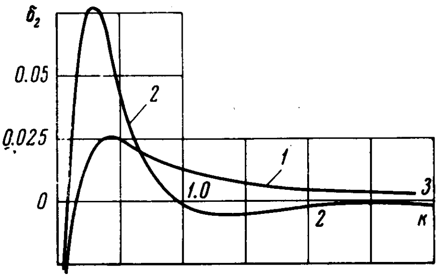
ревого следа (кривая *2*) при $\alpha = 270°$ (при $\alpha = 270°$ и $k = 0$ $L_2 > 0$, что указывает на возможность появления областей автоколебания при $k \neq 0$). Величина динамических напряжений обратно пропорциональна величине $\delta_3 + \delta_2$, где δ_3 — коэффициент механического демпфирования. Если $\delta_3 + \delta_2 > 0$, то колебания будут демпфироваться, при $\delta_3 + \delta_2 < 0$ будут возникать автоколебания. Из полученных расчетов видно, что в области чисел Струхаля $k > 1$ величина δ_2 может достигать значения — 0.005 (кривая *2* на фиг. 5). Так как для применяемых турбинных лопаток δ_3 составляет обычно 0.03, то можно сделать вывод, что возбуждения турбинных решеток данного типа не будет (для применяемых турбинных решеток числа Струхаля обычно больше 0.5).



Фиг. 5

Из графиков видно, что в области чисел Струхаля меньше 0.15 величина δ_2 может превзойти величину коэффициента механического демпфирования. В этом случае $\delta_3 + \delta_2 < 0$ и будут возникать автоколебания.

Поступило 30 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимирски З. Б., Нитусов В. В., Самойлович Г. С. Расчет обтекания решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз, плоским потоком несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. Сарен В. Э. Решетка произвольных вибрирующих профилей в потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
3. Курзин В. Б. Решение задачи о неустановившемся обтекании решетки телесных профилей методом склеивания. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
4. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
5. Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом фаз. ПММ, 1962, т. 25, вып. 1.
6. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1969.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ СТЕНКИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

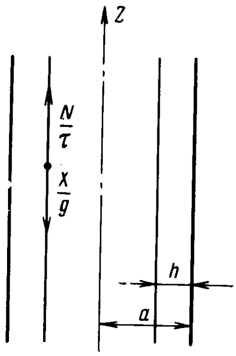
Л. В. ПАШИНИНА

(*Москва*)

Рассматривается движение вязкой тяжелой несжимаемой жидкости вдоль стенки вертикальной круглой цилиндрической трубы. На поверхности жидкости действует постоянное касательное напряжение. Движение предполагается установившимся, прямолинейным и осесимметричным. В работе [1] при исследовании аналогичного течения вдоль наклонной стенки указывалось, что данная постановка задачи возможна при рассмотрении движения жидкости, граничащей с идеальным газом. Примерами могут служить явления послойного течения жидкости — газа, когда жидкость концентрируется вдоль стенок трубы, явления использования пленочного охлаждения, а также явления оплавления тел, движущихся в газе с большой скоростью.

Ставится задача устойчивости по отношению к возмущениям типа длинных волн. Предположение больших длин волн возмущений позволяет ввести малый параметр $\varepsilon = 1 / \lambda$ и линеаризовать по нему дифференциальные уравнения возмущенного движения и граничные условия. Возмущение функций тока записывается согласно работам Линь Цзя-цзяо [2]. Задача сводится к решению системы алгебраических однородных уравнений, равенство нулю определителя которых и дает соотношение, связывающее параметры потока с величиной, характеризующей устойчивость. Получено условие устойчивости рассматриваемых видов течений вдоль стенок трубы относительно возмущений типа длинных волн.

В бесконечной круглой цилиндрической трубе радиуса a рассматривается установившееся, прямолинейное и осемметричное течение вязкой, несжимаемой жид-



кости, подверженной действию постоянного касательного напряжения τ на поверхности и силы тяжести, параллельной оси трубы (фигура). Если ввести безразмерные переменные (расход Q, глубина потока h) аналогично тому, как это было сделано при исследовании подобных течений вдоль наклонной стенки [3], нетрудно получить, что функция тока рассматриваемого течения в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\psi = \frac{R}{8F}r^4 + \frac{R}{3F}(\tau F + 1 - a)r^3 + \frac{Ra}{4F}(a - 2 - 2\tau F)r^2 \qquad (1)$$

где R — число Рейнольдса, F — число Фруда.

Ставится задача определения соотношения параметров потока, гарантирующего устойчивость данного течения жидкости относительно возмущений типа длинных волн

$$\psi_1(r, z, t) = \varphi(r)e^{i\varepsilon(z-ct)}, \qquad \eta(z, t) = ne^{i\varepsilon(z-ct)} \qquad (2)$$

Здесь $\psi_1(r, z, t)$ — возмущение функции тока, $\eta(z, t)$ — возмущение свободной поверхности, $\varepsilon = 1/\lambda$ (λ — длина волны) — малая величина. Возможность такого представления возмущений типа длинных волн обсуждается в работе [2].

Функция ψ_1 должна удовлетворять уравнению возмущенного движения

$$\frac{\partial D\psi_1}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial D\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial r\,\partial z}\right) + \qquad (3)$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3\psi}{\partial r^3}\right) = \frac{1}{R}DD\psi_1$$

$$\left(D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

и следующим граничным условиям:

$$\psi_1 = 0, \qquad \partial\psi_1/\partial r = 0, \qquad \text{при} \quad r = a \qquad (4)$$

$$p_{n\tau} = \tau, \qquad p_{nn} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\eta}{\partial z} \qquad \text{при} \quad r = a - (1 + \eta)$$

Первые два граничных условия есть ни что иное, как условие прилипания на стенке трубы, следующие два — условия сохранения касательного и нормального напряжений на поверхности течения, последнее — представляет собой кинематическое условие на поверхности жидкости.

Подставляя (2) в (3) и (4) и сохраняя только члены первого порядка малости, получаем для $\varphi(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$r^3\varphi^{\mathrm{IV}} - 2r^2\varphi''' + 3r\varphi'' - 3\varphi' = i\varepsilon Rr^3\left\{\varphi''\left[-\frac{R}{2F}(a-r)^2 + \frac{R}{F}(\tau F + 1)(a - r) - c\right] + \right.$$

$$+\varphi'\left[\frac{c}{r} - \frac{R}{2rF}(a-r)^2 - \frac{R}{rF}(\tau F + 1)(a - r) - \frac{R}{F}(a - r) + \frac{R}{F}(\tau F + 1)\right] +$$

$$\left. + \varphi\left[\frac{R}{rF}(a - r) - \frac{R}{rF}(\tau F + 1) + \frac{R}{F}\right]\right\} \qquad (5)$$

с граничными условиями

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$$

$$\frac{\varphi(a-1)}{a-1} = n\left(R\tau - c + \frac{R}{F}\right), \qquad \varphi''(a-1) - \frac{\varphi'(a-1)}{a-1} = -\frac{nR(a-1)}{F} \qquad (6)$$

$$\frac{\varphi'''(a-1)}{a-1} - \frac{\varphi''(a-1)}{(a-1)^2} + i\varepsilon R\left(c - \frac{R}{2F} - R\tau\right)\frac{\varphi'(a-1)}{a-1} - i\varepsilon R^2\tau\frac{\varphi(a-1)}{a-1} = 0$$

Общее решение уравнения (5) можно записать в виде

$$\varphi(r) = C_1\varphi_1(r) + C_2\varphi_2(r) + C_3\varphi_3(r) + C_4\varphi_4(r)$$

а линейно-независимые частные решения $\varphi_i(r)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ в силу аналитичности по ε коэффициентов уравнения (5) можно найти в виде рядов по ε.

Тогда представляется возможным рассматривать граничные условия (6) как систему однородных алгебраических уравнений относительно C_i, n $(i = 1, 2, 3, 4)$. Для разрешимости такой системы необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Равенство нулю этого определителя дает соотношение, связывающее основные параметры потока с величиной c, мнимая часть которой позволяет судить об устойчивости течений относительно данного вида возмущений. Полагая $c = \delta + i\gamma$, приравнивая нулю действительную и мнимую части определителя и исключая δ, после несложных, но довольно громоздких вычислений получаем для γ квадратное уравнение, корни которого соответственно равны

$$\gamma_{1,2} = B^{-1}(-A \pm \sqrt{A^2 + 2BC}) \tag{7}$$

$$A = (32a^3 + a^2 + 3a - 1) \ln (a - 1) + (16a^3 - 10a^2 + 96a - 4) \ln a + (28a^3 + 64a^2 - a)$$

$$B = 2\varepsilon R [(16a^5 + a^4 - 24a^3 - 10a^2 + 7) \ln (a - 1) + (a^4 + 48a^3 - 15a + 8) \ln a + (5a^4 + 8a^3 - 24a^2 + 10)]$$

$$\begin{aligned} C = \frac{R^2}{F^2}[(16a^8 + 48a^7 - 32a^6 + 50a^5 - 20a^4 + 27a^3 - a^2 + 10a + 7)\ln(a-1) + \\ + (-16a^8 + 24a^7 + 68a^5 + 32a^4 - 10a^3 + 12a^2 + 1)\ln a + (28a^8 - 30a^7 + 14a^6 - 4a^5 - \\ - 20a^4 - 96a^2 + 2)] - \frac{R^2\tau}{F}[(16a^7 + 40a^6 - 32a^5 + 8a^4 - 48a^3 - a^2 + 32a - 1)\ln(a-1) + \\ + (-16a^7 + 32a^4 - 4a^3 + 55a^2 - 21a + 4) \ln a + (28a^7 + 9a^6 - 70a^5 + 40a^4 - 32a^3 + \\ + 7a^2 - 5)] - R^2\tau^2[(32a^6 + 16a^5 - 4a^4 + 15a^3 - 8a^2 + 4a - 32)\ln(a-1) + \\ + (-32a^6 + 47a^5 + 12a^3 - a^2 + 9)\ln a + (16a^6 + 32a^5 + 40a^4 - 10a^3 + 8a^2 + 5a)] \end{aligned}$$

Если $\gamma_{1,2} < 0$, то исходное движение жидкости будет устойчиво относительно возмущений типа длинных волн. При достаточно большом радиусе трубы a по сравнению с толщиной слоя h, принятом за единицу, выражение (7) всегда будет отрицательным, если $C < 0$. Следовательно, условие устойчивости можно записать

$$\begin{aligned} R^2F^{-2} [(16a^8 + 48a^7 - 32a^6 + 50a^5 - 20a^4 + 27a^3 - a^2 + 10a + 7) \ln (a - 1) + \\ + (16a^8 + 24a^7 + 68a^5 + 32a^4 - 10a^3 - 12a^2 + 1) \ln a + \\ + (28a^8 - 30a^7 + 14a^6 - 4a^5 - 20a^4 - 96a^2 + 2)] + \\ + R^2F^{-1}\tau[(16a^7 + 40a^6 - 32a^5 + 8a^4 - 48a^3 - a^2 + 32a - 1) \ln (a - 1) + \\ + (-9a^7 + 32a^4 - 4a^3 + 55a^2 - 21a + 4) \ln a + (28a^7 + 9a^6 - 70a^5 + \\ + 40a^4 - 32a^3 + 7a^2 - 5)] < R^2\tau^2 [(32a^6 + 16a^5 - 4a^4 + 15a^3 - 8a^2 + \\ + 4a - 32) \ln (a - 1) + (-32a^6 + 47a^5 - 12a^3 - a^2 + 9) \ln a + \\ + (16a^6 + 32a^5 + 40a^4 - 10a^3 + 8a^2 + 5a)] \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, если параметры потока таковы, что выполняется неравенство (8), то течение устойчиво по отношению к возмущениям типа длинных волн; если же условию (8) удовлетворить невозможно, то исходное течение неустойчиво. Однако потеря устойчивости исходного течения не обязательно может означать переход в турбулентность. Теряет устойчивость данная форма течения, но, аналогично тому, как это происходит в случае течения вдоль наклонной плоскости [1], после потери устойчивости прямолинейным потоком может установиться волновое движение.

Поступило 14 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашинина Л. В. Установившиеся течения в тонких пленках. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Пашинина Л. В. Устойчивость волновых форм движения слоя вязкой жидкости под действием касательного напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.