

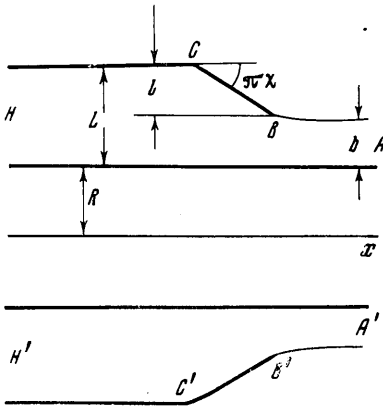
ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ ИСТЕЧЕНИИ СТРУИ ИЗ СОСУДА С КОНИЧЕСКИМ ДНОМ

В. А. ЧАЙКИН

(Ростов-на-Дону)

Методом малого параметра изучается осесимметричная струя несжимаемой идеальной жидкости, вытекающая из сосуда с коническим дном. Доказательство аналитической зависимости решения от малого параметра может быть получено при некоторых ограничениях (не опубликовано). Решение задачи в любом приближении записано через интегралы. В первом приближении произведено их вычисление. Дается сравнение коэффициентов сжатия осесимметричных и соответствующих им плоских струй.

1. Постановка задачи. Меридианальное сечение рассматриваемого течения изображено на фиг. 1, где ось x является осью симметрии течения, y — расстояние до оси x , R — радиус цилиндра, поверхность которого составляет часть твердой границы рассматриваемого течения. Считается, что на всей границе выполняется условие обтекания, на свободной поверхности модуль скорости равен 1, компоненты скорости u и v (осевой и радиальный) удовлетворяют уравнениям



Фиг. 1

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Первое из уравнений (1.1) обеспечивает несжимаемость среды, а второе — отсутствие вихря.

Введем новые переменные, полагая

$$u - iv = \bar{V}, \quad x + iy = z \\ x - iy = \bar{z} \quad (1.2)$$

Уравнение

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = \frac{\bar{V} - V}{2(z - \bar{z})} \quad (1.3)$$

только формой записи отличается от системы (1.1).

Если конформно отобразить область, в которой ищется решение уравнения (1.3), на единичный круг плоскости t по формуле

$$z = Z(t) = Z^*(t) \pm iR \quad (1.4)$$

(знак плюс берется при $\text{Im}t > 0$, знак минус — при $\text{Im}t < 0$) с соответствием точек, видимым из фиг. 1 и фиг. 2, то уравнение (1.3) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{\bar{V} - V}{2 [Z(t) - \overline{Z(t)}]} \overline{Z'(t)} \quad (1.5)$$

Произведем замену искомой функции, положив

$$f(t, \bar{t}) = t^{1-\chi} \bar{V}(t, \bar{t}) \tag{1.6}$$

Область изменения f изображена на фиг. 3. Соответствие точек видно из сравнения ее с фиг. 2. Для определения f на основе (1.5) получаем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}} = \left(f - \left(\frac{\bar{t}}{t} \right)^{\chi-1} \bar{f} \right) \frac{\overline{Z'(t)}}{2 [Z(t) - \overline{Z(t)}]} \tag{1.7}$$

Искомое решение этого уравнения должно удовлетворять условиям

$$f\bar{f}|_{|t|=1} = 1, \quad f(t, \bar{t}) = \overline{f(\bar{t}, t)}, \quad f(0, 0) = 0 \tag{1.8}$$

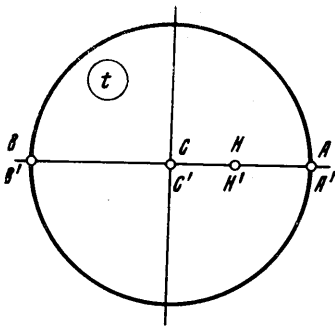
2. Отображающая функция. Введем еще одну неизвестную функцию, определенную на границе круга $|t| < 1$ равенством

$$f(t, \bar{t})|_{t=e^{i\theta}} = e^{i[\theta+\varphi(\theta)]} \tag{2.1}$$

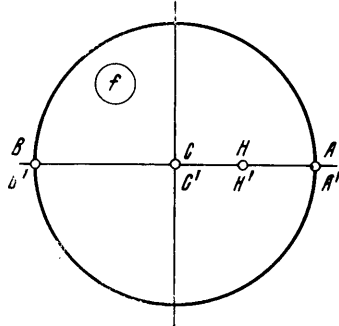
Элементарными преобразованиями устанавливается, что

$$\arctg \frac{v(\theta)}{u(\theta)} = -\chi\theta - \varphi(\theta) \tag{2.2}$$

Выразим $Z(t)$ через φ . Известно [1], что формула Чизотти дает отображение круга на произвольную область, если угол наклона касательной к границе этой области является известной функцией граничной точки



Фиг. 2



Фиг. 3

этого круга. Круг, о котором идет речь, расположим в плоскости τ (фиг. 4), а в качестве области возьмем область, ограниченную линией $ABCH$ (фиг. 1). Этот круг можно конформно отобразить на верхний полукруг плоскости t с соответствием точек, видимым из фиг. 2 и 4. Этим отображением, в частности, определяются φ и θ как функции от s . Очевидно, что α (угол наклона касательной к границе течения) как функция от s определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_0(s) - \varphi(s) = \pi - \chi\theta(s) - \varphi(s) && \text{при } 0 \leq s \leq \pi \\ \alpha(s) &= \alpha_0(s) = \pi(1 - \chi) && \text{при } \pi \leq s \leq 3/2\pi \\ \alpha(s) &= \alpha_0(s) = \pi && \text{при } 3/2\pi \leq s \leq s_H \\ \alpha(s) &= \alpha_0(s) = 2\pi && \text{при } s_H \leq s \leq 2\pi \end{aligned} \tag{2.3}$$

Формулу Чизотти запишем в виде

$$Z^*(\tau) = M \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\alpha_0(s) - \varphi(s)] \frac{e^{is} + \tau}{e^{is} - \tau} ds\right) \frac{d\tau}{(1-\tau)^2} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\tau_0 = e^{is_1}, \quad s_H < s_1 < 2\pi, \quad \varphi(s_2) \equiv 0, \quad \pi \leq s_2 \leq 2\pi$$

Легко видеть, что течению, получающемуся при $R \rightarrow \infty$, соответствует следующее решение уравнения (1.7):

$$f(t, \bar{t}) = f_0(t, \bar{t}) = t \quad (2.5)$$

и что при этом

$$\varphi = \varphi_0 \equiv 0 \quad (2.6)$$

Вводя $Z^0(\tau)$ равенством

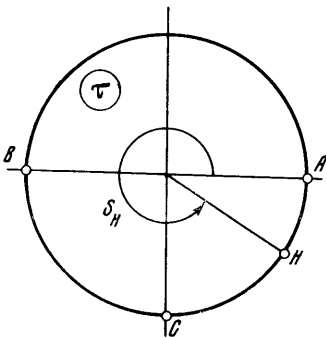
$$Z^0(\tau) = Z(\tau) |_{\varphi \equiv 0} \quad (2.7)$$

перепишем (2.4) следующим образом:

$$Z(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} Z^0(\tau) e^{g(\tau)} d\tau \quad (2.8)$$

$$g(\tau) = -\frac{i}{2\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \frac{e^{is} + \tau}{e^{is} - \tau} ds \quad (2.9)$$

Согласно формуле Шварца $g(\tau)$ — аналитическая функция, мнимая часть которой равна $\varphi(s)$ при $0 \leq s \leq \pi$ и равна 0 при $-\pi \leq s \leq 0$. Вследствие этого функция $g(t)$, которая на основе формулы (2.9) определяется на верхней половине круга $|t| < 1$, может быть продолжена на весь круг. Легко видеть, что определенная таким образом функция $g(t)$ дается формулой



Фиг. 4

$$g(t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta) \frac{e^{i\theta} + t}{e^{i\theta} - t} d\theta \quad (2.10)$$

причем $\varphi(\theta)$ при $\theta \leq 0$ определяется формулой

$$\varphi(\theta) = -\varphi(-\theta) \quad (2.11)$$

Займствуя из работы [2] выражение $Z^0(t)$, легко получаем окончательную формулу

$$Z(t) = \frac{q}{\pi} \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{t-h} + \frac{1}{t-h^{-1}} - \frac{2}{t-1} \right) \frac{e^{g(t)}}{t^x} dt \pm iR \quad (2.12)$$

$$h < t_0 < 1$$

Здесь q и h — параметры, определяющие течение; $g(t)$ определяется формулой (2.10).

3. Схема построения решения. Будем искать решение задачи методом малого параметра, в качестве которого возьмем

$$\alpha = q / R \tag{3.1}$$

В соответствии с этим, учитывая (2.6) и (2.12), положим

$$f(t, \bar{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k f_k(t, \bar{t}), \quad \varphi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \varphi_k(\theta) \tag{3.2}$$

$$Z(t) = q \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k Z_k(t) \pm iR, \quad Z^0(t) = qZ_0(t)$$

Подставляя (3.2) в (1.7) и (1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α в левых и правых частях этих равенств, получаем уравнения для определения f_k и соответствующие граничные условия

$$\frac{\partial f_k}{\partial \bar{t}} = P_k(t, \bar{t}), \quad f_k \bar{f}_0 + f_0 \bar{f}_k \Big|_{t=e^{i\theta}} = q_k(\theta) \quad (k \geq 1) \tag{3.3}$$

Здесь

$$P_k(t, \bar{t}) = \frac{1}{4ik!} \frac{d^k}{d\alpha^k} \left\{ \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [f_n - (\bar{t}/t)^{k-1} \bar{f}_n] \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \operatorname{Im} Z_n(t) \pm 1 \right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \overline{Z_n'(t)} \right) \right\} \Big|_{\alpha=0} \tag{3.4}$$

$$q_k(\theta) = - \sum_{\substack{m+n=k \\ m, n > 0}}^{\infty} f_m(t, \bar{t}) \overline{f_n(t, \bar{t})} \Big|_{t=e^{i\theta}} \tag{3.5}$$

Система задач (3.3) решается последовательно. Зная решения первых $k - 1$ задач, найдем φ_{k-1} по формуле

$$\varphi_{k-1}(\theta) = - \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} \left\{ i \ln \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n f_n(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \right] \right\} \Big|_{\alpha=0} \tag{3.6}$$

после чего вычислим Z_{k-1} , производя интегрирование в формуле

$$Z_{k-1}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\alpha^{k-1}} \left\{ \int_{t_0}^t Z_0'(t) \exp \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n g_n(t) dt \right\} \Big|_{\alpha=0} \tag{3.7}$$

Здесь $g_n(t)$ вычисляются по формуле (2.10), где вместо $\varphi(\theta)$ берется $\varphi_n(\theta)$.

Зная f_{k-1} и Z_{k-1} , вычислим P_k и q_k и перейдем к решению задачи в k -м приближении.

Общее решение уравнения (3.3) представимо в виде

$$f_k(t, \bar{t}) = \Phi_k(t) + F_k(t, \bar{t}) \tag{3.8}$$

где Φ_k — произвольная аналитическая в круге функция, а F_k — частное решение уравнения (3.3), которое может быть различными способами представлено через интегралы от P_k . Например [3]

$$F_k = \int P_k(t, \bar{t}) d\bar{t} \quad (3.9)$$

$$F_k = \frac{1}{\pi} \iint_{|\tau| < 1} \frac{P_k(\tau, \bar{\tau})}{\tau - t} ds \quad (3.10)$$

Зная F_k , на основе второго условия (3.3) получаем граничную задачу Гильберта

$$\cos \theta \operatorname{Re} \Phi_k(\theta) + \sin \theta \operatorname{Im} \Phi_k(\theta) = \psi_k(\theta) \quad (3.11)$$

для определения Φ_k . Здесь ψ_k — известная функция.

Решение этой задачи дается формулой

$$\Phi_k = \frac{t}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_k(\theta) \frac{e^{i\theta} + t}{e^{i\theta} - t} d\theta - g_k + ih_k + id_k t + (g_k - ih_k)t^2 \quad (3.12)$$

Из условий

$$f_k(t, \bar{t}) = \overline{f_k(\bar{t}, t)}, \quad f_k(0, 0) = 0 \quad (3.13)$$

учитывая симметрию F_k , получаем

$$d_k = h_k = 0, \quad g_k = F_k(0, 0) \quad (3.14)$$

После определения f_k находим Φ_k и Z_k . Этим завершается решение в k -м приближении и обеспечивается переход к $(k+1)$ -му.

4. Первое приближение. Для определения f_1 получаем уравнение

$$\frac{\partial F_1}{\partial \bar{t}} = \pm \frac{it^{1-x}}{4\pi} \left(1 - \frac{tx}{\bar{t}x} \right) \left(\frac{1}{\bar{t} - h} + \frac{1}{\bar{t} - h^{-1}} - \frac{2}{\bar{t} - 1} \right) \quad (4.1)$$

Общее решение его легко находится при рациональном χ на основе (3.9). При $\chi = 1/2$ имеем

$$\begin{aligned} f_1(t, \bar{t}) &= \Phi_1(t) + F_1(t, \bar{t}) = \Phi_1(t) \pm \frac{i\sqrt{t}}{4\pi} \ln \frac{\bar{t} - h}{t - h} \frac{\bar{t} - h^{-1}}{t - h^{-1}} \left(\frac{t-1}{\bar{t}-1} \right)^2 \mp \\ &\mp \frac{it}{4\pi\sqrt{h}} \ln \frac{\sqrt{t} - \sqrt{h}}{\sqrt{t} + \sqrt{h}} \frac{\sqrt{t} + \sqrt{h}}{\sqrt{t} - \sqrt{h}} \mp \frac{i\sqrt{h}t}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{t} - \sqrt{h^{-1}}}{\sqrt{t} + \sqrt{h^{-1}}} \frac{\sqrt{t} + \sqrt{h^{-1}}}{\sqrt{t} - \sqrt{h^{-1}}} \pm \\ &\pm \frac{it}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1} \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t} - 1} \end{aligned} \quad (4.2)$$

О выборе ветви функции F_1 можно судить по равенству (4.6). Для определения Φ_1 используем условия

$$\operatorname{Re} f_1 \bar{f}_0|_{|t|=1} = \operatorname{Re} \left(\frac{\Phi_1}{t} + \frac{F_1}{t} \right) \Big|_{|t|=1} = 0 \quad (4.3)$$

$$\operatorname{Im} f_1|_{\operatorname{Im} t=0} = 0, \quad f_1(0, 0) = 0 \quad (4.4)$$

Из (4.2) видно, что F_1 удовлетворяет условиям (4.4). Из этого и из условий (4.4) следует, что разложение Φ_1 в ряд Тейлора имеет вид

$$\Phi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad \operatorname{Im} a_k = 0 \quad (4.5)$$

и что Φ_1/t — аналитическая в круге $|t| < 1$ функция. Интеграл в (3.12) в данном случае точно не вычисляется, поэтому найдем Φ_1 из следующих соображений: согласно (4.5) и (4.3)

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi_1}{t} \Big|_{t=e^{i\theta}} = \pm \frac{1-h}{2\pi\sqrt{h}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{h} \sin \theta/2}{1-h} + \frac{3-\sqrt{h}}{2} \quad (4.6)$$

согласно (4.5) $\operatorname{Re} \Phi_1/t$ представляется своим рядом Фурье следующим образом:

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi_1}{t} \Big|_{t=e^{i\theta}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k-1)\theta \quad (4.7)$$

Из (4.7) и (4.6) получаем

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{\Phi_1}{t} \Big|_{|t|=1} d\theta$$

$$a_{k+1} = \frac{1-h}{\pi^2\sqrt{h}} \int_0^{\pi} \cos k\theta \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{h} \sin \theta/2}{1-h} d\theta, \quad k \geq 1 \quad (4.8)$$

Интегрируя по частям, производя замену

$$x = 1/2\theta \quad (4.9)$$

и пользуясь формулой 1.332.1 [4], получаем

$$a_{k+1} = -\frac{(1-h)^2}{\pi^2 h} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^{1/4}(1+h)^2/h - t^2} \left[1 - \frac{4k^2-2^2}{3!}(1-t^2) + \frac{(4k^2-2^2)(4k^2-4^2)}{5!}(1-t^2)^2 - \frac{(4k^2-2^2)(4k^2-4^2)(4k^2-6^2)}{7!}(1-t^2)^3 + \dots \right] \quad (4.10)$$

Вводя J_n равенством

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^2(1-t^2)^n dt}{t^{1/4}(1+h)^2/h - t^2} \quad (4.11)$$

перепишем (4.10) в следующем виде:

$$a_{k+1} = -\frac{(1-h)^2}{\pi^2 h} \left[J_0 - \frac{4k^2-2^2}{3!} J_1 + \frac{(4k^2-2^2)(4k^2-4^2)}{5!} J_2 - \frac{(4k^2-2^2)(4k^2-4^2)(4k^2-6^2)}{7!} J_3 + \dots \right] \quad (4.12)$$

Для вычисления J_n удобно воспользоваться рекуррентными формулами

$$J_n = -\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} + \frac{(1+h)^2}{4h} R_n, \quad R_n = R_{n-1} - J_{n-1} \quad (4.13)$$

Здесь

$$R_0 = \frac{2\sqrt{h}}{1+h} \ln \frac{1+\sqrt{h}}{1-\sqrt{h}} \quad (4.14)$$

Зная a_k , можно вычислить скорость с точностью до α^2 при любом t . Перейдем к определению соответствующих точек физического пространства.

В нулевом приближении решение известно [2]. Определим $Z_1(t)$.

На основе (3.6) имеем

$$\varphi_1(\theta) = -i \frac{f_1(t, \bar{t})}{t} \Big|_{|t|=1} \quad (4.15)$$

Отсюда, замечая, что

$$\operatorname{Im} \frac{F_1}{t} \Big|_{|t|=1} = 0 \quad (4.16)$$

получаем

$$\varphi_1(\theta) = \operatorname{Im} \frac{\Phi_1(t)}{t} \Big|_{|t|=1} \quad (4.17)$$

На основе (3.7) имеем

$$Z_1(t) = -\frac{i}{2\pi^2} \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{t-h} + \frac{1}{t-h^{-1}} - \frac{2}{t-1} \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(\theta) \frac{e^{i\theta} + t}{e^{i\theta} - t} d\theta \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (4.18)$$

Сравнивая (4.17) и (4.18), на основе формулы Шварца получаем

$$Z_1(t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{t-h} + \frac{1}{t-h^{-1}} - \frac{2}{t-1} \right) \left(a_1 - \frac{\Phi_1}{t} \right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (4.19)$$

или

$$Z_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} a_k \int_{t_0}^t \left(\frac{1}{t-h} + \frac{1}{t-h^{-1}} - \frac{2}{t-1} \right) \frac{t^{k-1}}{\sqrt{t}} dt \quad (4.20)$$

Интегралы в (4.20) легко вычисляются. В результате имеем

$$Z_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[J_k(h, t_0, t) + J_k\left(\frac{1}{h}, t_0, t\right) - 2J_k(1, t_0, t) \right] \quad (4.21)$$

где

$$J_k(\beta, t_0, t) = \left[2\sqrt{t} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{\beta^n t^{k-n-2}}{2k-2n-3} - \beta^{k-3/2} \ln \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{t}}{\sqrt{\beta} - \sqrt{t}} \right] \Big|_{t_0}^t \quad (4.22)$$

5. Определение коэффициента сжатия. Вычислим параметры течения l , L и b . Положим

$$l = q \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k l_k, \quad L = q \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k L_k, \quad b = q \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k b_k \quad (5.1)$$

Замечая, что

$$il = Z(0) - Z(-1) \quad (5.2)$$

легко получаем

$$l_0 = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{h}} + \sqrt{h} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h} - \frac{\pi}{2} \right]$$

$$l_k = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left[h^{k-3/2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{h}} + h^{3/2-k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(-1)^{k-n}}{2k-2n-3} \left(h^n + \frac{1}{h^n} - 2 \right) \right] \quad (5.3)$$

Для определения L и b заметим, что $Z(t)$ имеет особенности

$$-\frac{2b}{\pi} \ln(t-1), \quad \frac{L}{\pi} \ln(t-h)$$

вследствие чего

$$b = -\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} (t-1) Z'(t) \tag{5.4}$$

$$L = \lim_{t \rightarrow h} \pi (t-h) Z'(t) \tag{5.5}$$

На основе (5.4) и (5.5) получаем

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k, \quad L_0 = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$L_1 = -\sum_{k=2}^{\infty} a_k h^{k-3/2} \tag{5.6}$$

Выразим коэффициент сжатия струи c через R, L, l и b

Полагая
$$c = \frac{b(2R+b)}{(L-l)(2R+L-l)} \tag{5.7}$$

$$c =: c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots \tag{5.8}$$

и учитывая (5.1), имеем

$$c_0 = \frac{1}{L_0 - l_0}, \quad c_1 = \frac{(1+2b_1)(L_0 - l_0) - 2(L_1 - l_1) - (L_0 - l_0)^2}{2(L_0 - l_0)^2} \tag{5.9}$$

Обозначим через m отношение площади отверстия к площади сечения струи на бесконечности слева. Полагая

$$m = m_0 + \alpha m_1 + \alpha^2 m_2 + \dots \tag{5.10}$$

на основе (5.1) легко находим

$$m_0 = \frac{L_0 - l_0}{L_0}$$

$$m_1 = \frac{2L_0(L_1 - l_1) + L_0(L_0 - l_0)^2 - (L_0 - l_0)(2L_1 + L_0^2)}{2L_0^2} \tag{5.11}$$

Используя равенство $V_{\infty} = cm$, вытекающее из условия несжимаемости жидкости, получаем выражение для скорости на бесконечности слева

$$V_{\infty} = V_0 + \alpha V_1 + \alpha^2 V_2 + \dots \tag{5.12}$$

Здесь

$$V_0 = \frac{1}{L_0}, \quad V_1 = \frac{(2b_1 + 1)L_0 - 2L_1 - L_0^2}{2L_0^2} \tag{5.13}$$

Таким образом все параметры течения оказались выраженными через h и α .

Рассмотрим плоское течение, соответствующее данному осесимметричному и имеющее ту же скорость на бесконечности слева. Обозначая через m^* коэффициент m этого течения и полагая

$$m^* = m_0^* + \alpha m_1^* + \alpha^2 m_2^* + \dots \tag{5.14}$$

на основе (5.12) легко получаем

$$m_0^* = m_0$$

$$m_1^* = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-h}{1+h} - 2\sqrt{h} \operatorname{arctg} \sqrt{h} \right) \right] (2b_1 \sqrt{h} - 2hL_1 - 1) \tag{5.15}$$

Расчеты, проведенные при $h = 0.16$ и $h = 0.49$ с точностью до третьего знака, показывают, что m_1 и m_1^* , а значит c_1 и c_1^* , совпадают.

Интересно отметить, что намеченный таким образом приближенно принцип совпадения m и m^* и c и c^* при совпадении V_∞ и V_∞^* выполняется точно, когда $\chi = 0$ и когда $\chi = 1$ (обобщение насадки Борда). Первая часть этого утверждения тривиальна. Для проверки второй части достаточно заметить, что рассуждения И. М. Коновалова при определении коэффициента сжатия у соответствующей плоской струи [2] сохраняют свою силу для произвольного пространственного течения, если проводить их не в терминах поперечных размеров струи, а в терминах площадей ее поперечных сечений.

6. О коэффициенте сжатия струи, вытекающей из воронки. Предположим, что $R \neq 0$ и $L < \infty$. Естественно ожидать, что $c = c(R, L, a, \chi)$, где $a = L - l$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial c(R, L, a, \chi)}{\partial a} > 0 \quad (6.1)$$

т. е. при фиксированных R, L и χ он убывает с убыванием площади отверстия, из которого вытекает струя. Это справедливо по крайней мере при $\chi = 1$, когда согласно сказанному в предыдущем пункте

$$c = \left[1 + \left(1 - \frac{(R+a)^2 - R^2}{(R+L)^2 - R^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}$$

и вследствие непрерывной зависимости $\partial c / \partial a$ от R, L, a и χ при $\chi \approx 1$. Используя инвариантность задачи относительно преобразований подобия, легко убедиться, что, когда $a \rightarrow 0$, $c \rightarrow c_*$, где c_* — коэффициент сжатия плоской струи, вытекающей из щели между плоскостями. Таким образом установлено, что c_* есть нижняя грань коэффициентов сжатия всевозможных струй, схема которых дана на фиг. 1.

Теперь просто убедиться, что c^* не больше коэффициента сжатия струи, вытекающей из воронки ($R = 0, L = \infty$). Достаточно заметить, что последний как угодно мало отличается от коэффициента сжатия струи, у которой a и L/a при заданном R достаточно велики.

Согласно работам [5, 6] неравенство (6.1) не выполняется, если χ недостаточно близко к единице. При $\chi = 1$ при любом ε [5, 6] имеем $c = 0.5$. Отсюда следует:

$$\frac{X(-1)}{Y(-1)} = 0, \quad \frac{X(\infty)}{Y(\infty)} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = -2 \ln 2$$

Аппроксимируя X/Y квадратными трехчленами, получаем $c = 0.502$ согласно [5], $c = 0.444$ согласно [6]. Уточненная согласно [6] аппроксимация кубическим многочленом дает $c = 0.518$.

На основе этих данных трудно утверждать, что результаты работ [5, 6] недостаточно точны. Отметим только, что они не дают такой картины улучшения аппроксимации, какую следовало ожидать из результатов работы [6], и указывают на то, что, производя расчеты методом этих работ при $\chi \approx 1$, нельзя получить отрицание неравенства (6.1).

Автор благодарит М. И. Гуревича за ценные советы и замечания.

Поступило 30 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, Изд. 2. М., Физматгиз, 1958.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Изд. 4. М., Физматгиз, 1963.
5. Иванов В. С. О коэффициенте сужения струи, вытекающей из бесконечной конусной воронки. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
6. Garabedian P. R. Calculation of axially symmetric cavities and jets. Pacific J. Math., 1956, vol. 6, No. 4.