустоту газовых масс, обладающих осевой и сферической симметрией, а также установившееся истечение сверхзвуковой осесимметричной струи в пустоту.

Введением новых искомым функций соотношения, выполняемые вдоль характеристик, представляются в виде суммы или разности дифференциалов этих функций. Установлен следующий результат: во всех рассматриваемых случаях первая волна разрежения, идущая к оси (центру) симметрии, содержит характеристику, вдоль которой новые искомые функции постоянны. Таким образом, такая характеристика может разделять поток на области стационарного и нестационарного течения. Найдены параметрические уравнения этой характеристики в физической плоскости и плоскости годографа.

Сто четвертое заседание 27 II 1970 г. В. П. Пилатовский (Москва). *Некоторые задачи гидромеханики макротрещин в тонком пласте при фильтрации однородной жидкости.*

Изложено решение ряда задач фильтрации однородной жидкости при наличии макротрещин в тонком пласте методом тригонометрических рядов. Показано, что предложенное решение применимо также в случае заостренной трещины, т. е. не содержит особенностей у концов трещины. Рассматривались также задачи нестационарной фильтрации с учетом деформации трещины, которая предполагалась линейно зависящей от перепада давлений между точками, расположенными на различных берегах трещины. Получены выражения для деформации трещины и основных фильтрационных характеристик потока.

Семинар по механике систем твердых тел и гироскопов под руководством А. Ю. Ишлинского, Д. М. Климова, Е. А. Девянина

Заседание семинара 1 XII 1969 г. И. Ш. Шульман (Москва). *Достаточные условия асимптотической устойчивости решения задачи определения курса методом инерциального счисления \**.

Заседание семинара 8 XII 1969 г. Л. В. Епишев (Москва). *Исследование влияния вибрации на точность гироскопических приборов с несимметричным ротором \**.

Заседание семинара 15 XII 1969 г. В. Ф. Журавлев (Москва). *Динамика ротора в неидеальных подшипниках (линейная теория вибрации) \**.

Заседание семинара 22 XII 1969 г. И. Д. Кондорский (Москва). *К теории невозмущенных гироскопических систем \**.

Заседание семинара 19 I 1970 г. И. Г. Багонкая (Москва). *Движение гироскопа в кардановом подвесе в условиях вибрации при наличии сил трения, пропорциональных динамическим реакциям \**.

Заседание семинара 16 II 1970 г. Д. М. Климов, В. А. Филиппов (Москва). *О резонансе в существенно нелинейной гироскопической системе \**.

Семинар по механике оболочек и пластин под руководством С. А. Алексева, А. Л. Гольденвейзера, В. И. Феодосьева

Сорок пятое заседание 5 XI 1969 г. В. П. Морар (Кипшинев). *Геометрически нелинейные оболочки вращения \**.

Сорок шестое заседание 26 XI 1969 г. А. И. Лиходед, А. А. Малинин (Москва). *Колебания оболочек вращения с сосредоточенными массами и осцилляторами \**.

Сорок седьмое заседание 17 XII 1969 г. А. Л. Гольденвейзер (Москва). *Влияние условий закрепления на напряженное состояние упругой тонкой оболочки \**.

Сорок восьмое заседание 11 II 1970 г. В. М. Корнева (Новосибирск). *К асимптотическому интегрированию уравнений теории упругих оболочек и пластин при заданной осцилляции напряженно-деформированного состояния \**.