Окончательно для коэффициента полезного действия получаем

$$K = \frac{J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega) + 2/\pi\omega}{\nu\,[J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega)] + 2/\pi\omega}, \qquad \nu \geqslant 1$$

Таким образом, при $\nu = 1$, т. е. когда движение профиля в неподвижной системе отсчета соответствует как бы перемещению в очень узком синусоидальном канале, к.п.д. его равняется единице. Однако тянущая сила в этом случае равна нулю. При $\omega \to \infty$, $k \to 2/(\nu+1)$ $(\nu \geqslant 1)$.

Результаты, полученные выше для случая синусоидальных деформаций, можно легко обобщить для профиля произвольной формы, когда

$$\eta(x, \xi) = \sum_{n=0}^{=\infty} A_n \sin \omega_n (\xi + \nu x)$$

В этом случае величина тянущей силы, очевидно, равна

$$T = -\pi\rho c_0^2(\nu - 1) \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n^2 \omega_n^2 (\theta^2 + p)[J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n) + 2/\pi\omega_n].$$

Аналогично можно определить и коэффициент полезного действия.

Поступило 10 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения. ПМТФ, 1962, № 4, стр. 3—9.
2. Yao-Tsu Wu. T. Swimming of a waving plate. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, No. 3, pp. 321—344.
3. Siekmann J. Zur Theorie der Bewegung Schwimmender Tiere. Forschung im Ingenieurwesen, 1965, Bd 31, Nr 6, S. 192—197.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
5. Седов Л. И. Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями. Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 252.
6. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. К теории колеблющегося крыла. Тех. заметки ЦАГИ, 1935, № 45.

УДАР ПО УПРУГОМУ КОНТУРУ, ПЛАВАЮЩЕМУ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. М. РОСТОВЦЕВ

(*Ленинград*)

Рассмотрим гидроупругие колебания контура, вызванные вертикальным ударом. Помимо вертикальных смещений контура как жесткого целого учитываются смещения его точек, вызванные упругими деформациями, которые задаются в виде ряда по координатным функциям.

Обобщенные координаты определяются из уравнения упругих колебаний контура под действием гидродинамического давления.

Для определения гидродинамического давления жидкости на контур решается линеаризованная задача определения потенциала скоростей жидкости с учетом деформируемости контура.

Рассмотрим гидроупругие колебания контура (фигура), вызванные вертикальным ударом.

Пусть скорость вертикальных смещений контура как жесткого целого равна $v_0(t)\sigma(t)$, где $\sigma(t)$ — единичная функция Хевисайда. Упругие смещения, направленные по внешней нормали к контуру и измеряемые от линии, соответствующей положению недеформированного контура, примем в виде

$$w(y, z, t) = \sum_k q_k(t)\, w_k(y, z) \tag{1}$$

Здесь $w_k(y, z)$ — полная система координатных функций упругих колебаний; условия для выбора $w_k(y, z)$ оговорены ниже, $q_k(t)$ — обобщенные координаты.

Поле скоростей частиц жидкости при $t \geqslant 0$ определяется потенциалом (жидкость идеальная, движение безвихревое)

$$\Phi(y, z, t) = -v_0(t)\Phi_0(y, z) + \sum_k \dot{q}_k(t)\Phi_k(y, z) \tag{2}$$

Функция Φ должна быть найдена из решения следующей краевой задачи [1] для области, внешней по отношению к контуру l:

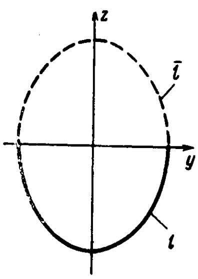
$$\begin{gathered}\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{при } z < 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -v_0(t)\cos(n, z) + \sum_k \dot{q}_k(t) w_k(y, z) \quad \text{на } l\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь n — внешняя нормаль к контуру l, ∇^2 — оператор Лапласа.

Асимптотическое условие сводится к требованию ограниченности Φ всюду в жидкости и стремления производных к нулю при $(y^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$.

Ограничиваясь рассмотрением малых колебаний, дополнительно линеаризуем задачу, удовлетворяя последнее из условий (3) на неподвижном контуре l_0.

Заметим, что наибольшие упругие смещения и напряжения в конструкциях, подверженных удару, развиваются в течение весьма короткого интервала времени, соизмеримого с наибольшим периодом свободных упругих колебаний контура.



В течение указанного интервала все смещения точек контура (в том числе и смещение контура как жесткого целого) малы, поэтому указанная выше линеаризация возможна.

На основании (2) и (3) для определения функций Φ_j; $(j = 0, 1\ldots)$ получим следующую систему условий:

$$\begin{gathered}\nabla^2\Phi_j = 0 \quad \text{при } z < 0, \qquad \Phi_j = 0 \quad \text{при } z = 0 \\ \partial\Phi_0 / \partial n = \cos(n, z), \; \partial\Phi_k / \partial n = w_k(y, z) \qquad (k \geqslant 1) \quad \text{на } l_0\end{gathered} \tag{4}$$

Условие (4) при $z = 0$ позволяет перейти к рассмотрению колебаний сдвоенного контура в неограниченной жидкости. При этом равенство нулю единичных потенциалов Φ_k на линии $z = 0$ будет достигнуто только в том случае, если координатные функции $w_k(y, z)$ антисимметричны относительно точек контура, лежащих на оси y. Это обстоятельство ограничивает произвольность упругих колебаний контура, так как оговоренное выше требование равносильно наложению связи, устраняющей нормальные упругие перемещения контура на уровне ватерлинии.

При выборе функций $w_k(y, z)$ кроме указанного кинематического условия $w_k(\pm b / 2, 0) = 0$ необходимо принимать во внимание еще два граничных условия по концам контура, зависящие от особенностей конструкции.

Обобщенные координаты $q_k(t)$ должны быть определены из уравнения упругих колебаний контура.

При ударе по плавающему контуру в момент времени $t = 0$ частицы жидкости получают конечные скорости, что соответствует действию на жидкость (и на контур) конечного импульса давлений

$$p_{0t} = -\rho\left[-v_0(0)\Phi_0(y, z) + \sum_k \dot{q}_k(0)\Phi_k(y, z)\right] \tag{5}$$

Скорости упругих колебаний мгновенно достигают конечных значений. При составлении уравнения упругих смещений контура при $t = 0$ пренебрежем всеми конечными силами. Получим уравнение колебаний в виде

$$m(y, z)\frac{\partial w(y, z, 0)}{\partial t} = -p_{0t} \tag{6}$$

где $m(y, z)$ — погонная масса контура.

Подставляя в (6) выражения (1) и (5) и применяя метод Бубнова — Галеркина, найдем систему уравнений для определения начальных значений обобщенных скоростей

$$\sum_k \dot{q}_k(0)(m_{kj} + n_{kj}) = -v_0(0)M_j, \qquad (j, k = 1, \ldots) \tag{7}$$

где

$$m_{kj} = \int\limits_l m(y,z)w_k(y,z)w_j(y,z)\,dl_0$$

$$n_{kj} = -\rho\int\limits_{l_0}\Phi_k(y,z)w_j(y,z)\,dl_0, \qquad M_j = \rho\int\limits_{l_0}\Phi_0(y,z)w_j(y,z)\,dl_0 \tag{8}$$

Упругие колебания контура непосредственно после удара определяются уравнением

$$L[w(y,\ z,\ t)] + m(y,\ z)\partial^2 w / \partial t^2 = -p(y,\ z,\ t) \tag{9}$$

где L — некоторый дифференциальный в общем случае нелинейный оператор, $p(y, z, t)$ — давление жидкости на контур.

Функцию $p(y,\ z,\ t)$ определим на основании интеграла Лагранжа уравнений движения жидкости, пренебрегая квадратами вызванных скоростей

$$p(y,z,t) = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \rho v_0(t)\Phi_0(y,z) - \rho\sum_k q_k(t)\Phi_k(y,z) \tag{10}$$

С помощью метода Бубнова — Галеркина для определения обобщенных координат получим следующую систему уравнений:

$$\sum_k [q_k^{\cdot\cdot}(m_{kj}+n_{kj})] + Q_j(q_1,\ q_2\ldots) = -v_0(t)M_j \tag{11}$$

где дополнительно к (8) принято обозначение

$$Q_j(q_1,\ q_2\ldots) = \int\limits_{l_0} L\left[\sum_k q_k w_k(y,\ z)\right] w_j(y,\ z)\,dl_0 \tag{12}$$

Приближенное решение нелинейной системы уравнений (11), удовлетворяющее начальным условиям

$$q_k(o) = 0, \qquad q_k^{\cdot}(o) = \alpha_k v_0(o)$$

где α_k должны быть найдены из уравнений (7), всегда может быть получено с помощью различных приемов линеаризации.

Если оператор L — линейный

$$Q_j = \sum_k F_{kj}q_k \qquad F_{kj} = \int\limits_{l_0} L[w_k(y,\ z)]\,w_j(y,\ z)\,dl_0 \tag{13}$$

то решение системы (11) может быть найдено в виде

$$q_k(t) = \sum_i \nu_{ki}(a_i \sin\lambda_i t + b_i(t)) \tag{14}$$

$$a_i = -\frac{v_0(0)}{\lambda_i}\sum_j M_j\nu_{ji}\left(\sum_k\sum_j(m_{kj}+n_{kj})\nu_{ki}\nu_{ji}\right)^{-1} \tag{15}$$

$$b_i(t) = \frac{a_i}{v_0(0)}\int\limits_0^t v_0^{\cdot}(t)\sin\lambda_i(t-\tau)\,d\tau$$

где λ_i и ν_{ki} — собственные числа и собственные формы однородной системы, следующей из (11).

Решение краевой задачи (4) можно получить либо с помощью конформного отображения области, внешней по отношению к контуру, на круг единичного радиуса, либо с помощью использования специальных криволинейных систем координат.

Имея целью применение рассматриваемого решения к задачам об ударе плоского днища корабля о волну, используем эллиптическую систему координат

$$y = -c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta, \qquad z = -c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta \tag{16}$$

заменив контур эллипсом $\xi = \xi_0$.

Величины c и ξ_0 определяются зависимостями

$$^1/_2 b = c\,\mathrm{ch}\,\xi_0, \qquad T = c\,\mathrm{sh}\,\xi_0, \qquad C = (^1/_4 b^2 - T^2)^{1/2} \tag{17}$$

Условия на контуре l_0 в эллиптической системе координат получат вид

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\xi_0} = -\frac{b}{2}\sin\eta, \qquad \frac{\partial\Phi_k}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=\xi_0} = w_k(\eta)\left(T^2\cos^2\eta + \frac{b^2}{4}\sin^2\eta\right)^{1/2} \tag{18}$$

Условия на свободной поверхности

$$\Phi_j = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \eta = \pi \tag{19}$$

Единичные потенциалы Φ_j, удовлетворяющие (18), (19) и асимптотическим условиям, равны

$$\Phi_0 = \frac{b}{2}\sin\eta\exp(\xi_0 - \xi), \qquad \Phi_k = -\frac{b}{2}\sum_n \frac{\beta_{kn}}{n}\sin n\eta\exp n(\xi_0 - \xi) \tag{20}$$

где

$$\beta_{kn} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w_k(\eta)\left(\frac{4T^2}{b^2}\cos^2\eta + \sin^2\eta\right)^{1/2}\sin n\eta\,d\eta$$

При рассмотрении задач удара плоского днища корабля о волну следует положить $T \to 0$, $\xi_0 \to 0$.

Рассмотрим также решение задачи о вертикальном ударе по произвольному симметричному относительно оси oy упругому контуру.

С помощью функции

$$x(\xi) = \sum_{n=-1,1,3\ldots} c_n\xi^{-n}, \qquad (x = y + iz,\ \xi = re^{i\theta},\ i = \sqrt{-1}) \tag{21}$$

область, внешнюю по отношению к замкнутому контуру $l_0 + \bar{l}_0$ (фигура), отобразим на внешность единичного круга. Используя (21), получаем уравнение контура в параметрическом виде

$$y = (c_{-1} + c_1)\cos\theta + c_3\cos 3\theta + \ldots, \qquad z = (c_{-1} - c_1)\sin\theta - c_3\sin 3\theta - \ldots \tag{22}$$

и следующие краевые условия для потенциалов Φ_j на окружности единичного радиуса $r = 1$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\bigg|_{r=1} = \frac{\partial y}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\Phi_k}{\partial r}\bigg|_{r=1} = w_k(\theta)\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{23}$$

На основании (23) значения потенциалов на контуре l_0, необходимые для вычисления интегралов (8), равны

$$\Phi_j = \sum_{m=1,2\ldots}\gamma_{jm}\sin m\theta \tag{24}$$

где

$$\gamma_{01} = -(c_{-1} + c_1), \qquad \gamma_{0m} = -c_m \qquad (m \geqslant 2);$$

$$\gamma_{jm} = -\frac{2}{m\pi}\int_{l_0} w_j(\theta)\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2\right]^{1/2}\sin m\theta\,d\theta$$

Параметр θ определяется зависимостями (22).

Поступило 22 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.