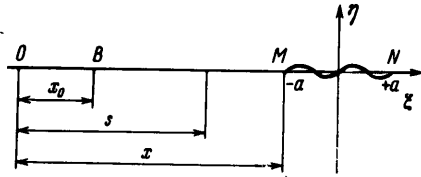


**ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЯНУЩЕЙ СИЛЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ПРОФИЛЯ**

В. А. ЕРОШИН (Москва)

Вопросы возникновения тянущей силы при движении деформируемого профиля в идеальной несжимаемой жидкости исследовались в работах [1-3]. Так, в работах [1, 2] предлагаются две различные математические модели, объясняющие в некоторой мере механизм движения в безграничной жидкости. В работе [3] рассматривается вопрос о движении плоской гибкой пластинки в идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, исследуется влияние глубины погружения и толщины пластинки, проводится сравнение с экспериментальными данными. В данной работе в постановке Л. И. Седова рассмотрена задача о нестационарном движении деформируемого профиля. Для плоского профиля, вдоль которого распространяются синусоидальные волны малой амплитуды, определяются значения тянущей силы и коэффициента полезного действия с учетом вихрей, сбегających с задней кромки профиля. Результаты, полученные для синусоидальных деформаций профиля, обобщаются на случай профиля произвольной формы.

**1. Определение течения жидкости.** Рассмотрим движение тонкого слабо изогнутого профиля в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности (фиг. 1). Предположим, что движение профиля состоит из поступательного движения со скоростью  $c_0$  в положительном направлении горизонтальной оси и движения деформации, а именно предположим, что вдоль профиля распространяются синусоидальные волны малой амплитуды. Движение рассматриваем в подвижной системе координат, связанной с серединой профиля  $MN$ , где  $O$  — начало неподвижной системы отсчета. Если неустановившееся движение жидкости происходит около профиля с заостренной задней кромкой, то из условия Жуковского о конечности скорости жидкости на задней кромке следует, что она должна быть точкой схода линии разрыва горизонтальной скорости. Нормальная составляющая скорости вдоль этой линии непрерывна. Линию разрыва горизонтальной скорости будем рассматривать как непрерывное распределение вихрей, сбегających с задней кромки профиля. Обозначим через  $\eta(\xi, x)$  форму профиля. Будем предполагать, что профиль мало отличается от прямолинейного отрезка  $MN$  и граничные условия на нем снесем на ось  $\xi$ . Линию разрыва горизонтальных скоростей, остающихся позади профиля, также заменим отрезком горизонтальной оси.



Фиг. 1

Пусть  $B$  — положение задней кромки в момент возникновения движения. Для определения потенциала скорости абсолютного движения жидкости  $\Phi(\xi, \eta, t)$  в подвижной системе координат имеем следующие граничные условия:

1) на обеих сторонах отрезка  $MN$  известна нормальная составляющая скорости жидкости  $\partial\Phi/\partial\eta = -v_n$ , которая определяется формой и законом движения профиля;

2) на отрезке  $BM$  имеем разрыв горизонтальной составляющей скорости, величину которого обозначим через

$$\varphi(x) = \frac{d\Phi_-}{ds} - \frac{d\Phi_+}{ds}.$$

Введем характеристическую функцию  $W(\xi) = \Phi + i\Psi$  и рассмотрим комплексно сопряженную скорость  $dW/d\xi = u - iv$ .

Можно показать [4], что для данных граничных условий

$$\frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\xi^2 - a^2}} \left[ - \int_{-a}^{+a} \frac{2v_n \sqrt{a^2 - \xi_0^2}}{\xi_0 - \xi} d\xi_0 + \int_{x_0}^x \frac{\varphi(s) \sqrt{\xi_0^2 - a^2}}{\xi_0 - \xi} ds \right] \quad (1.1)$$

$(\xi_0 = s - x - a)$

Интегрируя это соотношение, получаем  $W(\xi)$  и  $\Phi(\xi, \eta, t)$ . Для конечности скорости жидкости в точке  $M$  необходимо, чтобы коэффициент при  $1/2\pi i \sqrt{\xi^2 - a^2}$  для  $\xi = -a$  обращался в нуль, т. е. для определения  $\varphi(x)$  получаем интегральное уравнение

$$f_1(x) = - \int_{x_0}^x \varphi(s) \sqrt{\frac{2a+x-s}{x-s}} ds \quad \left( f_1(x) = 2 \int_{-a}^{+a} v_n(\xi, x) \sqrt{\frac{a-\xi}{a+\xi}} d\xi \right)$$

Таким образом, зная закон движения профиля, можно определить течение жидкости. Преобразуем интегральное уравнение. Обозначив

$$\int_{x_0}^x \varphi(s) ds = -[\Gamma(x) - \Gamma_0] = -\Gamma'(x)$$

и положив  $a + x - s = at$ , приведем интегральное уравнение к виду

$$f_1(x) - \Gamma'(x) = a \int_x^1 \varphi(x + a - at) \left[ \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2} - 1 \right] dt$$

$$(\chi = (1 + (x - x_0) / a))$$

Если через достаточно большой промежуток времени движение стремится к некоторому установившемуся периодическому режиму, то можно ограничиться изучением этого режима, положив  $x_0 = -\infty$ . После этого интегральное уравнение перейдет в такое:

$$f_1(x) - \Gamma'(x) = a \int_{-\infty}^1 \varphi(x + a - at) \left[ \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2} - 1 \right] dt \quad (1.2)$$

В формуле (1.1) в этом случае также необходимо положить  $x_0 = -\infty$ . Перейдем к рассмотрению конкретной задачи. Пусть  $a = 1$  ( $2a$  — длина профиля) и форма профиля дается выражением

$$\eta(\xi, x) = A_0 \sin \omega(\xi + vx), \quad A_0^2 \ll 1$$

Тогда нормальная составляющая скорости жидкости на  $MN$  равна

$$v_n(\xi, x) = c_0 \eta'_\xi(\xi, x) - \eta'_t(\xi, x)$$

Учитывая, что  $\partial / \partial t = C_0 \partial / \partial x$ , окончательно имеем

$$v_n(\xi, x) = -A_0 c_0 \omega (v - 1) \cos \omega(\xi + vx)$$

Подставляя  $v_n(\xi, x)$  в выражение для  $f_1(x)$ , получаем

$$f_1(x) = -2\pi A_0 c_0 \omega (v - 1) [J_0(\omega) \cos \omega vx + J_1(\omega) \sin \omega vx]$$

где  $J_\nu(\omega)$  — функции Бесселя.

При решении задачи об установившихся гармонических колебаниях жесткого профиля Л. И. Седовым было получено решение интегрального уравнения (1.2) для

$$f_1(x) = 2\pi A_0 \exp(i\mu x)$$

В данном случае в силу линейности решение интегрального уравнения будет линейной комбинацией действительной и мнимой частей решений, полученных Л. И. Седовым.

Приведем решение интегрального уравнения (1.2) для  $f_1(x) = 2\pi A_0 e^{i\mu x}$ . Предположим, что  $\Gamma'(x) = D e^{i\mu x}$ . Тогда

$$\varphi(x) = -d\Gamma(x) / dx = -i\mu e^{i\mu x}$$

Подставив  $\Gamma(x)$  и  $\varphi(x)$  в интегральное уравнение (1.2), получаем

$$2\pi A_0 - D = -i\mu D e^{i\mu} \int_{-\infty}^1 e^{-i\mu t} \left[ \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2} - 1 \right] dt$$

Интеграл в правой части выражается через функции Ганкеля

$$\int_{-\infty}^1 e^{-i\mu t} \left[ \left( \frac{t+1}{t-1} \right)^{1/2} - 1 \right] dt = \frac{\pi}{2} [iH_0^{(2)}(\mu) + H_1^{(2)}(\mu)] + \frac{e^{-i\mu}}{i\mu}$$

поэтому

$$\varphi(x) = -\frac{4ie^{-i\mu} e^{i\mu x} A_0}{[H_0^{(2)}(\mu) - iH_1^{(2)}(\mu)]} = -i\mu D e^{i\mu x} \quad (1.3)$$

2. Тянущая сила, действующая на профиль. Пусть  $X$  — горизонтальная составляющая гидродинамической силы, действующей на профиль

$$X = 2 \int_{-1}^{+1} \eta'_\xi(\xi, x) (P - P_0) d\xi$$

Для определения давления пользуемся интегралом Лагранжа в подвижной системе координат. Из уравнения (1.1) имеем

$$\frac{\partial \Phi(s, t)}{\partial t} = \frac{A_0 c_0^2 \omega (\nu - 1)}{\pi} \left\{ \nu \int_{-1}^{+1} \frac{\cos \omega (\xi_0 + \nu x) \sqrt{1 - \xi^2}}{(\xi_0 - \xi) \sqrt{1 - \xi_0^2}} d\xi_0 - \int_{-1}^{+1} \frac{\cos \omega (\xi_0 + \nu x) \sqrt{1 + \xi_0^2}}{(\xi_0 - \xi) \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi_0 \right\} - \frac{c_0}{2\pi} \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1} \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в выражение для  $X$  и проводя соответствующие вычисления, получаем

$$X = \pi r A_0^2 c_0^2 \omega^2 (\nu - 1) [2J_0^2(\omega) \cos^2 \omega \nu x - \nu J_0(\omega) J_1(\omega) \sin 2\omega \nu x] - A_0 c_0 \omega \rho [J_0(\omega) \cos \omega \nu x - J_1(\omega) \sin \omega \nu x] \int_{-\infty}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}}$$

где  $J_\nu(\omega)$  — функции Бесселя.

Кроме  $X$  на профиль действует подсосывающая сила, величина которой равна [9]

$$P = 2\pi\rho \left[ \frac{c_0}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{[\eta'_\xi(\xi, x) - \eta'_{x'}(\xi, x)]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right]^2$$

После несложных преобразований находим

$$P = 2\pi\rho \left[ A_0 c_0 \omega (\nu - 1) J_0(\omega) \cos \omega \nu x - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} \right]^2$$

Определим значение интеграла. Воспользовавшись значением  $\varphi(x)$  из уравнения (1.3) и положив  $\xi_0 = s - x - 1 = -t$ , найдем

$$\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} = \frac{4ie^{i\mu x}}{[H_0^{(2)}(\mu) - iH_1^{(2)}(\mu)]} \int_{\infty}^1 \frac{e^{-i\mu t} dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

Последний интеграл выражается через функции Ганкеля второго рода

$$\int_{\infty}^1 \frac{e^{i\mu t} dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(\mu)$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} = -2\pi A_0 e^{i\mu x} \frac{H_0^{(2)}(\mu)}{[H_0^{(2)}(\mu) - iH_1^{(2)}(\mu)]} = 2\pi A_0 e^{i\mu x} (p + iq) \quad (2.2)$$

Значение вычисленного интеграла соответствует

$$f_1(x) = 2\pi A_0 e^{i\mu x}$$

Для

$$f_1(x) = -2\pi A_0 c_0 \omega (\nu - 1) [J_0(\omega) \cos \omega \nu x + J_1(\omega) \sin \omega \nu x]$$

величина интеграла будет линейной комбинацией действительной и мнимой частей уравнения (2.2).

$$\int_{-\infty}^x \frac{\varphi(s) ds}{\sqrt{\xi_0^2 - 1}} = -2\pi A_0 c_0 \omega (\nu - 1) \{ [pJ_0(\omega) + qJ_1(\omega)] \cos \omega \nu x + [pJ_1(\omega) - qJ_0(\omega)] \sin \omega \nu x \}$$

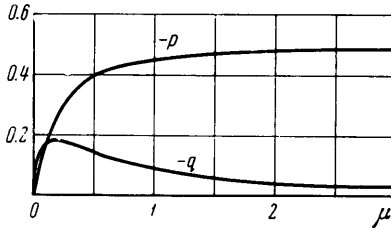
Функции  $p(\omega \nu)$  и  $q(\omega \nu)$ , которые здесь используются, были введены и затабулированы Л. И. Седовым. На фиг. 2 представлены кривые, изображающие  $p$  и  $q$  в за-

висимости от  $\mu$ . Теперь, зная значение интеграла, можно определить величины  $X$  и  $P$ . Не останавливаясь на этом, приведем значение средней за период тянущей силы, действующей на профиль

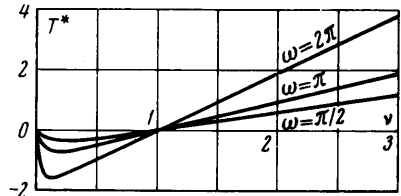
$$T = -\rho A_0^2 c_0^2 \omega^2 (\nu - 1) (\theta^2 + \Gamma) [J_0^2(\omega) + J_1(\omega) + 2/\pi\omega]$$

$$\left( T = \frac{\omega\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega\nu} (X + P) dx, \theta^2 = p^2 + q^2 \right)$$

Из формулы видно, что при  $\nu = 0$  среднее за период значение тянущей силы (и мгновенное, естественно, тоже) равно нулю, что означает выполнение парадокса Даламбера для жесткого профиля. При  $\nu = 1$  как среднее, так и мгновенные значения тяги также равны нулю. В этом случае профиль перемещается по синусоиде вдоль



Фиг. 2



Фиг. 3

самого себя и нормальная составляющая скорости жидкости на нем равна нулю, что в идеальной несжимаемой жидкости и приводит к тривиальному решению. На фиг. 3 приведены графики средней тянущей силы  $T^* = T/\rho A_0^2 c_0^2$  в зависимости от  $\nu$  для нескольких значений  $\omega$ . При  $\nu < 1$ , т. е. когда волны деформации профиля в неподвижной системе отсчета движутся в направлении движения, жидкость оказывает сопротивление движению профиля. При  $\nu > 1$  в неподвижной системе отсчета эти волны движутся назад и деформация профиля приводит к образованию тяги.

Энергия, затрачиваемая телом, расходуется на создание тяги и приведение жидкости в движение. Введем коэффициент полезного действия как отношение среднего значения полезной мощности  $c_0 T$  к среднему значению затраченной мощности, равной сумме работы силы тяги  $c_0 T$  и среднего значения кинетической энергии жидкости  $N$ , приобретаемой за один период

$$k = c_0 T / (c_0 T + N)$$

Определим кинетическую энергию жидкости

$$N = \frac{\rho}{2} \iint |\text{grad } \Phi|^2 d\xi d\eta = -\frac{\rho}{2} \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$$

Если

$$\varphi(x) = \text{Re} [i\mu B e^{i\mu x/a}]$$

то, очевидно, в общем случае за крылом в бесконечности получается периодическое возмущенное движение жидкости с характеристической функцией [4]

$$W = \Phi + i\Psi = \pm i/2 B e^{i\mu z/a}$$

причем плюс берется в верхней полуплоскости, минус — в нижней.

Средняя энергия этого движения, приобретенная за один период, равна [4]

$$N = \frac{\rho\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\mu} \Phi_- \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\xi = \frac{\rho\mu}{8} |B|^2$$

В данном случае

$$B = c_0 \omega (\nu - 1) D \sqrt{J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega)}, \quad \mu = \omega\nu$$

и, следовательно, для средней энергии имеем <sup>1</sup>

$$N = -\rho A_0^2 c_0^3 \omega^2 (\nu - 1)^2 (\Theta^2 + p) [J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega)]$$

<sup>1</sup> Этот же результат получается, если работу, произведенную телом над жидкостью, определять по формуле

$$N = -2 \int_{-a}^{+a} v_n(\xi, x) (p - p_0) d\xi - c_0 P$$

где  $P$  — подсосывающая сила.

Окончательно для коэффициента полезного действия получаем

$$K = \frac{J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega) + 2/\pi\omega}{v[J_0^2(\omega) + J_1^2(\omega)] + 2/\pi\omega}, \quad v \geq 1$$

Таким образом, при  $v = 1$ , т. е. когда движение профиля в неподвижной системе отсчета соответствует как бы перемещению в очень узком синусоидальном канале, к.п.д. его равняется единице. Однако тянущая сила в этом случае равна нулю. При  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow 2/(v+1)$  ( $v \geq 1$ ).

Результаты, полученные выше для случая синусоидальных деформаций, можно легко обобщить для профиля произвольной формы, когда

$$\eta(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \omega_n (\xi + vx)$$

В этом случае величина тянущей силы, очевидно, равна

$$T = -\rho r c_0^2 (v-1) \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \omega_n^2 (\theta^2 + p) [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n) + 2/\pi\omega_n].$$

Аналогично можно определить и коэффициент полезного действия.

Поступило 10 II 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М. Об одном принципе создания тяговой силы для движения. ПМТФ, 1962, № 4, стр. 3—9.
2. Yao-Tsu Wu. T. Swimming of a waving plate. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, No. 3, pp. 321—344.
3. Siekmann J. Zur Theorie der Bewegung Schwimmender Tiere. Forschung im Ingenieurwesen, 1965, Bd 31, Nr 6, S. 192—197.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
5. Седов Л. И. Теория нестационарного глссирования и движения крыла со сбегающими вихрями. Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 252.
6. Келдыш М. В., Лаврентьев М. А. К теории колеблющегося крыла. Тех. заметки ЦАГИ, 1935, № 45.

### УДАР ПО УПРУГОМУ КОНТУРУ, ПЛАВАЮЩЕМУ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д. М. РОСТОВЦЕВ

(Ленинград)

Рассмотрим гидроупругие колебания контура, вызванные вертикальным ударом. Помимо вертикальных смещений контура как жесткого целого учитываются смещения его точек, вызванные упругими деформациями, которые задаются в виде ряда по координатным функциям.

Обобщенные координаты определяются из уравнения упругих колебаний контура под действием гидродинамического давления.

Для определения гидродинамического давления жидкости на контур решается линеаризованная задача определения потенциала скоростей жидкости с учетом деформируемости контура.

Рассмотрим гидроупругие колебания контура (фигура), вызванные вертикальным ударом.

Пусть скорость вертикальных смещений контура как жесткого целого равна  $v_0(t)\sigma(t)$ , где  $\sigma(t)$  — единичная функция Хевисайда. Упругие смещения, направленные по внешней нормали к контуру и измеряемые от линии, соответствующей положению недеформированного контура, примем в виде

$$w(y, z, t) = \sum_k q_k(t) w_k(y, z) \quad (1)$$